ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ НИЖНИМИ СЛОЯМИ

Агаловян Л. А., Погосян А. М.

Ключевые слова: ортотропная пластинка, асимптотический метод, трехслойный, вынужденные колебания, жестко закрепленный, резонанс, вектор перемещения.
Keywords: orthotropic plate, asymptotic method, three-layer, forced vibrations, rigidly fixed, resonance, displacement vector.

Լ. Ա. Աղալովյան, Հ. Մ. Պողոսյան
Եռաշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումերը ստորին շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի առկայության դեպքում

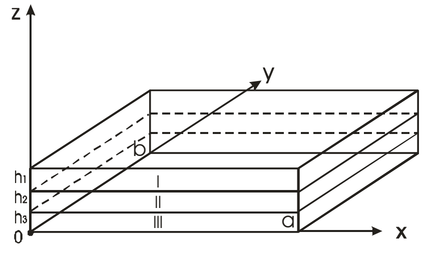
Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ ստորին շերտերի միջև առկա է ոչ լրիվ կոնտակտ, իսկ վերին շերտերի միջև՝ լրիվ կոնտակտ: Սալի ստորին մակերևույթին հաղորդված են արտաքին դինամիկ գրգռումներ, իսկ վերին մակերևույթը կոշտ ամրակցված է: Որոշված է լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկան, կառուցված է իտերացիոն պրոցես անհայտ մեծությունները որոշելու համար: Ստացված է խնդրի ընդհանուր ասիմպտոտիկական լուծումը, մասնավոր դեպքում արտածված է փակ լուծում: Նշված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները:

L. A. Aghalovyan, H. M. Poghosyan
The forced vibrations of three-layer orthotropic plate at incomplete contact between bottom layers

The three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on forced vibration of orthotropic plate at incomplete contact between bottom layers and at full contact between the top layers is solved by the asymptotic method. The bottom obverse surface is subject to external dynamic influences, and top - is rigidly fixed. The common asymptotic solution of the problem is found. The closed solution for particular type of problems is found. It is known, that constant tangential displacements acting to the third layer do not influence in stress-strain state of the first and second layer. The resonance arising conditions are established.

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о вынужденных колебаниях трехслойной ортотропной пластинки при неполном контакте между нижними и при полном контакте между верхними слоями. Нижняя лицевая поверхность подвержена внешним динамическим воздействиям, а верхняя жестко закреплена. Найдена асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, построен итерационный процесс для определения искомых величин. Найдено общее асимптотическое решение, для частного типа задач получено замкнутое решение. Установлены условия возникновения резонанса.

1. Рассматривается задача о вынужденных колебаниях трехслойной ортотропной пластинки $D=\{(x,y,z): x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ 0\le z\le h,$ $h=h_1+h_2+h_3,\quad h<<l=\min(a,b)\}$ при неполном контакте между третьим и вторым и полном контакте между первым и вторым слоями (фиг. 1).



Фиг.1

Требуется определить решение системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела для ортотропных сред:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^k}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}^k}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}^k}{\partial z}=\rho_k\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}\quad\left(x,y,z;u^k,v^k,w^k\right),\ k=I,II,III$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial x}=a_{11}^k\sigma_{xx}^k+a_{12}^k\sigma_{yy}^k+a_{13}^k\sigma_{zz}^k\quad\left(u^k,v^k,w^k;x,y,z;1,2,3\right)\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial y}+\frac{\partial v^k}{\partial x}=a_{66}^k\sigma_{xy}^k,\ \frac{\partial w^k}{\partial x}+\frac{\partial u^k}{\partial z}=a_{55}^k\sigma_{xz}^k,\ \frac{\partial w^k}{\partial y}+\frac{\partial v^k}{\partial z}=a_{44}^k\sigma_{yz}^k$$

при следующих граничных и контактных условиях:
граничные условия:

$$u^{III}\left(z\right)=u^-\left(x,y\right)\exp\left(i\Omega t\right),\ \left(u,v,w\right)\ \text{при}\ z=0\tag{1.2}$$

$$u^I\left(z\right)=v^I\left(z\right)=w^I\left(z\right)=0\ \text{при}\ z=h_1+h_2+h_3\tag{1.3}$$

где Ω – частота вынуждающего воздействия.

На поверхности контакта $z=h_3$ заданы условия неполного контакта между слоями:

$$w^{II}\left(h_3\right)=w^{III}\left(h_3\right),\ \sigma_{zz}^{II}\left(h_3\right)=\sigma_{zz}^{III}\left(h_3\right)$$

$$\sigma_{xz}^{II}\left(h_3\right)=\sigma_{xz}^{III}\left(h_3\right)=f_2\sigma_{zz}^{II}\left(h_3\right),\ \sigma_{yz}^{II}\left(h_3\right)=\sigma_{yz}^{III}\left(h_3\right)=f_3\sigma_{zz}^{II}\left(h_3\right)\tag{1.4}$$

на поверхности контакта $z=h_2+h_3$ заданы условия полного контакта между слоями:

$$u^I\left(h_2+h_3\right)=u^{II}\left(h_2+h_3\right),\ v^I\left(h_2+h_3\right)=v^{II}\left(h_2+h_3\right)$$

$$w^I\left(h_2+h_3\right)=w^{II}\left(h_2+h_3\right),\ \sigma_{zz}^I\left(h_2+h_3\right)=\sigma_{zz}^{II}\left(h_2+h_3\right)$$

$$\sigma_{xz}^I\left(h_2+h_3\right)=\sigma_{xz}^{II}\left(h_2+h_3\right),\ \sigma_{yz}^I\left(h_2+h_3\right)=\sigma_{yz}^{II}\left(h_2+h_3\right)\tag{1.5}$$

Для этого класса задач граничными условиями на боковой поверхности обусловлено появление динамического пограничного слоя. Эти условия не влияют на решение внутренней задачи [2,3], поэтому их конкретизировать не будем.

2. Решение системы уравнений (1.1) при граничных условиях (1.2), (1.3) и условиях контакта (1.4) , (1.5) будем искать в виде [2]:

$$\left(u^k,v^k,w^k\right)=\left(u_x^k\left(x,y,z\right),u_y^k\left(x,y,z\right),u_z^k\left(x,y,z\right)\right)\exp\left(i\Omega t\right)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^k\left(x,y,z,t\right)=\sigma_{jm}^k\left(x,y,z\right)\exp\left(i\Omega t\right)$$

$$\alpha,\beta=x,y,z\,;\ [\ j,m=1,2,3,\ k=I,II,III\tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в (1.1), затем перейдя к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\xi=\frac{x}{l},\ \eta=\frac{y}{l},\ \zeta=\frac{z}{h},\ \varepsilon=\frac{h}{l},\ U^k=\frac{u_x^k}{l},\ V^k=\frac{u_y^k}{l},\ W^k=\frac{u_z^k}{l}\tag{2.2}$$

получим сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему, решение которой будем искать в виде следующего асимптотического разложения:

$$\sigma_{ij}^{k} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(k,s)},\ U^{k} = \varepsilon^{s}U^{(k,s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right),\ \left(U,V,W\right) \tag{2.3}$$

$$i, j = 1,2,3,\ \ s = \overline{0,N},\ \ k = I,II,III$$

Обозначение $s = \overline{0,N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование по целочисленным значениям от числа 0 до *N*.

Подставив (2.3) в преобразованные уравнения (1.1), получим рекуррентную систему для определения $\sigma_{ij}^{(k,s)}$, $U^{(k,s)}$, $V^{(k,s)}$, $W^{(k,s)}$; $k = I,II$; $i, j = 1,\ 2,\ 3$.
Из этой системы следуют:

$$\sigma_{12}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{66}^{k}}\left[\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\xi} - \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right],\ \sigma_{13}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{55}^{k}}\left[\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial\zeta}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{44}^{k}}\left[\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\zeta}\right]$$

$$\sigma_{11}^{(k,s)} = -A_{23}^{k}\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta} + A_{22}^{k}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi} - A_{12}^{k}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta} \tag{2.4}$$

$$\sigma_{22}^{(k,s)} = -A_{13}^{k}\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta} - A_{12}^{k}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + A_{33}^{k}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{33}^{(k,s)} = A_{11}^{k}\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta} - A_{23}^{k}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi} - A_{13}^{k}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

где

$$A_{11}^{k} = \frac{a_{11}^{k}a_{22}^{k} - \left(a_{12}^{k}\right)^{2}}{\Delta^{k}},\ A_{22}^{k} = \frac{a_{22}^{k}a_{33}^{k} - \left(a_{23}^{k}\right)^{2}}{\Delta^{k}},\ A_{33}^{k} = \frac{a_{11}^{k}a_{33}^{k} - \left(a_{13}^{k}\right)^{2}}{\Delta^{k}}$$

$$A_{12}^{k} = \frac{a_{33}^{k}a_{12}^{k} - a_{13}^{k}a_{23}^{k}}{\Delta^{k}},\ A_{13}^{k} = \frac{a_{11}^{k}a_{23}^{k} - a_{12}^{k}a_{13}^{k}}{\Delta^{k}},\ A_{23}^{k} = \frac{a_{22}^{k}a_{13}^{k} - a_{12}^{k}a_{23}^{k}}{\Delta^{k}}$$

$$\Delta^{k} = a_{11}^{k}a_{22}^{k}a_{33}^{k} + 2\,a_{12}^{k}a_{13}^{k}a_{23}^{k} - a_{22}^{k}\left(a_{13}^{k}\right)^{2} - a_{11}^{k}\left(a_{23}^{k}\right)^{2} - a_{33}^{k}\left(a_{12}^{k}\right)^{2}$$

Функции $U^{(k,s)}$, $V^{(k,s)}$, $W^{(k,s)}$ определяются из уравнений:

$$\frac{\partial^{2}U^{(k,s)}}{\partial\zeta^{2}} + a_{55}^{k}\rho_{k}\,\Omega_{*}^{2}U^{(k,s)} = R_{U}^{(k,s)}$$

$$R_{U}^{(k,s)} = -\frac{\partial^{2}W^{(k,s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta} - a_{55}^{k}\left[\frac{\partial\sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$\frac{\partial^{2}V^{(k,s)}}{\partial\zeta^{2}} + a_{44}^{k}\rho_{k}\,\Omega_{*}^{2}V^{(k,s)} = R_{V}^{(k,s)} \tag{2.5}$$

$$R_{V}^{(k,s)} = -\frac{\partial^{2}W^{(k,s-1)}}{\partial\eta\,\partial\zeta} - a_{44}^{k}\left[\frac{\partial\sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$A_{11}^{k}\frac{\partial^2 W^{(k,s)}}{\partial\zeta^2}+\rho_k\,\Omega_*^{\;2}W^{(k,s-1)}=R_W^{(k,s)}$$

$$R_W^{(k,s)}=A_{23}^{k}\frac{\partial^2 U^{(k,s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta}+A_{13}^{k}\frac{\partial^2 V^{(k,s-1)}}{\partial\eta\,\partial\zeta}-\frac{\partial\sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial\sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

Решениями уравнений (2.5) будут:

$$U^{(k,s)}=U_0^{(k,s)}\left(\zeta,\eta,\zeta\right)+U_\tau^{(k,s)}\left(\zeta,\eta,\zeta\right),\ \left(U,V,W\right);\ k=I,II,III \tag{2.6}$$

где величины с индексом “0 – решения однородных, а с индексом “τ”– частные решения неоднородных уравнений.

$$U^{(k,s)}=C_1^{(k,s)}\left(\xi,\eta\right)\sin a_1^k\Omega_*\zeta+C_2^{(k,s)}\left(\xi,\eta\right)\cos a_1^k\Omega_*\zeta+U_\tau^{(k,s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right) \tag{2.7}$$

$$(a_1,a_2,a_3;\ C_1,C_2;C_3,C_4;C_5,C_6;\ \ U,V,W),\ k=I,II,III$$

$$a_1^k=\sqrt{a_{55}^k\rho_k}\ ,\ a_2^k=\sqrt{a_{44}^k\rho_k}\ ,\ a_3^k=\sqrt{\rho_k/A_{11}^k}$$

3. Удовлетворив граничным и контактным условиям (1.2)-(1.5), в результате получим три алгебраические системы относительно неизвестных функций $C_i^{(k,s)}(\xi,\eta)$; $i=1,2...6$, $k=I,II,III$:

$$C_6^{(III,s)}=W^{-s}-W_\tau^{(III,s)}\left(\zeta=0\right)$$

$$C_5^{(I,s)}\sin a_3^I\Omega_*\zeta_1+C_6^{(I,s)}\cos a_3^I\Omega_*\zeta_1=-W_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_1\right)$$

$$C_5^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3+C_6^{(II,s)}\left(\xi,\eta\right)\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3-C_5^{(III,s)}\sin a_3^{III}\Omega_*\zeta_3-$$
$$-C_6^{(III,s)}\left(\xi,\eta\right)\cos a_3^{III}\Omega_*\zeta_3=W_\tau^{(III,s)}\left(\zeta=\zeta_3\right)-W_\tau^{(II,s)}\left(\zeta=\zeta_3\right)$$

$$\sqrt{A_{11}^{III}\rho_{III}}\,\Omega_*\left[C_5^{(III,s)}\cos a_3^{III}\Omega_*\zeta_3-C_6^{(III,s)}\sin a_3^{III}\Omega_*\zeta_3\right]-\Omega_*\sqrt{A_{11}^{II}\rho_{II}}\,\times$$
$$\times\left[C_5^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3-C_6^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3\right]=b_{33}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{33}^{III,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$C_5^{(I,s)}\sin a_3^I\Omega_*\zeta_2+C_6^{(I,s)}\cos a_3^I\Omega_*\zeta_2-C_5^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_2-$$
$$-C_6^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_2=W_\tau^{(II,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right)-W_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right) \tag{3.1}$$

$$\sqrt{A_{11}^{I}\rho_{I}}\,\Omega_*\left[C_5^{(I,s)}\cos a_3^{I}\Omega_*\zeta_2-C_6^{(I,s)}\sin a_3^{I}\Omega_*\zeta_2\right]-\Omega_*\sqrt{A_{11}^{II}\rho_{II}}\,\times$$
$$\times\left[C_5^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_2-C_6^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_2\right]=b_{33}^{II,s}(\zeta=\zeta_2)-b_{33}^{I,s}(\zeta=\zeta_2)$$

$$C_2^{(III,s)}=U^{-s}-U_\tau^{(III,s)}\left(\zeta=0\right)$$

$$C_1^{(I,s)}\sin a_1^I\Omega_*\zeta_1+C_2^{(I,s)}\cos a_1^I\Omega_*\zeta_1=-U_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_1\right)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\left(C_1^{(II,s)}\cos a_1^{II}\Omega_*\zeta_3-C_2^{(II,s)}\sin a_1^{II}\Omega_*\zeta_3\right)-\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{55}^{III}}}\times$$
$$\times\left(C_1^{(III,s)}\cos a_1^{III}\Omega_*\zeta_3-C_2^{(III,s)}\sin a_1^{III}\Omega_*\zeta_3\right)=b_{13}^{III,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{13}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\left(C_1^{(II,s)}\cos a_1^{II}\Omega_*\zeta_3-C_2^{(II,s)}\sin a_1^{II}\Omega_*\zeta_3\right)-f_2\Omega_*\sqrt{A_{11}^{II}\rho_{II}}\times$$
$$\times\left(C_5^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3-C_6^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3\right)=f_2b_{33}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{13}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$C_1^{(I,s)}\sin a_1^{I}\Omega_*\zeta_2+C_2^{(I,s)}\cos a_1^{I}\Omega_*\zeta_2-C_1^{(II,s)}\sin a_1^{II}\Omega_*\zeta_2-$$
$$-C_2^{(II,s)}\cos a_1^{II}\Omega_*\zeta_2=U_\tau^{(II,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right)-U_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right) \qquad (3.2)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{I}}{a_{55}^{I}}}\left(C_1^{(I,s)}\cos a_1^{I}\Omega_*\zeta_2-C_2^{(I,s)}\sin a_1^{I}\Omega_*\zeta_2\right)-\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\times$$
$$\times\left(C_1^{(II,s)}\cos a_1^{II}\Omega_*\zeta_2-C_2^{(II,s)}\sin a_1^{II}\Omega_*\zeta_2\right)=b_{13}^{II,s}(\zeta=\zeta_2)-b_{13}^{I,s}(\zeta=\zeta_2)$$

$$C_4^{(III,s)}=V^{-s}-V_\tau^{(III,s)}\left(\zeta=0\right)$$

$$C_3^{(I,s)}\sin a_2^{I}\Omega_*\zeta_1+C_4^{(I,s)}\cos a_2^{I}\Omega_*\zeta_1=-V_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_1\right)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\left(C_3^{(II,s)}\cos a_2^{II}\Omega_*\zeta_3-C_4^{(II,s)}\sin a_2^{II}\Omega_*\zeta_3\right)-\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{44}^{III}}}\times$$
$$\times\left(C_3^{(III,s)}\cos a_2^{III}\Omega_*\zeta_3-C_4^{(III,s)}\sin a_2^{III}\Omega_*\zeta_3\right)=b_{23}^{III,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{23}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\left(C_3^{(II,s)}\cos a_2^{II}\Omega_*\zeta_3-C_4^{(II,s)}\sin a_2^{II}\Omega_*\zeta_3\right)-f_3\Omega_*\sqrt{A_{11}^{II}\rho_{II}}\times \qquad (3.3)$$
$$\times\left(C_5^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3-C_6^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3\right)=f_3b_{33}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{23}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$C_3^{(I,s)}\sin a_2^{I}\Omega_*\zeta_2+C_4^{(I,s)}\cos a_2^{I}\Omega_*\zeta_2-C_3^{(II,s)}\sin a_2^{II}\Omega_*\zeta_2-$$
$$-C_4^{(II,s)}\cos a_2^{II}\Omega_*\zeta_2=V_\tau^{(II,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right)-V_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{I}}{a_{44}^{I}}}\left(C_3^{(I,s)}\cos a_2^{I}\Omega_*\zeta_2-C_4^{(I,s)}\sin a_2^{I}\Omega_*\zeta_2\right)-\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\times$$
$$\times\left(C_3^{(II,s)}\cos a_2^{II}\Omega_*\zeta_2-C_4^{(II,s)}\sin a_2^{II}\Omega_*\zeta_2\right)=b_{23}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{23}^{I,s}(\zeta=\zeta_3)$$

где

$$\zeta_1=\frac{h_1+h_2+h_3}{h}=1,\quad \zeta_2=\frac{h_2+h_3}{h},\quad \zeta_3=\frac{h_3}{h} \qquad (3.4)$$
$$U^{-(0)}=u^-/l,\quad V^{-(0)}=v^-/l,\quad W^{-(0)}=w^-/l$$
$$U^{-(s)}=V^{-(s)}=W^{-(s)}=0,\quad s>0$$

$$b_{13}^{(k,s)}=\frac{1}{a_{55}^k}\left[\frac{\partial U_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}\right],\ b_{23}^{(k,s)}=\frac{1}{a_{44}^k}\left[\frac{\partial V_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$b_{33}^{(k,s)}=A_{11}^k\frac{\partial W_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta}-A_{23}^k\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}^k\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta},\ k=I,II,III$$

Решив системы (3.1)-(3.3), определим значения $C_i^{(k,s)}(\xi,\eta)$; $i=1,2...6$, $k=I,II,III$:

$$C_1^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_1^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_1},\ C_2^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_2^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_1}$$

$$C_3^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_3^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_2},\ C_4^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_4^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_2} \tag{3.5}$$

$$C_5^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_5^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_3},\ C_6^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_6^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_3}$$

где $P_i^{(k,s)}(\xi,\eta)$, $i=1,2...6$, $k=I,II,III$ получаются из определителей Δ_j, $j=1,2,3$ систем (3.1)-(3.3), заменой соответствующих столбцов столбцом из свободных членов (U,V,W).

Подставив значения $C_i^{(k,s)}$ в (2.7), получим окончательное решение:

$$U^{(k,s)}=\frac{P_1^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_1}\sin a_1^k\Omega_*\zeta+\frac{P_2^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_1}\cos a_1^k\Omega_*\zeta+U_\tau^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{3.6}$$

$$(a_2,a_3;\ P_3,P_4;P_5,P_6;\ \ \Delta_2,\Delta_3;V_\tau,W_\tau;V,W);\ k=I,II,III$$

где

$$\Delta_1=-\frac{1}{2}\Omega_*^3\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{55}^{II}a_{55}^{III}}}\cos\Omega_*a_1^{III}\zeta_3\left[\cos\Omega_*\left(a_1^I(\zeta_1-\zeta_2)+a_1^{II}(\zeta_3-\zeta_2)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\Omega_*\left(a_1^I(\zeta_1-\zeta_2)+a_1^{II}(\zeta_2-\zeta_3)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)\right]$$

$$\Delta_2=-\frac{\Omega_*^3}{2}\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{44}^{II}a_{44}^{III}}}\cos\Omega_*\zeta_3a_2^{III}\left[\cos\Omega_*\left(a_2^I(\zeta_1-\zeta_2)+a_2^{II}(\zeta_3-\zeta_2)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\Omega_*\left(a_2^I(\zeta_1-\zeta_2)+a_2^{II}(\zeta_2-\zeta_3)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)\right]$$

(3.7)

$$\Delta_3 = -\frac{1}{2}\Omega_*^2\Big[\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^I\Big(\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\Big(2\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III} -$$

$$-\Big(\cos\Omega_*\left(\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}+\zeta_3 a_3^{III}\right)+\cos\Omega_*\left(\zeta_2 a_3^{II}-\left(a_3^{II}+a_3^{III}\right)\zeta_3\right)\Big)\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}\rho_{III}A_{11}^{III}}\Big)\times$$

$$\times\Big(\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^I\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\Big(\sin\Omega_*\left(\zeta_2 a_3^{II}-\left(a_3^{II}+a_3^{III}\right)\zeta_3\right)\Big(\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\Big)+$$

$$+\sin\Omega_*\left(\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}+\zeta_3 a_3^{III}\right)\Big(\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}+\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\Big)\Big)\Big)+$$

$$+\Big(2\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^I\Big(\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I\Big(-\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}+$$

$$+\cos\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\Big)+$$

$$+\Big(\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\Big(\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\Big(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}+$$

$$+\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\Big)+\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\times$$

$$\times\Big(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}-\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\Big)\Big)\Big)\Big]$$

Считаем, что
$$\Delta_j \neq 0;\ \ j=1,2,3 \tag{3.8}$$

Условия (3.8) будут выполнены, если Ω не является частотой собственных колебаний [4], в противном случае, если Ω такова, что хотя бы одна из величин Δ_j равна нулю, произойдёт резонанс.

Компоненты тензора напряжений определятся по формулам:

$$\sigma_{12}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{66}^k}\left[\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\xi}-\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$\sigma_{13}^{(k,s)} = \sqrt{\frac{\rho_k}{a_{55}^k}}\Omega_*\left(C_1^{(k,s)}\cos a_1^k\Omega_*\zeta - C_2^{(k,s)}\sin a_1^k\Omega_*\zeta\right)+\frac{1}{a_{55}^k}\left[\frac{\partial U_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(k,s)} = \sqrt{\frac{\rho_k}{a_{44}^k}}\Omega_*\left(C_3^{(k,s)}\cos a_2^k\Omega_*\zeta - C_4^{(k,s)}\sin a_2^k\Omega_*\zeta\right)+\frac{1}{a_{44}^k}\left[\frac{\partial V_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$\sigma_{11}^{(k,s)} = -A_{23}^k a_3^k\Omega_*\left(C_5^{(k,s)}\cos a_3^k\Omega_*\zeta - C_6^{(k,s)}\sin a_3^k\Omega_*\zeta\right)-$$

$$-A_{23}^k\frac{\partial W_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta}+A_{22}^k\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-A_{12}^k\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{22}^{(k,s)} = -A_{13}^k a_3^k\Omega_*\left(C_5^{(k,s)}\cos a_3^k\Omega_*\zeta - C_6^{(k,s)}\sin a_3^k\Omega_*\zeta\right)-$$

$$-A_{13}^k\frac{\partial W_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta}-A_{12}^k\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi}+A_{33}^k\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta} \tag{3.9}$$

$$\sigma_{33}^{(k,s)} = A_{11}^{k} a_3^{k} \Omega_* \left(C_5^{(k,s)} \cos a_3^k \Omega_* \zeta - C_6^{(k,s)} \sin a_3^k \Omega_* \zeta \right) +$$

$$+ A_{11}^{k} \frac{\partial W_\tau^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{k} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{k} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta}$$

4. Рассмотрим частный случай, пусть:

$$U^- = \text{const}\,,\; V^- = \text{const}\,,\; W^- = \text{const} \tag{4.1}$$

При s = 0 будем иметь:

$$b_{13}^{(k,0)} = b_{23}^{(k,0)} = b_{33}^{(k,0)} = 0$$

$$U^{(k,0)} = \frac{P_1^{(k,0)}(\xi,\eta)}{\Delta_1} \sin a_1^k \Omega_* \zeta + \frac{P_2^{(k,0)}(\xi,\eta)}{\Delta_1} \cos a_1^k \Omega_* \zeta \tag{4.2}$$

$$(a_1, a_2, a_3; P_1, P_2;\, P_3, P_4; P_5, P_6;\;\; \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3; U, V, W)\,;\; k = I, II, III$$

где

$$P_1^{(I,0)} = -C_{56}^{(0)} f_2 \Omega_*^3 \rho_{II} \sqrt{\frac{A_{11}^{II} \rho_{III}}{a_{55}^{II} a_{55}^{III}}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_1 \cos \Omega_* a_1^{III} \zeta_3$$

$$P_1^{(II,0)} = -C_{56}^{(0)} f_2 \Omega_*^3 \sqrt{\frac{\rho_{II} \rho_{III} A_{11}^{II}}{a_{55}^{III}}} \cos \Omega_* a_1^{III} \zeta_3 \left[\sin \Omega_* a_1^I \zeta_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \cos \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^I \zeta_2 - \right.\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \right) + \cos \Omega_* a_1^I \zeta_1 \times$$

$$\left. \times \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_2 \cos \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \sin \Omega_* a_1^I \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \right) \right]$$

$$P_1^{(III,0)} = -\frac{1}{2} \Omega_*^3 \left[\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} - \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \right) \cos \Omega_* \left(a_1^I (\zeta_1 - \zeta_2) + a_1^{II} (\zeta_3 - \zeta_2) \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \right) \cos \Omega_* \left(a_1^I (\zeta_1 - \zeta_2) + a_1^{II} (\zeta_2 - \zeta_3) \right) \right] \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \left[U^- \sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{55}^{III}}} \sin \Omega_* \zeta_3 a_1^{III} + C_{56}^{(0)} f_2 \sqrt{\rho_{II} A_{11}^{II}} \right]$$

$$P_2^{(I,0)} = C_{56}^{(0)} f_2 \Omega_*^3 \rho_{II} \sqrt{\frac{A_{11}^{II} \rho_{III}}{a_{55}^{II} a_{55}^{III}}} \cos \Omega_* a_1^{III} \zeta_3 \sin \Omega_* a_1^I \zeta_1 \tag{4.3}$$

$$P_2^{(II,0)} = -C_{56}^{(0)} f_2 \Omega_*^3 \sqrt{\frac{\rho_{II} \rho_{III} A_{11}^{II}}{a_{55}^{III}}} \cos \Omega_* a_1^{III} \zeta_3 \left[\sin \Omega_* a_1^I \zeta_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \sin \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^I \zeta_2 + \right.\right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_2 \cos \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \right) + \cos \Omega_* a_1^I \zeta_1 \times$$

$$\left. \times \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 - \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \sin \Omega_* a_1^I \zeta_2 \cos \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \right) \right]$$

$$P_2^{(III,0)} = -\frac{1}{2}\Omega_*^3 U^- \sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{55}^{II}a_{55}^{III}}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_1^{III}\left[\cos\Omega_*\left(a_1^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_1^{II}\left(\zeta_3-\zeta_2\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)+\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)\cos\Omega_*\left(a_1^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_1^{II}\left(\zeta_2-\zeta_3\right)\right)\right]$$

$$P_3^{(I,0)} = -C_{56}^{(0)} f_3\Omega_*^3\rho_{II}\sqrt{\frac{A_{11}^{II}\rho_{III}}{a_{44}^{II}a_{44}^{III}}}\cos\Omega_* a_2^I\zeta_1\cos\Omega_* a_2^{III}\zeta_3$$

$$P_3^{(II,0)} = -C_{56}^{(0)} f_2\Omega_*^3\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{44}^{III}}}\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_* a_2^{III}\zeta_3\times$$

$$\times\left[\sin\Omega_* a_2^I\zeta_1\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}\cos\Omega_* a_2^{II}\zeta_2\sin\Omega_* a_2^I\zeta_2-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\cos\Omega_* a_2^I\zeta_2\cos\Omega_* a_1^{II}\zeta_2\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\Omega_* a_2^I\zeta_1\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}\cos\Omega_* a_2^I\zeta_2\cos\Omega_* a_2^{II}\zeta_2+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\sin\Omega_* a_2^I\zeta_2\sin\Omega_* a_2^{II}\zeta_2\right)\right]$$

$$P_3^{(III,0)} = -\frac{1}{2}\Omega_*^3\left[\cos\Omega_*\left(a_2^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_2^{II}\left(\zeta_3-\zeta_2\right)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\Omega_*\left(a_2^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_2^{II}\left(\zeta_2-\zeta_3\right)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)\right]\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\left[V^-\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{44}^{III}}}\sin\Omega_*\zeta_3 a_2^{III}+C_{56}^{(0)} f_3\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\right]$$

$$P_4^{(I,0)} = C_{56}^{(0)} f_3\Omega_*^3\rho_{II}\sqrt{\frac{A_{11}^{II}\rho_{III}}{a_{44}^{II}a_{44}^{III}}}\cos\Omega_* a_2^{III}\zeta_3\sin\Omega_* a_2^I\zeta_1$$

$$P_4^{(II,0)} = C_{56}^{(0)} f_3\Omega_*^3\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}A_{11}^{II}}{a_{44}^{III}}}\cos\Omega_* a_2^{III}\zeta_3\times$$

$$\times\left[\sin\Omega_* a_2^I\zeta_1\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}\sin\Omega_* a_2^{II}\zeta_2\sin\Omega_* a_2^I\zeta_2+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\cos\Omega_* a_2^I\zeta_2\cos\Omega_* a_2^{II}\zeta_2\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\Omega_* a_2^I\zeta_1\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}\cos\Omega_* a_2^I\zeta_2\sin\Omega_* a_2^{II}\zeta_2-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\sin\Omega_* a_2^I\zeta_2\cos\Omega_* a_2^{II}\zeta_2\right)\right]$$

$$P_4^{(III,0)} = -\frac{1}{2}\Omega_*^3 V^-\left[\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)\times\cos\Omega_*\left(a_2^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_2^{II}\left(\zeta_3-\zeta_2\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)\cos\Omega_*\left(a_2^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_2^{II}\left(\zeta_2-\zeta_3\right)\right)\right]\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{44}^{II}a_{44}^{III}}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_2^{III}$$

$$P_5^{(I,0)} = W^-\sqrt{\rho_{II}\rho_{III}A_{11}^{II}A_{11}^{III}}\,\Omega_*^2\cos\Omega_* a_3^I\zeta_1$$

$$
\begin{aligned}
P_5^{(II,0)} = \Big[\Big(&\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_* a_3^{II}\zeta_2 \sin\Omega_* a_3^I\zeta_2 - \sqrt{\rho_{II} A_{11}^{II}}\cos\Omega_* a_3^I\zeta_2 \sin\Omega_* a_3^{II}\zeta_2\Big)\times \\
&\times \sin\Omega_* a_3^I\zeta_1 + \cos\Omega_* a_3^I\zeta_1\Big(\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_* a_3^I\zeta_2\cos\Omega_* a_3^{II}\zeta_2 + \\
&+ \sqrt{\rho_{II} A_{11}^{II}}\sin\Omega_* a_3^I\zeta_2\sin\Omega_* a_3^{II}\zeta_2\Big)\Big]W^-\Omega_*^2\sqrt{\rho_{III} A_{11}^{III}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_5^{(III,0)} = -W^-\Omega_*^2\Big[-\frac{1}{2}\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^I\Big(2\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\Big(\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*(\zeta_2-\zeta_3)a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I - \\
-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\cos\Omega_*(\zeta_2-\zeta_3)a_3^{II}\Big) + \sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\Big(\Big(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}} - \sqrt{\rho_I A_{11}^I}\Big) + \\
+\sin\Omega_*\big(\zeta_1 a_3^I + (\zeta_3-\zeta_2)a_3^{II}\big) + \Big(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}} + \sqrt{\rho_I A_{11}^I}\Big)\sin\Omega_*\big(\zeta_1 a_3^I + (\zeta_2-\zeta_3)a_3^{II}\big)\Big)\times \\
\times\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}} + \sin\Omega_*\zeta_2 a_3^I\Big(\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\Big(\rho_{II}A_{11}^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*(\zeta_2-\zeta_3)a_3^{II} + \\
+\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\cos\Omega_*(\zeta_2-\zeta_3)\Big)\Big) + \sqrt{\rho_I A_{11}^I}\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I\Big(\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\times \\
\times\Big(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II} - \sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\Big) + \cos\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\times \\
\times\Big(\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\cdot\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}} + \sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\cdot\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\Big)\Big)\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
P_6^{(I,0)} = -W^-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\,\Omega_*^2\sin\Omega_* a_3^I\zeta_1
$$

$$
\begin{aligned}
P_6^{(II,0)} = -\Big[\Big(&\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\sin\Omega_* a_3^I\zeta_2\sin\Omega_* a_3^{II}\zeta_2 + \sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_* a_3^I\zeta_2\cos\Omega_* a_3^{II}\zeta_2\Big)\times \\
&\times\sin\Omega_* a_3^I\zeta_1 + \cos\Omega_* a_3^I\zeta_1\Big(\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_* a_3^I\zeta_2\sin\Omega_* a_3^{II}\zeta_2 - \\
&-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_* a_3^{II}\zeta_2\sin\Omega_* a_3^I\zeta_2\Big)\Big]W^-\Omega_*^2\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_6^{(III,0)} = -W^-\Omega_*^2\frac{1}{2}\Big[\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^I\Big(\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\Big(2\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*(\zeta_2-\zeta_3)a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III} - \\
-\Big(\cos\big(\Omega_*(\zeta_2-\zeta_3)a_3^{II} + \zeta_3 a_3^{III}\big) + \cos\Omega_*\big(\zeta_2 a_3^{II} - (a_3^{II} + a_3^{III})\zeta_3\big)\Big)\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\Big) + \\
+\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I\Big(\sin\Omega_*\big(\zeta_2 a_3^{II} - (a_3^{II} + a_3^{III})\zeta_3\big)\Big(\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}} - \sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\Big) + \\
+\Big(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}} + \sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\Big)\sin\Omega_*\big((\zeta_2-\zeta_3)a_3^{II} + \zeta_3 a_3^{III}\big)\Big)\Big) + 2\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^I\Big(\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I\times \\
\times\Big(-\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*(\zeta_2-\zeta_3)a_3^{II} + \sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\times \\
\times\cos\Omega_*(\zeta_2-\zeta_3)a_3^{II}\Big) + \Big(\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\Big(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II} + \\
+\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\Big)\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I + \cos\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\times \\
\times\Big(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III} - \sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\Big)\Big)\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
C_{56}^{(0)} = \frac{P_5^{(II,0)}}{\Delta_3}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3 - \frac{P_6^{(II,0)}}{\Delta_3}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3
$$

Несложно убедиться, что при $s > 0$

$$U^{(k,s)} = V^{(k,s)} = W^{(k,s)} = 0,$$
$$\sigma_{ij}^{(k,s)} = 0, \quad i, j = 1,2,3; \quad k = I, II, III \tag{4.4}$$

Следовательно, приближению $s = 0$ соответствует точное решение:

$$u^k = \left(\frac{P_1^{(k,0)}}{\Delta_1} \sin a_1^k \Omega_* \zeta + \frac{P_2^{(k,0)}}{\Delta_1} \cos a_1^k \Omega_* \zeta \right) l \exp(i\Omega t) \tag{4.5}$$

$$(a_1, a_2, a_3;\ P_1, P_2; P_3, P_4; P_5, P_6;\ \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3; u, v, w);\ k = I, II, III$$

Напряжения вычисляются по формулам (2.3), (2.4). Из полученного точного решения (4.4), как и для двухслойной пластинки, когда между слоями осуществляется кулоново трение, а лицевая поверхность верхнего слоя жестко закреплена [5] или свободна [6], следует любопытный факт – величины слоев расположенных выше поверхности неполного контакта (в нашем случае I, II слои) не зависят от величин u^-, v^-, т.е. наличие кулоново трения между третьим и вторым слоями приводит к тому, что сообщаемые нижнему слою тангенциальные перемещения не влияют на напряженно-деформированное состояние первого и второго слоев. Установленная выше качественная картина с большой точностью выполняется и тогда, когда u^-, v^- переменны по координатам. При полном же контакте между слоями напряженно-деформированные состояния всех слоев зависят от u^-, v^-, w^- [7]. Установленный выше факт можно использовать в расчетах фундаментов-оснований сооружений в сейсмостойком строительстве для уменьшения негативного влияния сейсмических сил.

The authors express their gratitude to INTAS, grant Ref. No 03-51-5547 and NFSAT, grant Ref. GRSP 05/06, which made this investigation possible.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. Москва. Наука, 1997. 415с.
2. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во ”Гитутюн” НАН РА, 2002. С. 9-19.
3. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. //В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления, прочности и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ, 1997. С.132-135.
4. Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж. Асимптотика собственных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. //В сб.: V Международная конференция “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван. Изд-во ”Гитутюн” НАН РА, 2005. С. 14-22.
5. Агаловян Л. А., Погосян А. М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С. 36-47.

6. Погосян А. М. Асимптотика вынужденных колебаний двухслойной ортотропной пластинки в смешанной краевой задаче при кулоновом трении между слоями. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред, V Международная конференция 1-7 октября, Горис, 2005г. Изд-во ”Гитутюн” НАН РА, 2005. С. 287-296.
7. Оганесян Р. Ж. Асимптотика вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при полном контакте между слоями. //В. сб.: “Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести”. Ереван. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. 2006.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
12.04.2007