

УДК 539.3

УЧЕТ МЕЖЭЛЕМЕНТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ  
ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ

Геворкян Г. А., Севян С. Л.

**Ключевые слова:** конечные элементы, узловые перемещения, квадратичное программирование, плоская задача теории упругости.

**Keywords:** finite elements, junction transferences, quadratic programming, problems of plane elasticity.

Գ. Ա. Գևորգյան, Ս. Լ. Սևյան

Միջտարրային տեղափոխությունների անընդհատության հաշվառումը վերջավոր տարրերի  
մեթոդով առաձգականության տեսության հարթ խնդիրների լուծման ժամանակ

Առաջարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրների լուծման միջտարրային տեղափոխությունների անընդհատություն հաշվառումով ուղղանկյունաձև վերջավոր տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ:

G. A. Gevorgyan, S. L. Sevyan

**Taking into account interelemental uninterruptedness of displacements in solving the problems of plane elasticity by finite-element method**

A modification of rectangular finite-element method for solving problems of plane elasticity is proposed when interelemental continuousness of displacements is taking into account.

Предлагается модификация метода прямоугольных конечных элементов для решения плоской задачи теории упругости с учетом межэлементной непрерывности перемещений.

При использовании метода конечных элементов для решения плоской задачи теории упругости вид аппроксимирующих полиномов функции перемещений не является единственным [1]. При этом, в зависимости от выбора вида этих полиномов возникают разного рода неувязки. Так, если перемещения изменяются линейно вдоль сторон элемента, то выбранное поле перемещений внутри элемента и при переходе через границы элементов непрерывно, но условия равновесия элемента не выполняются. Если же перемещения изменяются по квадратичному закону вдоль сторон элемента, то поле перемещений не удовлетворяют требованиям, обеспечивающим межэлементную непрерывность перемещений, но выполняются условия равновесия элемента.

Здесь предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, при которой решения плоской задачи теории упругости с учетом межэлементной непрерывности перемещений сводятся к задачам квадратичного программирования. Данный подход дает возможность включить в ограничения квадратичного программирования условия непрерывности перемещений по всей линии контакта между смежными элементами и, тем самым, устранить неувязку.

Рассмотрим двумерную область, которая разделена на  $s \in \bar{N} = \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$  конечных элементов прямоугольной формы. Прямоугольный элемент имеет узлы лишь в четырех точках (фиг. 1).

Обозначим через  $R_s = (R_{1,x}^s, R_{1,y}^s, R_{2,x}^s, R_{2,y}^s, \dots, R_{4,x}^s, R_{4,y}^s)^T$  – вектор узловых усилий,  $q_s = (u_1^s, v_1^s, u_2^s, v_2^s, \dots, u_4^s, v_4^s)^T$  – вектор узловых перемещений,



$$\begin{aligned}
K_{ii}^{(0)} &= -K_{ii}, i \in M = \{1, 2, \dots, 2n\}; \quad K_{1j}^{(0)} = -K_{1j}, j \in \{2, 3, \dots, 2n\} \\
K_{ij}^{(r)} &= -K_{ij}^{(r-1)} - K_{i(j-1)}^{(r-1)} K_{ij}^{(r-1)}, r \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}, i \in \{r, \dots, 2n\}, j \in \{r+1, \dots, 2n\} \\
d_{ii} &= K_{ii}^{(0)} - \sum_{s=1}^{i-1} (K_{si}^{(s)})^2 - 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что  $r$  является вектором дополнительных переменных и исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы, для определения искомого вектора  $q$  получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \{0, 5q^T Dq + C^T q \mid Aq < 0, \text{ условие совместности перемещений, краевые условия} \} \quad (3)$$

Здесь  $D = \frac{Eh}{4ab(1-\nu^2)} \|d_{ij}\|$  – диагональная матрица порядка  $2n$ ,  $C = -R$  –

вектор-столбец порядка  $2n$ ,  $A = (A_1, A_2, \dots, A_{2n})$  – матрица коэффициентов обозначений (2),  $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{2n-1,j})^T, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ .

Вдоль сторон  $s$ -го элемента перемещения (1) изменяются по квадратичному закону. Так как для определения компонентов перемещения на каждой стороне имеется лишь два угловых смещения, то поле перемещений не удовлетворяет требованиям, обеспечивающим межэлементную непрерывность перемещений.

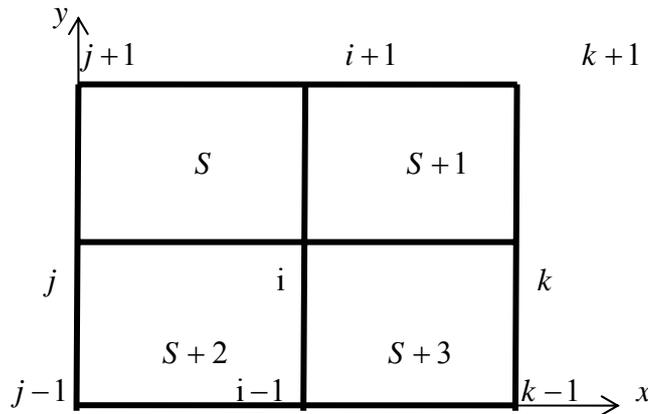
Для обеспечения непрерывности на границах разделов элементов, сходящихся в  $i$ -ом узле (фиг.2), введем дополнительные точки и напишем условия непрерывности перемещений в смежном сечении вдоль границы разделов соответствующих конечных элементов в этих точках, имеем

$$u^s(a, \frac{b}{2}) = u^{s+1}(0, \frac{b}{2}); \quad v^s(\frac{a}{2}, b) = v^{s+1}(\frac{a}{2}, 0) \quad (4)$$

$$u^s(\frac{a}{2}, b) = u^{s+2}(\frac{a}{2}, 0); \quad v^s(\frac{a}{2}, b) = v^{s+2}(\frac{a}{2}, 0) \quad (5)$$

$$u^{s+2}(a, \frac{b}{2}) = u^{s+3}(0, \frac{b}{2}); \quad v^{s+2}(\frac{a}{2}, b) = v^{s+3}(\frac{a}{2}, 0) \quad (6)$$

$$u^{s+1}(\frac{a}{2}, b) = u^{s+3}(\frac{a}{2}, 0); \quad v^{s+1}(\frac{a}{2}, b) = v^{s+3}(\frac{a}{2}, 0) \quad (7)$$



Фиг. 2.  $i$ -й узел

С учетом формул (1) условия (4)–(7) перепишем в виде:

$$v^{j-1} - 2v^{i-1} + v^{k-1} = v^j - 2v^i + v^k \quad (8)$$

$$v^{i-1} - 2v^i + v^{i+1} = v^{j-1} - 2v^j + v^{j+1} \quad (9)$$

$$u^{j-1} - 2u^{i-1} + u^{k-1} = u^j - 2u^i + u^k \quad (10)$$

$$u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1} = u^{j-1} - 2u^j + u^{j+1} \quad (11)$$

$$v^j - 2v^i + v^k = v^{j+1} - 2v^{i+1} + v^{k+1} \quad (12)$$

$$v^{i-1} - 2v^i + v^{i+1} = v^{k-1} - 2v^k + v^{k+1} \quad (13)$$

$$u^j - 2u^i + u^k = u^{j+1} - 2u^{i+1} + u^{k+1} \quad (14)$$

$$u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1} = u^{k-1} - 2u^k + u^{k+1} \quad (15)$$

Исключая из (8) и (9), (10) и (11), соответственно,  $v^i$  и  $u^i$ , находим

$$-v^{i-1} + v^{k-1} + v^j - v^k + v^{i+1} - v^{j+1} = 0 \quad (16)$$

$$-u^{i-1} + u^{k-1} + u^j - u^k + u^{i+1} - u^{j+1} = 0 \quad (17)$$

Отметим, что при исключении из условий (12) и (13), (14) и (15)  $v^i$  и  $u^i$ , также получаются связи (16) и (17).

Аналогично, исключая  $v^i$  и  $u^i$  из (8) и (13), (9) и (11), (10) и (15), (11) и (14), имеем:

$$-v^{i-1} + v^{j-1} + v^j - v^k + v^{i+1} - v^{k+1} = 0 \quad (18)$$

$$-u^{i-1} + u^{j-1} + u^j - u^k + u^{i+1} - u^{k+1} = 0 \quad (19)$$

Таким образом, для обеспечения непрерывности на всех границах разделов элементов, сходящихся в  $i$ -м узле, взамен условий (8)–(15) достаточно выполнения равенств (16) и (17) или (18) и (19).

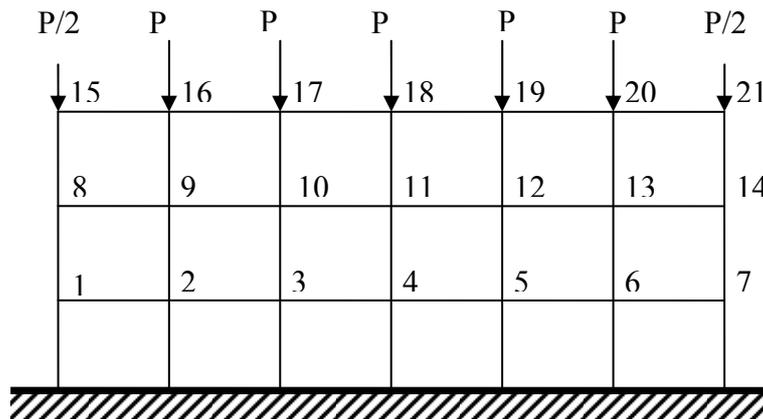
Перепишем все необходимые условия непрерывности перемещений заданными соотношениями (16) и (17), (18) и (19) или (8)–(15) в виде системы уравнений

$$Hq = 0 \quad (20)$$

где  $H$  – матрица порядка  $n \times 2(\hat{n} + 1)$ ,  $\hat{n}$  – количество внутренних узлов.

С учетом равенств (22) задача (3) примет вид

$$\min \{0, 5q^T Dq + C^T q \mid Aq < 0, Hq = 0, \text{краевые условия}\} \quad (21)$$



Фиг. 3. Балка-стенка. Сетка 6 x 3.

**Пример.** Рассмотрим задачу об определении деформированного состояния балки-стенки (фиг.3), защемленной по своей нижней грани, и к верхней грани которой приложены нагрузки в виде сочетания сосредоточенных нагрузок. Балка-стенка имеет размеры 6х3м (фиг.3), толщину  $h = 15\text{см}$ , изготовлена из материала с модулем упругости  $3000000 \text{ тс/м}^2$  и коэффициентом Пуассона 0,2. Заданы нагрузки  $P = 1\text{тс}$ . Для выявления эффекта учета непрерывности перемещений произведены расчеты без учета непрерывности перемещений для сеток 6 х 3 и 12 х 6 и с учетом непрерывности перемещений для сетки 6 х 3. Результаты расчетов приведены в таблице. Отметим, что при проведения расчетов с учетом непрерывности перемещений использованы: для узлов 2,3,9,10 – формулы (18) и (19), для узлов 5, 6, 12, 13 – формулы (18) и (19), а для узлов 4, 11, 18 – формулы (12) и (14).

Таблица значений перемещений

Узел	без учета непрерывности перемещений, сетка 6 х 3		без учета непрерывности перемещений, сетка 12х6		с учетом непрерывности перемещений, сетка 6 х 3	
	U (мм)	V (мм)	U (мм)	V (мм)	U (мм)	V (мм)
1	-0.017439	-0.049862	-0.017255	-0.049703	-0.013506	-0.049094
2	-0.008551	-0.042692	-0.009181	-0.043365	-0.007553	-0.043032
3	-0.003768	-0.04157	-0.004010	-0.041728	-0.004258	-0.041546
4	0	-0.041101	0	-0.041310	0	-0.041288
5	0.003768	-0.04157	0.004010	-0.041728	0.004258	-0.041546
6	0.008551	-0.042692	0.009181	-0.043365	0.007553	-0.043032
7	0.017439	-0.049862	0.017255	-0.049703	0.013506	-0.049094
8	-0.024002	-0.093511	-0.024031	-0.093194	-0.023763	-0.094508
9	-0.015492	-0.088246	-0.015318	-0.088311	-0.014515	-0.086959
10	-0.007176	-0.084865	-0.007295	-0.085355	-0.006987	-0.085217
11	0	-0.084042	0	-0.084489	0	-0.084703
12	0.007176	-0.084865	0.007295	-0.085355	0.006987	-0.085217
13	0.015492	-0.088246	0.015318	-0.088311	0.014515	-0.086959
14	0.024002	-0.093511	0.024031	-0.093194	0.023763	-0.094508
15	-0.028975	-0.137603	-0.028488	-0.137335	-0.032655	-0.13902
16	-0.019665	-0.132912	-0.019329	-0.132914	-0.019174	-0.131338
17	-0.009966	-0.129407	-0.009634	-0.129766	-0.008952	-0.12934
18	0	-0.128131	0	-0.128753	0	-0.129121
19	0.009966	-0.129407	0.009634	-0.129766	0.008952	-0.12934
20	0.019665	-0.132912	0.019329	-0.132914	0.019174	-0.131338
21	0.028975	-0.137603	0.028488	-0.137335	0.032655	-0.13902

Исходя из этой таблицы, легко заметить, что значения перемещений балки-стенки без учета непрерывности перемещений для сетки 12х6 даже менее точны, чем с учетом непрерывности перемещений для сетки 6 х 3, т.е. значения последней наиболее близки к точному решению. При этом, первая задача сводится к решению системы линейных уравнений с 84 неизвестными, а вторая задача сводится к решению задачи квадратичного программирования с 42 неизвестными и 63 ограничениями (41 из ограничений – неравенство).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галлагер Р. Г. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
2. Turner M. J., Gough R. W., Martin H. C., Topp L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. //J. Aero. Sci., Sept. 1956. 23. № №23, 9. P. 805-824.

Ереванский государственный университет  
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию  
4.04.2007