ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

# К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Акопян С.А., Мовсисян Л.А.

**Ключевые слова:** вязкоупругость, волна, частота, цилиндрическая оболочка, граничная задача.
**Keywords:** viscoelastic, wave, frequence, cylindrical shell, boundary problem.

**S.A. Hakobyan, L.A. Movsisyan**
**About Propagation of Viscoelastic Wave in Cylindrical Shell and Linewrice Problems**

Propagation of wave in nonmoment theory of tipical viscoelastic materials of cylindrical shell is considered. Boundary problem when in end of semi infinite cylinder acts load is investigated for different cases. Exact and asymptotic solutions are given.

**Ս.Ա. Հակոբյան, Լ.Ա. Մովսիսյան**
**Առաձգամածուցիկ գլանային թաղանթում ալիքների տարածման մասին և նման խնդիրներ**

Անմոմենտ տեսությամբ ուսումնասիրվում է ալիքների տարածման խնդիրը գլանային թաղանթում, երբ նյութը տիպիկ առաձգամածուցիկ է: Դիտարկվում է նաև եզրային խնդիր, երբ կիսաանվերջ գլանի եզրում կիրառվում է հաստատուն ճիգ: Տրվում է ճշգրիտ և ասիմպտոտիկ մոտեցման եղանակներ: Ձողի համար դիտարկվել է նաև նույն խնդիրը, երբ նրա նյութը Կելվինի-Ֆոխտի տիպի է:

Задача распространения волн в цилиндрической оболочке в безмоментной постановке изучена для вязкоупругого типичного материала. Для такого же полубесконечного цилиндра рассмотрена задача, когда на конце мгновенно прикладывается усилие. Предлагается приближенный метод нахождения усилий. Для стержней приводится решение аналогичной задачи, когда материал – типа Кельвина-Фойгта.

**1**. Уравнения движений оболочки (безмоментное состояние) имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad,\quad T_2=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Предполагается, что материал оболочки обладает вязкоупругим свойством по Кельвину-Максвеллу [1]

$$\sigma=E\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon,\quad \Gamma^*\varepsilon=\frac{E-H}{En}\int_0^t e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)}\varepsilon(\tau)d\tau$$

Если перейти к безразмерным координатам

$$\xi=\frac{x}{R},\qquad \tau=\frac{at}{R}\quad,\qquad a^2=\frac{E}{\rho\left(1-v^2\right)} \tag{1.2}$$

то уравнения движений в перемещениях будут

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-v\frac{\partial w}{\partial \xi}=\left(1+K^*\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\\ v\frac{\partial u}{\partial \xi}-w=\left(1+K^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2},\ K^*-\Gamma^*=K^*\Gamma^*\end{gathered} \tag{1.3}$$

Будем искать решение (1.3) в виде

$$\left(u,w\right)=\left(u_0\,,w_0\right)\exp i\omega\left(\tau-q\xi\right) \tag{1.4}$$

В (1.4) $q=q_1+iq_2$ – комплексное число, обратная величина $q_1$ – безразмерная фазовая скорость, а $q_2$ характеризует затухание волн, $\omega$ – безразмерная частота – произведение истинной частоты на $R/a$.

Подставляя (1.4) в (1.3) для определения $q_i$, получим

$$q_1=\left(\frac{B+\sqrt{B^2+C^2}}{2A}\right)^{1/2},\quad q_2=\left(\frac{-B+\sqrt{B^2+C^2}}{2A}\right)^{1/2} \tag{1.5}$$

Здесь

$$A=F^2+K_s^2,\ B=\left[\left(1+K_c\right)D+K_s^2\right]F-K_s^2\left[D-\left(1+K_c\right)\right]$$

$$C=-K_s\left\{\left[D-\left(1+K_c\right)\right]F+\left(1+K_c\right)\mathbf{D}+K_s^2\right\},\ F=D-\frac{v^2}{\omega^2}$$

$$D=\frac{1}{\omega^2}-\left(1+K_c\right),\ K_c=\frac{E-H}{H}\frac{1}{1+\omega^2\beta^2},\quad K_s=\omega\beta K_c\ ,\ \beta=\frac{Ena}{RH} \tag{1.6}$$

В случае упругости $\left(K_c=K_s=0\right)$ фазовая скорость есть

$$C=\frac{a}{q_1}=a\sqrt{\frac{1-v^2-\omega^2}{1-\omega^2}} \tag{1.7}$$

При больших $\omega$ волна распространяется почти со скоростью (1.7), но с затуханием

$$q_2\approx-\frac{1}{2}K_s \tag{1.8}$$

Для малых частот

$$C=a_\infty\sqrt{\frac{1-v^2-\beta\omega^2}{1-\beta\omega^2}}\quad ,a_\infty=a\sqrt{\frac{H}{E}}\quad ,\ \beta=\frac{E}{H} \tag{1.9}$$

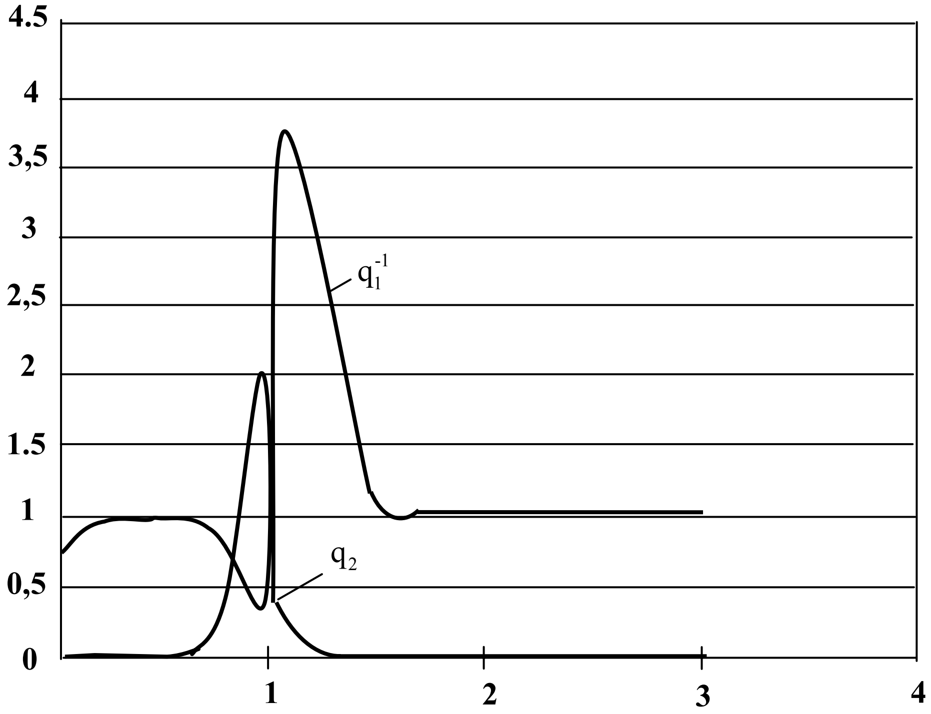
На фиг.1 приведены типичные кривые $q^{-1}$ и $q_2$ в зависимости от $\omega$ для $E=2H$ и $\beta=100$.

**2.** Рассмотрим теперь граничную задачу. Пусть в момент $\tau=0$ на конце $\xi=0$ полубесконечной оболочки прикладывается сжимающее осевое усилие и удерживается постоянным

$$T_1=\frac{Eh}{R\left(1-v^2\right)}\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-w\right)=-T_0\ \text{при}\ \xi=0 \tag{2.1}$$

Для упругой задачи такая задача эквивалентна случаю, когда один конец цилиндра движется в сторону второго с постоянной скоростью [4]. Однако для вязкоупругой задачи это не так и в п.4 различие будет показано на одном примере.

Начальные условия задачи пусть будут нулевыми. Тогда подвергая уравнения (1.3) с условием (2.1) и учитывая ограниченность осевого и




Фиг.1

кольцевого усилий на бесконечности, для последних будем иметь

$$\overline{T}_1 = -\frac{T_0}{p} e^{-\lambda\xi} \quad , \qquad \overline{T}_2 = -\frac{\nu T_0}{p} \frac{p^2(1+K(p))-1}{p^2(1+K(p))-\nu^2} \overline{e}^{\lambda\xi}$$

$$\lambda = p(1+K(p))^{1/2} \sqrt{\frac{1+p^2(1+K(p))}{1-\nu^2+p^2(1+K(p))}} \tag{2.2}$$

$$K(p) = G\frac{1}{p+\alpha}, \quad G = \frac{E-H}{H}\alpha, \quad \alpha = \frac{HR}{naE}$$

В общем виде произвести обратные преобразования от (2.2) не удается, сверх того, даже для упругого случая интегралы эти вычислялись методом стационарной фазы [4].

Для малых времен (больших $p$) для усилий имеем

$$T_1 = -T_0 e^{-\frac{G}{2}\xi} H(\tau-\xi), \quad T_2 = -\nu T_0 e^{-\frac{G}{2}\xi} H(\tau-\xi) \tag{2.3}$$

где $H(\tau-\xi)$ – единичная функция, т.е. имеется стержневое приближение.

В работе [5] решение подобной задачи предлагалось строить в виде ряда по малому параметру–коэффициенту Пуассона $\nu$.

Так что здесь также приходится довольствоваться таким способом. Но дело в том, что даже в такой постановке, когда первый член разложения соответствует стержневому приближению, опять-таки произвести обратное преобразование не из приятных занятий. Сравнительно легко достигается цель для среды Максвелла $\alpha = 0$. Тогда усилие определится формулой

$$T_1(\xi,\tau) = -\frac{T_0}{2\pi}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{-p\xi\sqrt{1+\frac{G}{P}}} \quad \frac{e^{p\xi}}{p}dp \tag{2.4}$$

Подынтегральная функция имеет точки ветвления в $p = 0$ и $p = -G$. На плоскости $p$ проводится разрез между этими точками и показывается, что вычисление интеграла (2.4) сводится к интегрированию подынтегральной функции по верхнему и нижнему берегам этого разреза и в окончательном виде

$$T_1^0(\xi,\tau) = -T_0\left[1 - \frac{1}{\pi}\int_0^G \frac{1}{z}e^{-\tau z}\sin\xi\sqrt{z(G-z)}dz\right], \quad \tau > \xi \tag{2.5}$$

Приведем некоторые формулы обращения, которые, помимо того, что они необходимы для определения $T_1(\xi,\tau)$ $(\alpha \neq 0)$, сами собой представляют определенный интерес и возможно понадобятся при решении аналогичных задач.

Вот некоторые из этих формул:

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\gamma\sqrt{1+p}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\left\{e^{-\frac{\gamma^2}{4\tau}} - \gamma\int_\gamma^\infty \frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau}}}{\sqrt{z^2-\gamma^2}}J_1\left(\sqrt{z^2-\gamma^2}\right)dz\right\}$$

$$\frac{1}{p\sqrt{p}}\Phi\left(\frac{1}{p}\right) \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{\tau z}}{\sqrt{\pi z}}\cdot\varphi(z,\tau)dz$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\alpha\xi\sqrt{1+Gp}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\left\{e^{-\frac{G\alpha^2\xi^2}{4\tau}} - \right.$$

$$\left. -\xi\alpha\int_{\alpha\xi}^\infty \frac{e^{-\frac{Gz^2}{4\tau}}}{\sqrt{z^2-\alpha^2\xi^2}}J_1\left(\sqrt{z^2-\alpha^2\xi^2}\right)dz\right\} = \varphi(\xi,\tau) \tag{2.6}$$

Здесь $J_1$ – функция Бесселя, и формулы эти получены на основании общих теорем операционного исчисления и табличных данных [6-8].

На основании этих формул показывается, что определение $T_1$ сводится к решению уравнения Вольтерра первого рода –

$$e^{-\alpha\tau}T_1^0 = \int_\xi^\tau T_1(\xi,\theta)\varphi'_\alpha(\xi,\tau-\theta)d\theta \tag{2.7}$$

где
$$\varphi_\alpha(\xi,\tau) = e^{-\alpha\tau}\int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{\tau z}}{\sqrt{\pi z}}\varphi(\xi,z)dz$$

**3.** Итак, разложим преобразование перемещения в виде рядов [5]

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + v^2\bar{u}_2 + \ldots, \qquad \bar{w} = v\bar{w}_1 + \ldots \tag{3.1}$$

Если в разложениях довольствоваться членами до $v^2$, то усилия в таком приближении будут

$$\overline{T}_1 = \frac{d\overline{u}_0}{d\xi}\ , \quad \overline{T}_2 = \overline{E}\nu\left(\frac{d\overline{u}_0}{d\xi} - \overline{w}_1\right), \quad \overline{E} = \frac{Eh}{R^2}\left(1-\Gamma\left(p\right)\right) \tag{3.2}$$

где $\overline{u}_0$ и $\overline{w}_1$ должны быть определены из

$$\frac{d^2\overline{u}_0}{d\xi^2} = p^2\left(1+\frac{G}{p+\alpha}\right)\overline{u}_0$$

$$\left[1+p^2\left(1+\frac{G}{p+\alpha}\right)\right]\overline{w}_1 = \frac{d\overline{u}_0}{d\xi} \tag{3.3}$$

Дело в том, что, как отмечалось выше, да и в такой форме определить $\overline{u}_0$ и $\overline{w}_1$ и соответственно усилие и иметь дело с выражениями (2.6), (2.7) не только занятие не из приятных, но и абсолютно необозримых. Надо учесть, что уже в (3.2) и (3.3) скорость упругой волны уже $a_0 = a\left(v=0\right)$.

В системе (3.3) есть еще малый параметр $\alpha$ (2.2) , т.е

$$\varepsilon = \alpha = \frac{HR}{Ena_0}\ \ , G = k\varepsilon \tag{3.4}$$

Для стержня в качестве $R$ можно брать какую-нибудь характерную длину.

Граничное условие (2.1), как это принято и для стержня в [1, с.292], строго говоря, корректно только для небольших времен и более естественно предполагать, что усилие действует в некотором промежутке времени $0 \le \tau \le \tau_0$. Тогда условие относительно $\overline{u}_0$ будет иметь вид

$$\frac{d\overline{u}_0}{d\xi} = -\frac{T_0}{\overline{E}p}\left(1-e^{-p\tau_0}\right) \text{ при } \xi = 0 \tag{3.5}$$

В виде ряда по $\varepsilon$ , разлагая $\overline{u}_0$ и $p$

$$\overline{u}_0 = \upsilon_0 + \varepsilon\upsilon_1 + \ldots, \qquad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots \tag{3.6}$$

Из (3.3) получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\upsilon_0}{d\xi^2} &= p_0^2\upsilon_0 \\ \frac{d^2\upsilon_1}{d\xi^2} &= p_0^2\upsilon_1 + \left(2p_1+k\right)p_0\upsilon_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Систему (3.7) можно решить последовательно, но, как видно из второго уравнения, в правой части присутствует секулярный член и для устранения «резонанса» должны требовать

$$p_1 = -\frac{k}{2} \tag{3.8}$$

откуда и определяется неизвестный параметр $p_1$. Условие (3.5), также представляя в виде ряда по $\varepsilon$ , окончательно для $T_1$ и $T_2$ получим:

$$-\frac{T_1}{T_0}=\left[1+\frac{\varepsilon k}{2}(\tau-\xi)\right]H(\tau-\xi)-$$

$$-\left[1+\frac{\varepsilon k}{2}(\tau-\tau_0-\xi)\right]H(\tau-\tau_0-\xi)-\frac{\varepsilon k}{2}\tau_0 H\ (\tau-\tau_0-\xi)$$

$$-\frac{T_0}{vT_0}=-\frac{T_1}{T_0}+\cos\left[(\tau-\xi)-\cos(\tau-\tau_0-\xi)+\frac{\varepsilon k}{4}\{\sin(\tau-\xi)-\right.$$

$$-\sin(\tau-\tau_0-\xi)-(\tau-\xi)\cos(\tau-\xi)+(\tau-\tau_0-\xi)\cos(\tau-\tau_0-\xi)+$$

$$+2\tau_0\left[\cos(\tau-\tau_0-\xi)-1\right]+2\left[\cos(\tau-\xi)-\cos(\tau-\tau_0-\xi)\right]\} \tag{3.9}$$

В последней формуле, хотя не везде указано это, понятно, что аргументы функций должны удовлетворять условию $\tau-\tau_0<\xi<\tau$ .

**4**. Здесь рассмотрим задачу для стержня, когда материал типа Кельвина-Фойгта

$$\sigma=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}+n\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right) \tag{4.1}$$

В безразмерных координатах преобразованные перемещения и напряжения определятся

$$\bar{u}=Ce^{-pN\xi}\ ,\ \ \bar{\sigma}=-CpN^{-1}e^{-pN\xi}\ ,\ \ N=(1+np)^{-1/2} \tag{4.2}$$

Граничное условие $\xi=0,\ \ \bar{\sigma}=-\dfrac{\sigma_0}{p}$ дает

$$\bar{u}=-\frac{\sigma_0}{p^2}Ne^{-pN\xi}\ \ ,\ \ \bar{\sigma}=-\frac{\sigma_0}{p}e^{-pN\xi} \tag{4.3}$$

Оригиналы функций находятся после кропотливых преобразований на основании известных формул [6-9] и в окончательном виде имеют вид:

$$u(\xi,r)=\frac{2n\sigma_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\xi/n}^{\infty}I_0\left(2\sqrt{\frac{\xi}{n}\left(z-\frac{\xi}{n}\right)}\right)\left\{\int_0^{\sqrt{\frac{\tau}{n}}}\exp\left[-\left(y^2-\frac{z^2}{4y^2}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\tau}{n}-y^2}\right)+\int_0^{\frac{\tau}{n}-y^2}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\eta}\right)d\eta\right]dy\right\}dz$$

$$-\frac{\sigma}{\sigma_0}=\sqrt{\frac{n}{\pi\tau}}e^{-\frac{\tau}{n}}\int_0^{\infty}I_0\left(2\sqrt{\frac{\xi z}{n}}\right)\exp\left[-\frac{n}{\tau}\left(z+\frac{\xi}{n}\right)^2\right]dz+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}I_0\left(2\sqrt{\frac{\xi y}{n}}\right)dy\int_0^{\sqrt{\frac{\tau}{n}}}\exp\left\{-\frac{1}{4z^2}\left[4z^4\left(y+\frac{\xi}{n}\right)^2\right]\right\}dz \tag{4.4}$$

Последние формулы приведены скорее всего для того, чтобы показать, насколько они неудобные для практических целей и разумнее всего пользоваться асимптотическими методами. В частности, для малых времен для напряжения имеем выражение

$$\sigma(\xi,\tau) = -\sigma_0\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\pi\tau}}\right)\right] \tag{4.5}$$

Как известно, формулы (4.4) верны для $\xi < \tau$. Если нагрузка действует в интервале $0 \le \tau \le \tau_0$, то к (4.4) добавляются соответствующие слагаемые, где вместо $\tau$ должны фигурировать $\tau - \tau_0$, как в предыдущем пункте.

Как уже отмечалось, в п.2 решения упругих задач, когда напряжение приложенно на конце, адекватны задаче, когда край с постоянной скоростью движется в сторону другого при соответствующем подборе постоянных. Для вязкоупругого случая это не имеет места. Покажем это для рассматриваемого случая. Когда конец стержня движется в сторону второго со скоростью $c-u=-\frac{cR}{a}\tau$ при $\xi=0$, то при $c=\frac{a_0\sigma_0}{E}$ упругая задача эквивалентна предыдущей. Для данной задачи у нас $\overline{\sigma}$ определится как

$$\overline{\sigma} = -E\frac{c}{a_0}\,\frac{\sqrt{1+np}}{p}e^{-\frac{p\xi}{\sqrt{1+np}}} \tag{4.6}$$

Для малых времен оригинал функции (4.6) есть

$$\sigma(\xi\tau) = -E\frac{c}{a_0}\sqrt{\frac{n}{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\pi\tau}\right) \tag{4.7}$$

Как видно из (4.5) и (4.7), выражения для напряжения для обеих задач существенно отличаются.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
2. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах. М.: Изд. ИЛ, 1961. 104 с.
3. Мовсисян Л.А. Устойчивость цилиндрических оболочек при быстрых нагружениях. //Докл.Арм.ССР. 1972. Т. 55. №. С.211-218.
4. Берковиц Г.М. Продольный удар полубесконечной цилиндрической оболочки. // ПМ (тр. АОИМ). Сер. Е. 1963. Т. 30. № 3. С.31-39.
5. Мовсисян Л.А. О потере устойчивости цилиндрических оболочек при продольном ударе. //Изв. АН Арм.ССР. Сер.физ.-мат. наук. 1964. Т.17. №6. С.57-64.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: ГИФМЛ, 1958. 678 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблица интегральных преобразований. Т.I. М.: Наука, 1969. 343 с.
8. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 831 с.



Институт математики,
Институт механики НАН Армении



Поступила в редакцию
2.05.2006