ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Варданян С.А., Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, тонкая пластинка, асимптотический метод.
Key words: micropolar, thermoelasticity, thin plate, asymptotic method

Ս. Ա. Վարդանյան, Ս. Հ. Սարգսյան
Միկրոպոլյար բարակ սալի ջերմաառաձգականության հավասարումների և եզրային պայմանների ասիմպտոտիկ անալիզը

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է ջերմային լարումների եզրային խնդիրը բարակ սալի եռաչափ տիրույթում, տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով առաձգականության ոչ սիմետրիկ, մոմենտային, միկրոպոլյար տեսության դրվածքով: Քանի որ եզրային խնդիրը սինգուլյար գրգռված է փոքր պարամետրով (որը բնութագրում է սալի բարակությունը), նրա լուծման համար կիրառվում է ասիմպտոտիկ մեթոդ: Ցույց է տրվում, որ եզրային խնդրի ասիմպտոտիկան էականորեն կապված է սալի նյութի անչափ առաձգական հաստատունների արժեքների հետ: Այս տեսանկյունից, կախված սալի նյութի առաձգական անչափ հաստատունների արժեքներից, կառուցվում են երեք տարբեր ասիմպտոտիկաներ: Նրանցից առաջինը հանգեցնում է միկրոպոլյար բարակ սալերի՝ ազատ պտույտներով ջերմաառաձգականության տեսությանը, երկրորդը՝ միկրոպոլյար սալերի կաշկանդված պտույտներով ջերմաառաձգականության տեսությանը, երրորդը՝ միկրոպոլյար սալերի ՙփոքր սահքային՚ կոշտությամբ ջերմաառաձգականության տեսությանը: Կառուցված և հետազոտված են նաև համապատասխան միկրոպոլյար սահմանային շերտերը:

S. A. Vardanyan, S. H. Sargsyan
Asymptotic analysis of the equations and boundary conditions of thermoelasticity of micropolar thin plates

In the framework of the asymmetrical momental micropolar theory in the present work the boundary value problem of thermal stresses in a three-dimensional thin plate with independent fields of displacements and rotations is studied on the basis of asymptotic method.
Depending on the values of physical dimensionless constants of the material three applied two-dimensional theories of thermoelasticity of micropolar thin plate are constructed (theories with independent rotations, with constrained rotations and with small shift rigidity).

В данной работе рассматривается краевая задача температурных напряжений в постановке несимметричной, моментной, микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в трехмерной тонкой области пластинки. Так как краевая задача сингулярно-возмущенная с малым параметром (который характеризует тонкостенность пластинки) для ее решения принимается асимптотический метод. Показывается, что асимптотика краевой задачи существенным образом связана со значениями безразмерных упругих констант материала пластинки. С этой точки зрения в зависимости от значения упругих безразмерных констант материала пластинки строятся три различные асимптотики. Первая из них приводит к теории термоупругости микрополярных пластин со свободным вращением, второе – к теории термоупругости микрополярных пластин со стесненным вращением, третье – к теории термоупругости микрополярных пластин “с малой сдвиговой” жесткостью. Построены и изучены соответствующие микрополярные погранслои.

Введение. Трехмерная несимметричная теория термоупругости изложена в работах [1,2]. В работе [3] на основе симбиоза основных положений несимметричной теории упругости и уточненных теорий пластин и оболочек [4,5] построена теория микрополярных пластин и оболочек. В работе [6] изучена задача температурных напряжений в микрополярных пластинках и оболочках.

Один из основных методов построения общей теории тонких пластин и оболочек на основе классической теории упругости является асимптотический метод [7-11]. В работах [12, 13] разработан асимптотический подход для построения общей теории микрополярных тонких пластин. В зависимости от значений физических безразмерных констант микрополярного материала пластинки построены три различные теории микрополярных пластин со свободным вращением, со стесненным вращением и теории с “малой сдвиговой жесткостью”. Построены и изучены соответствующие теории микрополярных погранслоев. В данной работе асимптотический подход, разработанный в [12,13], развивается в теории температурных напряжений в микрополярных пластинках.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое теплопроводное тело. Оси α_1, α_2 криволинейной ортогональной системы координат отнесем к срединной плоскости пластинки, ось α_3 будет перпендикулярна к срединной плоскости пластинки. Будем исходить из основных уравнений статической задачи трехмерной несимметричной теории термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТТУ с НППВ) [1,2]:

уравнения равновесия –

$$\sigma_{ji,j} = 0\,,\ \mu_{ji,j} + э_{ijk}\sigma_{jk} = 0 \tag{1.1}$$

физические соотношения –

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + (\lambda\gamma_{kk} - \vartheta\Theta)\cdot\delta_{ij} \\ \mu_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\chi_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij} \end{cases} \tag{1.2}$$

геометрические соотношения –

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - э_{kij}\cdot\omega_k\,,\quad \chi_{ij} = \omega_{j,i} \tag{1.3}$$

уравнение стационарной теплопроводности –

$$\Delta\Theta = 0 \tag{1.4}$$

Здесь σ_{ij},μ_{ij} – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{ij},χ_{ij} –компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения; $\vec{u}$ – вектор перемещения; $\vec{\omega}$ – вектор независимого поворота точек тела-пластинки; Θ – функция температуры точек трехмерного тела пластинки; $\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – упругие константы материала пластинки; α_t – коэффициент теплового расширения материала пластинки, $\vartheta = (2\mu+3\lambda)\alpha_t$; Δ – трехмерный оператор Лапласа; H_i $i=1,\ 2$ представляют обратные величины коэффициентов Ламе для выбранной ортогональной системы координат.

На лицевых плоскостях $\alpha_3 = \pm h$ пластинки считаются заданными: силовые и моментные напряжения и температура:

$$\sigma_{3i} = \pm p_i^{\pm}\ ,\quad \mu_{3i} = \pm m_i^{\pm}\quad (i=1,\ 2,\ 3),\qquad \Theta = T^{\pm}\quad \text{при}\ \ \alpha_3 = \pm h \tag{1.5}$$

где $\pm p_i^{\pm}$, $\pm m_i^{\pm}$ $(i=1,2,3)$ – компоненты внешних заданных усилий и моментов, а $T^{\pm}$ – значения температуры на лицевых плоскостях пластинки.

На боковой цилиндрической поверхности $(\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ пластинки, в общем случае, для механической части задачи считаем заданными граничные условия смешанного типа:

$$\sigma_{ji}n_j = p_i^*,\quad \mu_{ji}n_j = m_i^*\quad \text{на}\ \ \Sigma_1;\quad \vec{u} = \vec{u}_*,\ \ \vec{\omega} = \vec{\omega}_*\quad \text{на}\ \ \Sigma_2 \tag{1.6}$$

где p_i^*, m_i^* – компоненты заданных внешних усилий и моментов; $\vec{u}_*$, $\vec{\omega}_*$ – заданные векторы перемещения и поворота; n_i – компоненты вектора нормали к боковой цилиндрической поверхности пластинки. На боковой цилиндрической поверхности Σ для температурного поля может быть задана либо температура, либо граничное условие второго рода, либо граничное условие типа теплообмена (для определенности далее примем, что на $\sum$ также задана температура).

Решение поставленной задачи (1.1)-(1.6) для пластинки, как это имеет место в классической теории упругости, складывается из суммы решений симметричной по α_3 и обратно-симметричной задач (в симметричной задаче четные по α_3 величины будут σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{12}, σ_{21}, μ_{13}, μ_{23}, μ_{31}, μ_{32}, u_1, u_2, ω_3, Θ, нечетные – σ_{31}, σ_{13}, σ_{32}, σ_{23}, μ_{11}, μ_{22}, μ_{33}, μ_{12}, μ_{21}, ω_2, ω_3, u_3; в обратно-симметричной задаче – наоборот).

Предполагается, что толщина пластинки мала по сравнению с характерным размером ее a в срединной плоскости пластинки ($2h << a$, $\delta = h/a << 1$ –малый геометрический параметр, который будет считаться основным малым параметром поставленной задачи).

Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряженно-деформированное состояние (НДС) и температурное состояние тонкого трехмерного тела, образующего пластинку, состоит из внутреннего НДС и температуры, охватывающей всю пластинку и погранслои, локализующиеся вблизи боковой поверхности пластинки. Для приближенного определения как внутреннего НДС и температуры, так и краевого НДС и температуры будем применять асимптотический подход, развитый в работах [12–14].

2. Введение безразмерных координат, величин и безразмерных физических параметров. Для построения внутреннего итерационного процесса в уравнениях (1.1)-(1.6) НТТУ с НППВ перейдем к безразмерной системе координат и к безразмерным величинам по формулам:

$$\xi = \frac{\alpha_1}{a}, \quad \eta = \frac{\alpha_2}{a}, \quad \zeta = \frac{\alpha_3}{h} \tag{2.1}$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \ \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}, \ \bar{\mu}_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{a\mu}, \ \bar{\Theta} = \frac{\Theta}{T_0}, \ \bar{\alpha}_t = \alpha_t \cdot T_0 \tag{2.2}$$

где T_0 – некоторая определенная температура.

При определении как внутреннего НДС, так и краевого НДС пластинки большую роль играют значения физических констант микрополярного материала пластинки. С этой точки зрения будем вводить следующие безразмерные параметры:

$$\frac{\alpha}{\mu}, \quad \frac{\beta}{a^2\mu}, \quad \frac{\gamma}{a^2\mu}, \quad \frac{\varepsilon}{a^2\mu} \tag{2.3}$$

в которых присутствует также масштабный фактор.

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^{S} \delta^s Q^{(s)} \tag{2.4}$$

где Q –любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и независимых поворотов и температура; q – натуральное число, которое различно для различных величин и которое определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений. В зависимости от значений безразмерных физических констант (2.3) ниже строятся три разные асимптотики.

3. **Двумерные уравнения термоупругости микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений.** Будем предполагать, что безразмерные физические константы (2.3) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim 1, \quad \frac{\beta}{a^2\mu} \sim 1, \quad \frac{\gamma}{a^2\mu} \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{a^2\mu} \sim 1 \tag{3.1}$$

В этом случае в выражении (2.4) для q получим:

для симметричной по ζ задачи (термоупругое обобщенное плоское напряженное состояние):

$$\begin{aligned} &q=2 \text{ для } \bar{\sigma}_{mn} \ (mn: 11,\ 22,\ 12,\ 21),\ \bar{\mu}_{i3},\ \bar{\mu}_{3i},\ \bar{u}_i \ (i=1,\ 2),\ \omega_3,\ \bar{\Theta},\\ &q=1 \text{ для } \bar{\sigma}_{i3},\ \bar{\sigma}_{3i} \ (i=1,\ 2),\ \bar{\mu}_{mn} \ (mn: 11,\ 22,\ 33,\ 12,\ 21),\ \bar{u}_3,\ \omega_i \ (i=1,\ 2),\\ &q=0 \text{ для } \bar{\sigma}_{33}; \end{aligned} \tag{3.2}$$

для обратно-симметричной по ζ задачи (термоупругий изгиб):

$$\begin{aligned} &q=2 \text{ для } \overset{\text{т}}{\bar{\sigma}}_{11},\ \overset{\text{т}}{\bar{\sigma}}_{22},\ \bar{\Theta}\\ &q=1 \text{ для } \bar{\sigma}_{i3},\ \bar{\sigma}_{3i} \ (i=1,\ 2),\ \bar{u}_3,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \bar{\mu}_{mn} \ (mn: 11,\ 22,\ 33,\ 12,\ 21)\\ &q=0 \text{ для } \overset{\text{с}}{\bar{\sigma}}_{11},\ \overset{\text{с}}{\bar{\sigma}}_{22},\ \bar{\sigma}_{33},\ \bar{\sigma}_{12},\ \bar{\sigma}_{21},\ \bar{\mu}_{i3},\ \bar{\mu}_{3i},\ \bar{u}_i \ (i=1,2),\ \omega_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

В исходном асимптотическом приближении получены следующие качественные результаты:

–для задачи плоского напряженного состояния: перемещения $u_1,\ u_2$ и независимый поворот ω_3 постоянны по толщине пластинки, а перемещение u_3 и независимые повороты $\omega_1,\ \omega_2$ – линейные функции от ζ; силовые напряжения σ_{mn} $(mn: 11,12,21,22)$ и моментные напряжения μ_{kl} $(kl: 13,23,31,32)$ тоже постоянны по толщине пластинки, а силовые напряжения σ_{kl} и моментные напряжения $\mu_{mn},\ \mu_{33}$ –линейные функции от ζ; σ_{33} состоит из постоянного и квадратичного по ζ частей;

– для задачи изгиба: перемещение u_3 состоит из постоянного и квадратичного по ζ частей, независимые повороты ω_1, ω_2 постоянны по толщине пластинки, независимый поворот ω_3 – линейная функция от ζ; силовые напряжения $\sigma_{kl}\,(kl: 13,23,32,31)$ состоят из постоянного и квадратичного по ζ частей, моментные напряжения $\mu_{mn},\ \mu_{33}$ $(mn: 11,12,21,22)$ постоянны по толщине пластинки, моментные напряжения μ_{kl} – линейные функции от ζ, а перемещения $u_1,\ u_2$ и силовые напряжения σ_{mn}, σ_{33} состоят из линейного и кубического по ζ частей.

Отметим, что как при асимптотике (3.2), так и при асимптотике (3.3) для температуры получим линейный закон изменения по толщине пластинки. Этот результат независен от значений физических безразмерных констант (2.3) (он имеет место как при (2.1), так и при других значениях этих физических параметров рассматриваемых ниже).

Введем вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия, моменты и гипермоменты.

Для задачи обобщенного термоупругого плоского напряженного состояния :

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}d\alpha_3,\ (ii:11,22,33),\ \ S_{12}=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}d\alpha_3,\ \ L_{kl}=\int_{-h}^{h}\mu_{kl}d\alpha_3,\ \ T_1=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}Иd\alpha_3$$

$$M_{kl}=\int_{-h}^{h}\sigma_{kl}\alpha_3 d\alpha_3,\qquad \Lambda_{mn}=\int_{-h}^{h}\mu_{mn}\alpha_3 d\alpha_3,\qquad \Lambda_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}\alpha_3 d\alpha_3 \tag{3.4}$$

Для задачи термоупругого изгиба:

$$N_{kl}=\int_{-h}^{h}\sigma_{kl}d\alpha_3,\qquad M_{mn}=\int_{-h}^{h}\sigma_{mn}\alpha_3 d\alpha_3,\qquad M_{33}=\int_{-h}^{h}\sigma_{33}\alpha_3 d\alpha_3 \tag{3.5}$$

$$L_{mn}=\int_{-h}^{h}\mu_{mn}d\alpha_3,\ \ L_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}d\alpha_3,\ \ \Lambda_{kl}=\int_{-h}^{h}\mu_{kl}\alpha_3 d\alpha_3,\qquad T_2=\frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h}И\alpha_3 d\alpha_3$$

Как результат асимптотического метода внутреннего итерационного процесса, приведем при $s=0$ двумерные уравнения микрополярных термоупругих пластин со свободным вращением:

Обобщенное плоское термоупрогое напряженное состояние:

уравнения равновесия

$$H_1\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial S_{21}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(T_{11}-T_{22}\right)-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(S_{12}+S_{21}\right)=-\left(p_1^+ + p_1^-\right)$$

$$H_1\frac{\partial S_{12}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial T_{22}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(S_{12}+S_{21}\right)-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(T_{22}-T_{11}\right)=-\left(p_2^+ + p_2^-\right) \tag{3.6}$$

$$H_1\frac{\partial L_{13}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial L_{23}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}L_{13}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}L_{23}+S_{12}-S_{21}=-\left(m_3^+ + m_3^-\right)$$

соотношения упругости

$$T_{11}=\frac{2Eh}{1-\upsilon^2}\left[\Gamma_{11}+\upsilon\Gamma_{22}\right]-\frac{2Eh}{1-x}\textit{б}_t T_1\quad \left(1\leftrightarrows 2\right),\quad S_{12}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{12}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{21}\right]\ \left(1\leftrightarrows 2\right)$$

$$L_{13}=2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{13}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}L_{31}\quad\left(1\to 2\right) \tag{3.7}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{11}=H_1\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_1}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_2\quad\left(1\rightleftarrows 2\right),\quad \Gamma_{12}=H_1\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_1-O_3$$

$$\Gamma_{21}=H_2\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_2}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_2+O_3,\quad k_{13}=H_1\frac{\partial O_3}{\partial\alpha_1}\quad\left(1\to 2\right) \tag{3.8}$$

Здесь $L_{31}=h\left(m_1^+-m_1^-\right)\ \left(1\to 2\right),\quad T_1=\left(T^+ + T^-\right)/2.$ (3.9)

Термоупругий изгиб микрополярных пластин

уравнения равновесия

$$H_1\frac{\partial N_{13}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial N_{23}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}N_{13}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}N_{23}=-\left(p_3^++p_3^-\right)+\frac{1}{2}\nabla^2M_T \quad (3.10)$$

$$H_1\frac{\partial L_{11}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial L_{21}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{11}-L_{22}\right)-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{12}+L_{21}\right)+N_{23}-N_{32}=-\left(m_1^++m_1^-\right)$$

$$H_1\frac{\partial L_{12}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial L_{22}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{12}+L_{21}\right)-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{22}-L_{11}\right)+N_{31}-N_{13}=-\left(m_2^++m_2^-\right)$$

соотношения упругости

$$N_{13}=2h\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Gamma_{13}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}N_{31} \quad \left(1\rightarrow2\right)$$

$$L_{12}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{12}+\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{21}\right] \quad \left(1\rightleftarrows2\right) \quad (3.11)$$

$$L_{11}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\gamma+\beta\right)}{2\gamma+\beta}k_{11}+\frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}k_{22}\right]+\frac{\beta}{2\gamma+\beta}L_{33} \quad \left(1\rightleftarrows2\right)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\Omega_2, \qquad \Gamma_{23}=H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}-\Omega_1 \quad (3.12)$$

$$k_{11}=H_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2 \quad \left(1\rightleftarrows2\right), \quad k_{12}=H_1\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1 \quad \left(1\rightleftarrows2\right)$$

здесь
$$N_{3i}=h\left(p_i^+-p_i^-\right)+\frac{3}{2}H_i\frac{\partial M_T}{\partial\alpha_i} \quad \left(i=1,2\right)$$

$$M_T=-\frac{Eh^2}{3(1-x)}б_t\left(T^+-T^-\right), \quad L_{33}=h\left(m_3^+-m_3^-\right) \quad (3.13)$$

Построив термоупругий микрополярный погранслой и изучив взаимодействие внутренней задачи и погранслоев, получим граничные условия для двумерных уравнений пластин.

Для обобщенного термоупругого плоского напряженного состояния микрополярных пластин со свободным вращением:

1) для загруженного края

$$T_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3, \quad S_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3, \quad L_{13}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3 \quad (3.14)$$

2) для жестко- защемленного края

$$V_1\Big|_{\Gamma}=0, \quad V_2\Big|_{\Gamma}=0, \quad \Omega_3\Big|_{\Gamma}=0 \quad (3.15)$$

Для термоупругого изгиба микрополярных пластин со свободным вращением

1) для загруженного края

$$N_{13}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_3^*dx_3-\frac{1}{2}\frac{\partial M_T}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma}, \quad L_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_1^*dx_3, \quad L_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_2^*dx_3-M_T\Big|_{\Gamma} \quad (3.16)$$

2) для свободно опертого края

$$W\Big|_{\Gamma}=\frac{1}{2h}\frac{2\alpha-\mu}{4\mu\alpha}M_T\Big|_{\Gamma},\quad L_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_1^*dx_3,\quad L_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_2^*dx_3-M_T\Big|_{\Gamma} \tag{3.17}$$

3) для жестко- защемленного края

$$W\Big|_{\Gamma}=-\frac{1}{2h}\frac{1}{4\mu}M_T\Big|_{\Gamma},\quad \Omega_1\Big|_{\Gamma}=0,\quad \Omega_2\Big|_{\Gamma}=0 \tag{3.18}$$

Система уравнений (3.6)-(3.8) и граничные условия (3.14), (3.15) представляют собой математическую модель обобщенного плоского напряженного состояния термоупругости микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Система уравнений (3.10)-(3.12) и граничные условия (3.16)-(3.18) представляют собой математическая модель термоупругого изгиба микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Отметим, что как определяющая система обобщенного плоского напряженного состояния термоупругости микрополярных пластин со свободным вращением, так и определяющая система термоупругого изгиба микрополярных пластин со свободным вращением являются системами шестого порядка с тремя граничными условиями на каждом боковом контуре срединной плоскости пластинки.

4. Двумерные уравнения термоупругости микрополярных пластин со стесненным вращением.

Предположим, что безразмерные физические константы материала пластинки (2.3) теперь представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{\mu}\sim 1,\qquad \frac{\beta}{a^2\mu}\sim\delta^2\overline{\beta},\qquad \frac{\gamma}{a^2\mu}\sim\delta^2\overline{\gamma},\qquad \frac{\varepsilon}{a^2\mu}\sim\delta^2\overline{\varepsilon} \tag{4.1}$$

где $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\varepsilon}$ – величины порядка единицы.

В этом случае для краевой задачи (1.1)-(1.7) НТТУ имеет место отличное от (3.2), (3.3) асимптотика. Ограничимся задачей изгиба. В выражении (3.4) для q будем иметь:

$$\begin{aligned}
&q=0 \text{ для } \overline{\sigma}_{33},\ \overline{\mu}_{3i},\ \overline{\mu}_{i3}\ \left(i=1,\ 2\right),\quad q=3 \text{ для } \overline{u}_3,\ \omega_i\ \left(i=1,\ 2\right)\\
&q=1 \text{ для } \overline{\sigma}_{3i},\ \overline{\sigma}_{i3}\ \left(i=1,\ 2\right),\ \overline{\mu}_{mn}\ \left(mn:11,22,33,12,21\right)\\
&q=2 \text{ для } \overline{\sigma}_{mn}\ \left(mn:11,22,12,21\right),\ \overline{u}_i\ \left(i=1,\ 2\right),\ \omega_3,\ \overline{\Theta}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Асимптотика (4.1), (4.2) имеет следующие особенности (исходное асимптотическое приближение):

а) повороты точек срединной плоскости пластинки выражаются через прогибы пластинки в этих точках.

б) температура по толщине пластинки распределена линейным образом; далее часть величин можно объединить, относительно которых получаются двумерные определяющие уравнения. Система этих уравнений представляет систему двумерных уравнений термоупругости микрополярных пластин со стесненным вращением. Для величин μ_{33}, μ_{31}, μ_{32} получаются отдельные дифференциальные уравнения по независимой переменной ζ, где переменные ξ, η выступают как параметры.

Главным результатом является определяющая система двумерных уравнений термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением:

уравнения равновесия

$$H_1\frac{\partial N_{13}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial N_{23}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}N_{13}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}N_{23}=-\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right)$$

$$H_1\frac{\partial\left(L_{11}-M_{12}\right)}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial\left(L_{21}-M_{22}\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{11}-M_{12}-L_{22}-M_{21}\right)-$$

$$-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{12}+M_{11}+L_{21}-M_{22}\right)+N_{23}=-\left(m_1^{+}+m_1^{-}\right)+h\left(p_2^{+}-p_2^{-}\right)\tag{4.3}$$

$$H_1\frac{\partial\left(L_{12}+M_{11}\right)}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial\left(L_{22}+M_{21}\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{12}+M_{11}+L_{21}-M_{22}\right)-$$

$$-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{22}+M_{21}-L_{11}+M_{12}\right)-N_{13}=-\left(m_2^{+}+m_2^{-}\right)-h\left(p_1^{+}-p_1^{-}\right)$$

физико-геометрические соотношения

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\upsilon^2)}\left[\left(H_1\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_1}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\beta_2\right)+\upsilon\left(H_2\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\beta_1\right)\right]-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon\right)}\alpha_t T_2,\quad\left(1\rightleftarrows 2\right)$$

$$M_{12}=\frac{2Eh^3}{3(1+\upsilon)}\left(H_1\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\beta_1+H_2\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_2}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\beta_2\right)-\frac{h\left(k_1-\operatorname{th}k_1\right)\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right)}{k_1}$$

$$M_{21}^{(0)}=\frac{Eh^3}{3(1+\upsilon)}\left(H_1\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\beta_1+H_2\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_2}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\beta_2\right)+\frac{h\left(k_1-\operatorname{th}k_1\right)\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right)}{k_1}$$

$$L_{12}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\left(H_1\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1\right)+\left(\gamma-\varepsilon\right)\left(H_2\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2\right)\right]\quad\left(1\rightleftarrows 2\right)$$

$$L_{11}=4h\gamma\left(H_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2\right)+\frac{h\ \operatorname{th}k_1}{k_1}\frac{\beta}{2\gamma+\beta}\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right)\quad\left(1\rightleftarrows 2\right)\tag{4.4}$$

здесь

$$\beta_1=h\Omega_2=-hH_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1},\qquad\beta_2=-h\Omega_1=-hH_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\tag{4.5}$$

Используя уравнения (4.3), (4.4), получим одно разрешающее уравнение для теории термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением:

$$D^*\nabla^2\nabla^2W=h\left(H_1\frac{\partial\left(p_1^{+}-p_1^{-}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(p_1^{+}-p_1^{-}\right)+H_2\frac{\partial\left(p_2^{+}-p_2^{-}\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(p_2^{+}-p_2^{-}\right)\right)+$$

$$+H_1\frac{\partial\left(m_2^{+}+m_2^{-}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(m_2^{+}+m_2^{-}\right)-H_2\frac{\partial\left(m_1^{+}+m_1^{-}\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(m_1^{+}+m_1^{-}\right)+$$

$$+\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right)+\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon\right)}\alpha_t\nabla^2T_2\tag{4.6}$$

где D^* – жесткость на изгиб микрополярных пластин со стесненным вращением:

$$D^*=D+2h(\gamma+\varepsilon),\qquad D=\frac{2Eh^3}{3(1-x^2)}\tag{4.7}$$

где D –классическая жесткость пластинки.

Отметим, что без учета температурной части задачи, по методу гипотез разрешающее уравнение (4.6) впервые получено в работе [15].

Разрешающее уравнение термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением имеет вид уравнения Софи Жермен-Лагранжа по классической теории для термоупругого изгиба пластин. Главная разница здесь в жесткостях.

Для величин μ_{33}, μ_{3n} $(n=1,2)$ получим следующие граничные задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{\mu}_{33}}{\partial \zeta^2} - k_1^2 \overline{\mu}_{33} = 0 \\ \overline{\mu}_{33}(\zeta = \pm 1) = \pm \tilde{m}_3^{\pm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{\mu}_{3n}}{\partial \zeta^2} - k_2^2 \overline{\mu}_{3n} = \zeta \overset{1}{F}_n(\xi,\eta) + \operatorname{sh} k_1 \zeta \cdot \overset{2}{F}_n(\xi,\eta) \\ \overline{\mu}_{3n}(\zeta = \pm 1) = \pm m_n^{\pm} \end{cases} \tag{4.8}$$

Построив соответствующий термоупругий микрополярный погранслой и изучив задачу сращивания внутренней задачи и погранслоев, получим граничные условия для двумерных уравнений термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением:

1) для загруженного края

$$\left.\left(N_{13} + H_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(M_{12} - L_{11})\right)\right|_{\Gamma} = \int_{-h}^{h} \left[p_3^* + H_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\alpha_3 p_2^* - m_1^*\right)\right] d\alpha_3 \tag{4.9}$$

$$\left.\left(L_{12} + M_{11}\right)\right|_{\Gamma} = \int_{-h}^{h} \left(\alpha_3 p_1^* + m_2^*\right) d\alpha_3$$

2) для свободно опертого края

$$\left. w \right|_{\Gamma} = 0, \qquad \left.\left(L_{12} + M_{11}\right)\right|_{\Gamma} = \int_{-h}^{h} (\alpha_3 p_1^* + m_2^*) d\alpha_3 \tag{4.10}$$

3) для жестко- защемленного края

$$\left. W \right|_{\Gamma} = 0, \qquad \left. H_1 \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \right|_{\Gamma} = 0 \tag{4.11}$$

Система уравнений (4.3), (4.4) и граничные условия (4.9)–(4.11) представляют собой математическую модель термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением. Эта система является системой четвертого порядка (как в классической теории термоупругости пластин) с двумя граничными условиями на каждом боковом контуре срединной плоскости пластинки.

Отметим, что граничные условия (4.9) впервые по методу гипотез получены в работе [16].

5. Двумерные уравнения термоупругости микрополярных пластин “с малой сдвиговой жесткостью”.

В начале работы было сказано, что в зависимости от значений безразмерных упругих констант материала пластинки (2.3) возможно построение разных асимптотик краевой задачи (1.1)-(1.6) НТТУ с НППВ. В предыдущих двух пунктах построены и изучены две разные асимптотики такого рода. На основе этих асимптотик построены две различные теории термоупругости микрополярных пластин со свободным вращением и со стесненным вращением. Построены также соответствующие теории погранслоев.

В зависимости от значений безразмерных упругих констант (2.3) возможно построение третьей, отличной от предыдущих, асимптотики. Для величин (2.3) примем представления:

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim \delta^2\bar{\alpha}, \qquad \frac{\beta}{a^2\mu} \sim 1, \qquad \frac{\gamma}{a^2\mu} \sim 1, \qquad \frac{\varepsilon}{a^2\mu} \sim 1 \tag{5.1}$$

Будем рассматривать задачу изгиба. В разложениях (2.4) для q получим:

$$\begin{cases} q = 0 \text{ для } \bar{\sigma}_{33}, \quad q = 1 \text{ для } \bar{\sigma}_{3i},\ \bar{\sigma}_{i3}\ (i = 1,\ 2),\ \bar{\mu}_{33} \\ q = 2 \text{ для } \bar{\sigma}_{mn}\ (mn: 11, 22, 12, 21),\ \bar{u}_i\ (i = 1,\ 2),\ \bar{\mu}_{3i},\ \bar{\mu}_{i3}\ (i = 1,\ 2),\ \omega_3,\ \bar{\Theta} \\ q = 3 \text{ для } \bar{u}_3,\ \omega_i\ (i = 1,\ 2),\ \bar{\mu}_{mn}\ (mn:\ 11, 22, 12, 21) \end{cases} \tag{5.2}$$

В исходном асимптотическом приближении получены следующие качественные результаты: перемещение u_3 и независимые повороты ω_1, ω_2 постоянны по толщине пластинки, а перемещения u_1, u_2 и независимый поворот ω_3 – линейные функции от ζ; силовые напряжения $\sigma_{kl}\ (kl: 13, 23, 32, 31)$ и моментные напряжения μ_{mn}, μ_{33} $(mn: 11, 12, 21, 22)$ постоянны по толщине пластинки, а силовые напряжения σ_{mn}, σ_{33} и моментные напряжения μ_{kl} – линейные функции от ζ.

Отметим, что при асимптотике (5.1), (5.2) в уравнениях термоупругости микрополярных пластин величины “чисто моментного” происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений, для которой получены отдельные граничные условия. Для “силовой” части задачи получим своеобразную сдвиговую теорию пластин, в которой углы поворота обусловлены “чисто моментной ” частью задачи.

Сформулируем эти отдельные группы уравнений.

Уравнения термоупругости “чисто моментной” части задачи изгиба пластин:

уравнения равновесия

$$\begin{cases} H_1\dfrac{\partial L_{11}}{\partial\alpha_1} + H_2\dfrac{\partial L_{21}}{\partial\alpha_2} - \dfrac{H_1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}(L_{11} - L_{22}) - \dfrac{H_2}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}(L_{12} + L_{21}) = -(m_1^+ + m_1^-) \\ H_1\dfrac{\partial L_{12}}{\partial\alpha_1} + H_2\dfrac{\partial L_{22}}{\partial\alpha_2} - \dfrac{H_1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}(L_{12} + L_{21}) - \dfrac{H_2}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}(L_{22} - L_{11}) = -(m_2^+ + m_2^-) \end{cases} \tag{5.3}$$

соотношения термоупругости

$$L_{12} = 2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{12} + (\gamma-\varepsilon)k_{21}\right]\ \left(1 \rightleftarrows 2\right);\ L_{11} = 2h\left[\frac{4\gamma(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}k_{11} + \frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}k_{22}\right]\ \left(1 \rightleftarrows 2\right) \tag{5.4}$$

геометрические соотношения

$$k_{11} = H_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1} - \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2, \qquad k_{12} = H_1\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1 \quad \left(1 \rightleftarrows 2\right) \tag{5.5}$$

Здесь $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ – компоненты изгиба-кручения точек срединной плоскости пластинки, Ω_1, Ω_2 – независимые повороты вокруг осей α_1 и α_2 точек срединной плоскости пластинки.

Уравнения термоупругости “чисто силовой” части задачи изгиба пластин:

уравнения равновесия

$$H_1\frac{\partial N_{13}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial N_{23}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}N_{13}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}N_{23}=-\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right)$$

$$N_{31}-\left[H_1\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial H}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(M_{11}-M_{22}\right)-2\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}H\right]=h\left(p_1^{+}-p_1^{-}\right) \quad (5.6)$$

$$N_{32}-\left[H_1\frac{\partial H}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial M_{22}}{\partial\alpha_2}-2\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}H-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(M_{22}-M_{11}\right)\right]=h\left(p_2^{+}-p_2^{-}\right)$$

физические соотношения

$$N_{13}=2h\cdot 4б\Gamma_{13}+N_{31}\,,\quad N_{23}=2h\cdot 4б\Gamma_{23}+N_{32}$$

$$M_{11}=-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon^2\right)}\left(K_{11}-\upsilon K_{22}\right)-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon\right)}\alpha_t T_2$$

$$M_{22}=-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon^2\right)}\left(K_{22}-\upsilon K_{11}\right)-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon\right)}\alpha_t T_2 \quad (5.7)$$

$$M_{12}=M_{21}=H=\frac{4\mu h^2}{3}K_{12}$$

здесь $T_2=\left(T^{+}-T^{-}\right)/2$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\Omega_2,\quad \Gamma_{23}=H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}-\Omega_1,\quad K_{11}=h\left[H_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\right)-\frac{H_2^2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\right]$$

$$K_{22}=h\left[H_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\right)-\frac{H_1^2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\right] \quad (5.8)$$

$$K_{12}=-h\left[H_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\right)+H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\right)+H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\right)\right]$$

Здесь, W – перемещение по оси α_3 (прогиб пластинки), а Γ_{13}, Γ_{23} – сдвиговые деформации, K_{11}, K_{22}, K_{12} – изгибно-крутильные деформации в точках срединной плоскости пластинки.

Система (5.6)-(5.8) “силовой” двумерной части задачи изгиба пластин может привести к одному разрешающему уравнению относительно перемещения $W\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$:

$$D\nabla^2\nabla^2W+8h\alpha\left[\left(H_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\right)\left(H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\Omega_2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(H_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\right)\left(H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}-\Omega_1\right)\right]=$$

$$=-\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right)+h\left(H_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\right)\left(p_1^{+}-p_1^{-}\right)+$$

$$+\left(H_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\right)\left(p_2^+-p_2^-\right)+\frac{2Eh^2}{3(1-\upsilon)}\alpha_t\nabla^2 T_2 \qquad (5.9)$$

Если коэффициент $8h\alpha$ назовем сдвиговой-моментной жесткостью, имея ввиду, что коэффициент α – это тоже модуль сдвига как и классический модуль μ, то представленную теорию с учетом (5.1) можем трактовать как теорию термоупругости микрополярных пластин с “малой сдвиговой жесткостью”.

Отдельно, для случая (5.1) строятся микрополярные термоупругие погранслои и изучаются свойства погранслойных решений. Далее изучается взаимодействие внутренней задачи и погранслоев. На основе этих исследований получим граничные условия двумерных уравнений (5.3)-(5.5) и (5.6)-(5.8):

1) для загруженного края:

$$L_{11}\Big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}m_1^*d\alpha_3,\qquad L_{12}\Big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}m_2^*d\alpha_3$$

$$\left(N_{13}+H_2\frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha_2}\right)\Bigg|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3+\int_{-h}^{h}p_2^*\alpha_3 d\alpha_3,\qquad M_{11}\Big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_1^*\alpha_3 d\alpha_3 \qquad (5.10)$$

2) для свободно опертого края

$$W\Big|_\Gamma=0,\quad M_{11}\Big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_1^*\alpha_3 d\alpha_3;\quad L_{11}\Big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}m_1^*dx_3,\quad L_{12}\Big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}m_2^*dx_3. \qquad (5.11)$$

3) для жестко- защемленного края:

$$W\Big|_\Gamma=0,\quad H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\Big|_\Gamma=0,\quad \Omega_1\Big|_\Gamma=0,\quad \Omega_2\Big|_\Gamma=0 \qquad (5.12)$$

Система уравнений (5.3)-(5.8) и граничные условия (5.10)-(5.12) представляют собой математическую модель термоупругого изгиба микрополярных пластин с “малой сдвиговой жесткостью”.

Сформулированы также погранслойные граничные задачи, т.е. дифференциальные уравнения и соответствующие граничные условия погранслойных задач.

Заключение. Представлен асимптотический подход построения двумерных математических моделей термоупругости микрополярных тонких пластин на основе НТТУ с НППВ. Существенен тот факт, что конкретная математическая модель термоупругости микрополярных тонких пластин зависит от значений безразмерных физических констант микрополярного тела пластинки, в которых присутствует масштабный фактор. Следовательно, построенные математические модели термоупругости микрополярных тонких пластин возможно найдут применение при изучении соответствующих задач структурной механики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Моментные напряжения в термоупругости. //Прикл. Механика. 1967. Т. III. Вып. 1. С. 3-17.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P. 383.
3. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214с.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266с.
5. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
6. Амбарцумян С. А. Задача несимметричной термоупругости весьма пологой оболочки // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №3. С. 20-33.
7. Green A. E. Boundary-layer equations in the linear theory of elastic shells// Proc. Roy. Soc., Ser. A. 1962. Vol. 269. №1339. P. 39-49.
8. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I Всесоюзн. Школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд . Тбилисск. Ун-та, 1975.С. 51-149.
9. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
10. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек М: Наука, 1997. 414 с.
11. Саркисян С. О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 260с.
12. Sargsyan S.H. On some Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol. 16./Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Springer. 2004. P. 201-210.
13. Саркисян С. О. Граничные задачи теории пластин в несимметричной теории упругости // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1.
14. Sargsyan S. H., Vardanyan S. A. Asymptotic Theory of Thermoelastic Micropole Thin Plates// Proceedings of the 5-th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. 8-11 June 2003, Blacksburg. V. A. Vol. 1. MA5-3-1 – MA5-3-4.
15. Геворкян Г.А. Об изгибе пластин с учетом моментных напряжений// Прикл. Механика. 1966. Т.2. Вып. 10. С. 36-43.
16. Хоффмек О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений // Прикл. Механика. Тр. Америк. Об-ва инж.- механиков. Серия Е. 1964. Т. 31, №4. С. 149-150.

Гюмрийский гос. Педагогический институт им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию 16.04.2007