

УДК 539.3

ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛОСКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ИЗ УПРУГОГО ВОЛНОВОДА В  
СОСТАВНОЕ УПРУГОЕ ПРОСТРАНСТВО\*

Григорян Э.Х., Агаян К.Л.

**Ключевые слова:** волновод, составное пространство, контакт, функциональное уравнение, волны Лява, асимптотика.

**Key words:** waveguide, composite, contact, functional equation, Love's waves, asymptotics.

Է. Խ. Գրիգորյան, Կ. Լ. Աղայան

Սահքի հարթ ալիքի ցրումը առաձգական ալիքատարից առաձգական տարածությունում

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում է առաձգական սալից (ալիքատարից) դեպի առաձգական տարածություն սահքի հարթ ալիքի ճառագայթման խնդիրը: Սալը տեղադրված է տարածության մեջ և միացված է նրա հետ մասնակիորեն: Սալի չմիացված մասից տարածվում է սահքի հարթ ալիքը և ճառագայթվում է բաղադրյալ տարածությունում: Խնդրի լուծումը բերվում է երկու անկախ Վիներ-Հոպֆի տիպի ֆունկցիոնալ հավասարումների, որոնք լուծվում են ֆակտորիզացիայի մեթոդով: Ստացված են վերջավոր արտահայտություններ, սալի և տարածության յուրաքանչյուր մասում ալիքային դաշտը որոշելու համար: Բերված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք ներկայացնում են ալիքային դաշտը հեռավոր տիրույթներում և կոնտակտային տեղամասերի ծայրակետերի շրջակայքում: Այդ բանաձևերից հետևում է ա) սալի և տարածության ալիքային թվերի որոշակի հարաբերությունների դեպքում սալում ծավալային ալիքի տարածման վարքը փոքրանում է և համընկնում է համասեռ դեպքի հետ, բ) ճառագայթված ծավալային ալիքը սալի մեջ տարածվում է տարածությունում սահքի ծավալային ալիքի տարածման արագությամբ:

E.Kh. Grigoryan, K.L. Agayan

Radiation of a Plane Shear Wave from an Elastic Waveguide  
to a Composite Elastic Space

The radiation of a plane shear wave from an elastic strip (waveguide) to an elastic space is investigated in this paper. The strip is embedded into a space and is partially bonded with it. A given plane shear wave propagates from the free part of the strip and radiates into the composite space. The problem's solution is led to a system of two uncoupled functional Wiener-Hopf type equations which are solved via the method of factorization. Closed form expressions are obtained which determine the wavefield in all the parts of the strip and space. Asymptotic expressions are provided which represent the wavefield in the far field and in the neighborhood of the contact zones. From these formulas it follows that: a) in the cases of several values of the ratio of the wave numbers of the strip and space the order of vanishing of the volume wave in the strip becomes less and equal to the one in the case of a homogeneous material, b) the radiated volume wave in the strip has a velocity of propagation equal to the volume wave's velocity in the space.

В работе исследована задача об излучении плоской сдвиговой волны из упругого слоя (волновода) в упругое пространство. Слой вложен в пространство и соединен с ней частично. Со стороны несоединенной части слоя распространяется заданная плоская сдвиговая волна и излучается в составное пространство. Решение задачи сведено к двум независимым функциональным уравнениям типа Винера-Хопфа, которые решаются методом факторизации. Получены конечные выражения, определяющие волновое поле в каждой части слоя и пространства. Приведены асимптотические формулы, представляющие волновое поле в дальних зонах и около концов контактных участков. Из этих формул следует: а) при определенных отношениях волновых чисел слоя и пространства порядок убывания объемной волны в слое уменьшается и совпадает с однородным случаем, б) излученная объемная волна в слое распространяется со скоростью распространения объемной волны в пространстве.

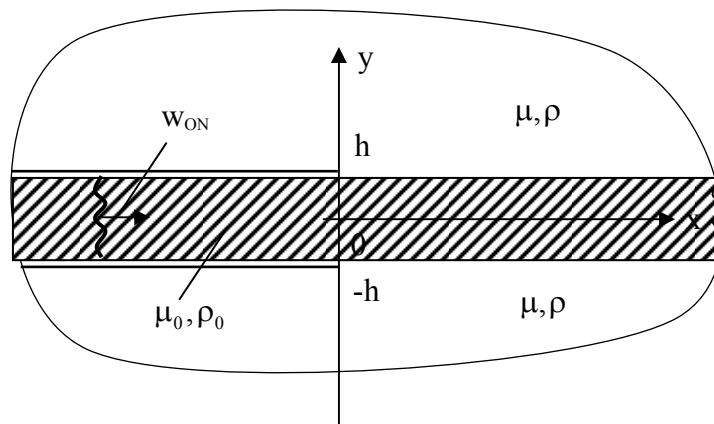
\* Основные результаты предлагаемой статьи были доложены на V Международной конференции "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред" 1-7 октября, Горис, 2005.

Изучение распространения волн в упругом слое и пространстве было предметом многочисленных исследований, достаточно полный перечень которых можно найти в [1]. В работах [2-5] рассмотрены задачи о распространении сдвиговых волн в составном упругом пространстве.

В настоящей работе исследуется динамическая контактная задача об излучении плоской сдвиговой волны, распространяющейся внутри свободной части упругого волновода (слоя), в составное упругое пространство. Решение задачи сведено к двум независимым функциональным уравнениям типа Винера-Хопфа, которые решаются методом факторизации. Следует отметить, что аналогичная задача для однородного пространства рассмотрена в известной монографии [6].

Получены конечные выражения, определяющие волновое поле в слое и в пространстве. Получены также асимптотические формулы, представляющие амплитуды перемещений в дальних зонах волновода и пространства. При этом, оказывается, что в слое излученная объемная волна распространяется со скоростью распространения объемной волны в пространстве. Приведены асимптотические формулы, определяющие поведение амплитуд сдвиговых напряжений около концов контактных зон (трещин).

1. Рассмотрим составное упругое пространство, составленное из упругого слоя и двух одинаковых упругих полупространств, отнесенное к декартовой системе координат  $Oxyz$ . Слой с модулем сдвига  $\mu_0$  и плотностью  $\rho_0$ , занимающий область  $\Omega_0(|x| < \infty, |y| \leq h, |z| < \infty)$ , по своим граничным полуплоскостям ( $x \geq 0, y = \pm h$ ) соединен (жесткий контакт) с верхним  $\Omega_+(y > h)$  и нижним  $\Omega_-(y < -h)$  полупространствами с одинаковыми упругими характеристиками  $\mu, \rho$ . Слой и полупространства по полуплоскостям ( $x \leq 0, y = \pm h$ ) не контактируют и свободны от напряжений (фиг.1).



Фиг.1.

Пусть внутри свободной части волновода ( $x < 0$ ) по направлению оси  $Ox$  движется распространяющаяся плоская сдвиговая волна с амплитудой

$$w_{ON}(x, y) = A_N e^{i\gamma_N x} \cos \frac{\pi N}{2h} (y - h), \quad -\infty < x < \infty, \quad |y| \leq h \quad (1.1)$$

$$\gamma_N = \sqrt{k_0^2 - (\pi N / 2h)^2}, \quad k_0 > \pi N / 2h \quad (1.2)$$

$\cos \pi N (y - h) / 2h$  – собственные функции краевой задачи уравнения Гельмгольца для слоя со свободными границами. Здесь  $A_N$  – постоянная,  $k_0 = \omega / c_0$  – волновое число,  $c_0 = \sqrt{\mu_0 / \rho_0}$  – скорость распространения сдвиговой волны в слое,  $\omega$  – частота колебаний.

Гармонический множитель  $e^{-i\omega t}$ , как обычно, опускается, т.е. задача решается в амплитудах.

Считается, что других волн, бегущих по волноводу, нет. Число  $N$  может быть одним из чисел  $0, 1, 2, \dots$ , таким, что  $N < 2hk_0 / \pi$ , которое обеспечивает распространяемость волн (1.1) по волноводу. Среда находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить излученное волновое поле в слое и в пространстве.

Уравнения движения в амплитудах перемещений имеют вид [7]:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \begin{Bmatrix} k^2 \\ k_0^2 \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w \\ w_0 \end{Bmatrix} = 0, \quad (x, y) \in \begin{Bmatrix} \Omega_- \cup \Omega_+ \\ \Omega_0 \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

где  $w(x, y)$  и  $w_0(x, y)$  – амплитуды перемещений в областях  $\Omega_- \cup \Omega_+$  и  $\Omega_0$ , соответственно.  $k = \omega / c$  – волновое число,  $c = \sqrt{\mu / \rho}$  – скорость распространения сдвиговой волны в пространстве.

Для формирования граничных условий заметим, что на свободных поверхностях отсутствуют напряжения  $\tau_{yz}$ , а на поверхностях соприкосновения выполняются условия полного контакта. Так что граничные и контактные условия при помощи  $w(x, y)$  и  $w_0(x, y)$  запишутся в виде:

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{y=\pm h \mp 0} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=\pm h \pm 0} = 0, \quad x < 0 \quad (1.4)$$

$$w(x, \pm h \pm 0) = w_0(x, \pm h \mp 0), \quad x \geq 0 \quad (1.5)$$

$$\mu \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=\pm h \pm 0} = \mu_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{y=\pm h \mp 0}, \quad x > 0 \quad (1.6)$$

Решение задачи должно удовлетворять также условию уходящей волны, к которому обратимся в дальнейшем.

Здесь имелось в виду, что [7]

$$\tau_{yz}(x, y) = \mu \partial w / \partial y, \quad \tau_{xz}(x, y) = \mu \partial w / \partial x \quad (1.7)$$

Перейдем к решению краевой задачи (1.3)-(1.6). Поскольку в областях  $\Omega_-$  и  $\Omega_+$  имеются только излученные волны, то решение волнового уравнения (1.3), представляющее на бесконечности уходящие волны, после преобразования Фурье по переменной  $x$  можно представить в виде

$$\bar{w}(\sigma, y) = \begin{cases} A(\sigma)e^{-\gamma y}, & y \geq h \\ B(\sigma)e^{\gamma y}, & y \leq -h \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\bar{w}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{-i\sigma x} dx, \quad \gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \quad (1.9)$$

где  $A(\sigma)$  и  $B(\sigma)$  – неизвестные функции. При этом, функция из (1.9)  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , и  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$ ,  $(-\infty < \sigma < \infty)$ , т.е. действительная ось обходит точки ветвления  $\sigma = -k$  сверху, а точку  $\sigma = k$  – снизу [6].

В области  $\Omega_0$  положим, как обычно,

$$W_0(x, y) = w_0(x, y) - w_{0N}(x, y), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.10)$$

где  $w_{0N}(x, y)$  дается (1.1).

Подставляя (1.10) в (1.3), после преобразования Фурье ее решение представим в виде:

$$\begin{aligned} \bar{W}_0(\sigma, y) &= \bar{w}_0(\sigma, y) - 2\pi A_N \delta(\sigma + \gamma_N) \cdot \cos \frac{\pi N}{2h} (y - h) = \\ &= C_0(\sigma) \operatorname{ch}(\gamma_0 y) + D_0(\sigma) \operatorname{sh}(\gamma_0 y), \quad |y| \leq h \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $C_0(\sigma)$  и  $D_0(\sigma)$  – неизвестные функции,  $\delta(\sigma)$  – известная функция Дирака, а

$$\gamma_0(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_0^2} \quad (1.12)$$

Введем функции

$$f^+(x) = \theta(x)f(x), \quad f^-(x) = \theta(-x)f(x) \quad (1.13)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда.

Применив теперь преобразование Фурье к граничным условиям (1.4)-(1.6), с учетом (1.13), и удовлетворяя им при помощи (1.8) и (1.11), приходим к следующим двум функциональным уравнениям типа Винера-Хопфа:

$$\bar{S}^-(\sigma) + \bar{K}_{11}(\sigma) \bar{D}'^+(\sigma) = -\pi A_N (1 + \cos \pi N) \delta(\sigma + \gamma_N) \quad (1.14)$$

$$\bar{D}^-(\sigma) + \bar{K}_{22}(\sigma) \bar{S}'^+(\sigma) = -\pi A_N (1 - \cos \pi N) \delta(\sigma + \gamma_N) \quad (1.15)$$

$$\bar{K}_{11}(\sigma) = \frac{\mu_* \bar{K}_1(\sigma)}{h\gamma_0^2 \bar{E}_1(\sigma)}, \quad \bar{K}_{22}(\sigma) = \frac{\mu_* \bar{K}_2(\sigma)}{\gamma_0 \bar{E}_2(\sigma)}, \quad \mu_* = \frac{(\mu_0 + \mu)}{4\mu} \quad (1.16)$$

$$\bar{E}_1(\sigma) = (\gamma_0 h)^{-1} e^{-\gamma_0 h} \operatorname{sh}(\gamma_0 h), \quad \bar{E}_2(\sigma) = e^{-\gamma_0 h} \operatorname{ch}(\gamma_0 h) \quad (1.17)$$

$$\bar{K}_1(\sigma) = L_1(\sigma) / 2\mu\mu_* \gamma e^{\gamma_0 h}, \quad \bar{K}_2(\sigma) = L_2(\sigma) / 2\mu\mu_* \gamma e^{\gamma_0 h} \quad (1.18)$$

$$L_1(\sigma) = \mu_0 \gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0 h) + \mu \gamma \operatorname{ch}(\gamma_0 h), \quad L_2(\sigma) = \mu_0 \gamma_0 \operatorname{ch}(\gamma_0 h) + \mu \gamma \operatorname{sh}(\gamma_0 h) \quad (1.19)$$

Неизвестные функции из (1.8) и (1.11) определяются при помощи решений функциональных уравнений (1.14) и (1.15) следующим образом:

$$C_0(\sigma) = \bar{D}'^+(\sigma) / 4\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0 h), \quad D_0(\sigma) = \bar{S}'^+(\sigma) / 4\gamma_0 \operatorname{ch}(\gamma_0 h) \quad (1.20)$$

$$A(\sigma) + B(\sigma) = -\mu_0 \bar{D}'^+(\sigma) e^{\gamma h} / \mu \gamma, \quad A(\sigma) - B(\sigma) = -\mu_0 \bar{S}'^+(\sigma) e^{\gamma h} / \mu \gamma \quad (1.21)$$

Таким образом, решение поставленной выше задачи свелось к решению функциональных уравнений (1.14) и (1.15), к которым можно применить стандартный метод Винера-Хопфа [6,8].

Прежде чем перейти к решению функциональных уравнений, отметим, что в дальнейшем (в основном) будем предполагать, что  $k < k_0$ , т.е. будем придерживаться в пределах появления локализованных (поверхностных) волн [7].

Функции  $L_1(\sigma)$  и  $L_2(\sigma)$  из (1.19) имеют действительные корни при  $k < \sigma < k_0$  [7,9,10]. Обозначим эти корни  $\sigma_m^{(1)}$  и  $\sigma_m^{(2)}$ , соответственно, т.е.  $L_1(\sigma_m^{(1)})=0$ ,  $L_2(\sigma_m^{(2)})=0$ . Число этих корней и их распределение на вещественной оси существенно зависит от параметра  $h\sqrt{k_0^2 - k^2}$ .

Исследования показывают, что если

$$(n-1)\pi < h\sqrt{k_0^2 - k^2} \leq (2n-1)\pi/2, \quad n=1,2,\dots$$

то  $L_1(\sigma)$  имеет ровно  $2n$  корней, расположенных на интервалах

$$(hk_0)^2 - (2n-2m+1)^2 \pi^2/4 < (\pm h\sigma_m^{(1)})^2 < (hk_0)^2 - (n-m)^2 \pi^2 \quad (1.22)$$

$$m=1,2,\dots,n$$

при этом,  $(hk)^2 > (hk_0)^2 - (2n-1)^2 \pi^2/4$ , а  $L_2(\sigma)$  имеет  $2(n-1)$  корней, расположенных на интервалах

$$(hk_0)^2 - (n-m)^2 \pi^2 < (\pm h\sigma_m^{(2)})^2 < (hk_0)^2 - (2n-2m-1)^2 \pi^2/4 \quad (1.23)$$

$$n=2,3,\dots, \quad m=1,2,\dots,(n-1)$$

при этом  $(hk)^2 < (hk_0)^2 - (n-1)^2 \pi^2$ .

Если же

$$(2n-1)\pi/2 < h\sqrt{k_0^2 - k^2} \leq \pi n, \quad n=1,2,\dots \quad (1.24)$$

то  $L_1(\sigma)$  и  $L_2(\sigma)$  имеют по  $2n$  корней, находящихся, соответственно, на интервалах

$$(hk_0)^2 - (2n-2m+1)^2 \pi^2/4 < (\pm h\sigma_m^{(1)})^2 < (hk_0)^2 - (n-m)^2 \pi^2$$

$$m=1,2,\dots,n$$

при этом,  $(hk)^2 < (hk_0)^2 - (2n-1)^2 \pi^2/4$ ,

$$(hk_0)^2 - (n-m+1)^2 \pi^2 < (\pm h\sigma_m^{(2)})^2 < (hk_0)^2 - (2n-2m+1)^2 \pi^2/4 \quad (2.25)$$

$$m=1,2,\dots,n$$

при этом,  $(hk)^2 > (hk_0)^2 - \pi^2 n^2$ .

Чтобы удовлетворялось условие уходящей волны, считается, что действительная ось обходит отрицательные корни  $\sigma = -\sigma_m^{(j)}$  ( $j=1,2$ ) функции  $L_j(\sigma)$  сверху, а положительные корни  $\sigma = \sigma_m^{(j)}$  – снизу.

Перейдем теперь к решению функциональных уравнений (1.14) и (1.15). Из (1.16)–(1.18) нетрудно видеть, что точки  $\sigma = \pm k_0$  не являются точками ветвления для функций  $\bar{K}_{11}(\alpha)$  и  $\bar{K}_{22}(\alpha)$ . Однако факторизацию  $\bar{K}_{11}(\sigma)$  и  $\bar{K}_{22}(\sigma)$  целесообразно проводить таким образом, чтобы полученное решение при  $k = k_0$  и  $\mu = \mu_0$  (однородный случай) в явном виде совпало с решением соответствующей задачи, рассмотренной в [6]. Для этого  $\bar{K}_{11}(\sigma)$  и  $\bar{K}_{22}(\sigma)$  представлены в виде (1.16), где уже точки  $\sigma = \pm k_0$  являются точками ветвления для  $\bar{K}_j(\sigma)$  и  $\bar{E}_j(\sigma)$  ( $j=1,2$ ). Так что, при факторизации  $\bar{K}_j(\sigma)$  и  $\bar{E}_j(\sigma)$  предполагается, что  $\sqrt{\sigma^2 - k_0^2} \rightarrow |\sigma|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , и  $\sqrt{\sigma^2 - k_0^2} = -i\sqrt{k_0^2 - \sigma^2}$ .

Рассмотрим сначала уравнение (1.14). Факторизуем  $\bar{K}_1(\sigma)$  из (1.18), представив ее в виде [6]

$$\bar{K}_1(\sigma) = \bar{K}_1^+(\sigma) \cdot \bar{K}_1^-(\sigma) \quad (1.26)$$

где  $\bar{K}_1^+(\alpha)$  регулярна и не имеет нулей при  $\text{Im}(\alpha) > 0$ , а  $\bar{K}_1^-(\alpha)$  регулярна и не имеет нулей при  $\text{Im}(\alpha) < 0$ ,  $\alpha = \sigma + i\tau$ . В (1.26)

$$\begin{aligned} \bar{K}_1^+(\sigma) &= \exp\left(\bar{F}_1^+(\sigma)\right), & \bar{K}_1^-(\sigma) &= \exp\left(\bar{F}_1^-(\sigma)\right) \\ \bar{F}_1^+(\sigma) &= \int_0^\infty F_1(x) e^{i(\sigma+io)x} dx, & \bar{F}_1^-(\sigma) &= \int_{-\infty}^0 F_1(x) e^{i(\sigma+io)x} dx \\ F_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln \bar{K}_1(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln \left[ 1 + \frac{\mu_0(\gamma_0 - \gamma) + (\mu\gamma - \mu_0\gamma_0) e^{-2\gamma_0 h}}{(\mu + \mu_0)\gamma} \right] e^{-i\sigma x} d\sigma \end{aligned} \quad (1.27)$$

Из (1.18) и (1.27) следует, что при  $|\sigma| \rightarrow \infty$   $\bar{K}_1(\sigma) \rightarrow 1$ , а  $\ln \bar{K}_1(\sigma) = O(|\sigma|^{-2})$ . Следовательно,  $F(x) \sim O(1)$  при  $|x| \rightarrow 0$ . Тогда из (1.27) следует, что  $\bar{F}_1^\pm(\sigma) = O((\sigma \pm i0)^{-1})$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ . Следовательно, функции  $\bar{K}_1^\pm(\alpha) \rightarrow 1$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  в своих областях регулярности [6].

С другой стороны, известна явная факторизация функции  $\bar{E}_1(\sigma)$  из (1.17) [6]

$$\bar{E}_1(\sigma) = (\gamma_0 h)^{-1} e^{-\gamma_0 h} \text{sh}(\gamma_0 h) = \bar{E}_1^+(\sigma) \bar{E}_1^-(\sigma) \quad (1.28)$$

$$\bar{E}_1^\pm(\sigma) = \exp\left[\mp \chi_1(\sigma) - \bar{T}_\pm(\sigma)\right] \prod_{n=1}^\infty \left( 1 \mp \frac{ia_n \sigma}{\sqrt{1 - k_0^2 a_n^2}} \right) e^{\pm ia_n \sigma}, \quad a_n = \frac{h}{\pi n}$$

$$\begin{aligned}\chi_1(\sigma) &= -\frac{ih\sigma}{\pi} \left( 1 + C + \ln \frac{2\pi}{hk_0} \right) + \frac{\sigma h}{2} \\ \bar{T}_+(\sigma) &= \frac{ih\sqrt{\sigma^2 - k_0^2}}{\pi} \ln \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - k_0^2}}{k_0}, \quad \bar{T}_-(\sigma) = \bar{T}_+(-\sigma)\end{aligned}\quad (1.29)$$

где  $C = 0,5772\dots$  – постоянная Эйлера.

Здесь под  $\ln \alpha$  понимается ветвь, для которой  $\ln(-1) = i\pi$ . При этом, функция  $\bar{E}_1^\pm(\sigma)$  из (1.28) стремится к нулю как  $(\sigma + i0)^{-1/2}$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ .

Подставляя (1.26) и (1.28) в (1.14) и используя представление

$$2\pi i \delta(\sigma + \gamma_N) = (\sigma + \gamma_N - i0)^{-1} - (\sigma + \gamma_N + i0)^{-1} \quad (1.30)$$

где первое слагаемое регулярно в нижней полуплоскости, а второе – в верхней, получим

$$\begin{aligned}\bar{M}^-(\sigma) &= \frac{(\sigma - k_0) \bar{E}_1^-(\sigma) \bar{S}^-(\sigma) + iA_N(1 + \cos \pi N) \frac{k_0 + \gamma_N}{\sigma + \gamma_N - i0} \bar{E}_1^-(\gamma_N)}{\bar{K}_1^-(\sigma)} = \\ &= \mu_* \frac{\bar{K}_1^+(\sigma) \bar{D}'^+(\sigma) + A_N(1 - \cos \pi N) \bar{E}_1^-(\gamma_N) \frac{k_0 + \gamma_N}{\sigma + \gamma_N + i0}}{h(\sigma + k_0) \bar{E}_1^+(\sigma) + 2i \bar{K}_1^-(\gamma_N)} = \bar{M}^+(\sigma)\end{aligned}\quad (1.31)$$

Следуя [8,11], применим обратное преобразование к (1.31), получим

$$M^+(x) = M^-(x), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.32)$$

которое может иметь место, если только

$$M^+(x) = M^-(x) = \sum_{k=0}^m l_k \delta^{(k)}(x) \quad (1.33)$$

где  $\delta^{(k)}(x)$  –  $k$ -тая производная  $\delta(x)$  [11,12].

Применив к (1.32) обобщенное преобразование Фурье, с учетом (1.33) получим

$$\bar{M}^+(\sigma) = \bar{M}^-(\sigma) = \sum_{k=0}^m (-1)^k l_k \sigma^k \quad (1.34)$$

Теперь, имея в виду поведение функций  $\bar{K}_1^\pm(\sigma)$  и  $\bar{E}_1^\pm(\sigma)$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  и порядок убывания неизвестных функций  $\bar{S}^-(\sigma)$  и  $\bar{D}'^+(\sigma)$  [1,13]:

$$\bar{S}^-(\sigma) = O(|\sigma|^{-1}), \quad \bar{D}'^+(\sigma) = O(|\sigma|^{-1/2}), \quad |\sigma| \rightarrow \infty \quad (1.35)$$

из (1.31) и (1.34) получим, что  $l_k = 0 (k = \overline{0, m})$ , т.е.

$$\bar{M}^+(\sigma) = \bar{M}^-(\sigma) \equiv 0 \quad (1.36)$$

Следовательно, из (1.31) получим окончательное решение функционального уравнения (1.14) в виде

$$\bar{D}'^+(\sigma) = \frac{iA_N(1 + \cos \pi N) h \bar{E}_1^-(\gamma_N) (\sigma + k_0) \bar{E}_1^+(\sigma)}{2\mu_* (k_0 + \gamma_N)^{-1} \bar{K}_1^-(\gamma_N) (\sigma + \gamma_N + i0) \bar{K}_1^+(\sigma)} \quad (1.37)$$

Аналогичным путем решение функционального уравнения (1.15)

представляется в виде

$$\bar{S}'^+(\sigma) = \frac{iA_N(1 - \cos \pi N) \sqrt{k_0 + \gamma_N} \bar{E}_2^-( -\gamma_N)}{2\mu_* \bar{K}_2^-( -\gamma_N)} \frac{\sqrt{\sigma + k_0} \bar{E}_2^+(\sigma)}{(\sigma + \gamma_N + i0) \bar{K}_2^+(\sigma)} \quad (1.38)$$

где  $\bar{K}_2^+(\sigma)$  и  $\bar{K}_2^-(\sigma)$  определяются формулами, аналогичными (1.26) и (1.27), заменяя в них индекс "1" на "2", притом,

$$F_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{\mu_0(\gamma_0 - \gamma) - (\mu\gamma - \mu_0\gamma_0) e^{-2\gamma_0 h}}{(\mu + \mu_0)\gamma} \right] e^{-i\sigma x} dx \quad (1.39)$$

Функции  $\bar{E}_2^\pm(\sigma)$  ( $\bar{E}_2(\sigma) = \bar{E}_2^+(\sigma) \bar{E}_2^-(\sigma)$ ) имеют вид [6]

$$\bar{E}_2^\pm(\sigma) = \exp[\mp \chi_2(\sigma) - \bar{T}_\pm(\sigma)] \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 \mp \frac{ib_n \sigma}{\sqrt{1 - k_0^2 b_n^2}} \right) e^{\pm ib_n \sigma}$$

$$\chi_2(\sigma) = -\frac{ih\sigma}{\pi} \left( 1 - C + \ln \frac{\pi}{2hk_0} \right) + \frac{\sigma h}{2}, \quad b_n = 2h/\pi(2n-1) \quad (1.40)$$

где  $\bar{T}_\pm(\sigma)$  дается формулой (1.30).

Таким образом, решение поставленной выше задачи дается формулами (1.37) и (1.38), т. к. имея  $\bar{D}'^+(\sigma)$  и  $\bar{S}'^+(\sigma)$ , при помощи (1.20) и (1.21) можем определить неизвестные  $A, B, C_0, D_0$  и, тем самым, искомое решение.

Из (1.27) и (1.39) следует, что  $\bar{F}_j^+(\sigma) = \bar{F}_j^-( -\sigma)$  и, следовательно,  $\bar{K}_j^+(\sigma) = \bar{K}_j^-( -\sigma)$  ( $j = 1, 2$ ). При этом,  $\bar{F}_j^+(\sigma)$  можно вычислить по формуле

$$\bar{F}_j^+(\sigma) = \frac{1}{2} \ln \bar{K}_j(\sigma) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \bar{K}_j(t) \frac{dt}{t - \sigma}, \quad j = 1, 2 \quad (1.41)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

2. Переходим к определению излученного волнового поля. Отметим, что здесь целесообразно отдельно рассматривать случаи четных и нечетных  $N$ .

а) Если  $N$  четное число, то бегущая по волноводу волна является четной относительно  $y = 0$  функцией (четная задача) и  $1 + \cos \pi N = 2$ ,  $1 - \cos \pi N = 0$ .

Тогда из (1.38) следует, что  $\bar{S}'^+(\sigma) = 0$ , а из (1.20) и (1.21) получим

$$C_0(\sigma) = \bar{D}'^+(\sigma)/4\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0 h), \quad D_0(\sigma) = 0$$

$$A(\sigma) = B(\sigma) = -\mu_0 e^{\gamma h} \bar{D}'^+(\sigma)/2\mu\gamma \quad (2.1)$$

Подставляя эти выражения в (1.8) и (1.11) с учетом (1.10) и (1.39), после обратного преобразования получим выражение для амплитуды перемещений в виде



$$w(x, y) = \frac{-iA_N}{4\pi\mu_*} \bar{M}_1^+(\gamma_N) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{M}_1^+(\sigma) e^{\gamma(h-|y|-i\sigma x)}}{\gamma(\sigma) h(\sigma + \gamma_N + i0)} d\sigma \quad \text{при } |y| \geq h \quad (2.2)$$

$$w_0(x, y) = w_{0N}(x, y) + \frac{iA_N}{4\pi\mu_*} \bar{M}_1^+(\gamma_N) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{M}_1^+(\sigma) \text{ch}(\gamma_0 y) e^{-i\sigma x}}{h(\sigma + \gamma_N + i0) \gamma_0 \text{sh}(\gamma_0 h)} d\sigma \quad (2.3)$$

при  $-h \leq y \leq h$ , где

$$\bar{M}_1^\pm(\sigma) = h(\sigma \pm k_0) \bar{E}_1^\pm(\sigma) / \bar{K}_1^\pm(\sigma) \quad (2.4)$$

б) Если  $N$  – нечетное число, то бегущая по волноводу волна является нечетной относительно  $y = 0$  функцией (нечетная задача) и  $1 + \cos \pi N = 0$ ,  $1 - \cos \pi N = 2$ . Тогда, аналогичным путем вместо (2.2) и (2.3) соответственно, будем иметь

$$w(x, y) = \frac{A_N \text{sgn } y}{4\pi\mu_*} \bar{M}_2^+(\gamma_N) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{M}_2^+(\sigma) e^{\gamma(h-|y|-i\sigma x)}}{\gamma(\sigma + \gamma_N + i0) h} d\sigma \quad \text{при } |y| \geq h \quad (2.5)$$

$$w_0(x, y) = w_{0N}(x, y) - \frac{A_N \bar{M}_2^+(\gamma_N)}{4\pi\mu_*} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{M}_2^+(\sigma) \text{sh}(\gamma_0 y) e^{-i\sigma x}}{(\sigma + \gamma_N + i0) h \gamma_0 \text{ch}(\gamma_0 y)} d\sigma \quad (2.6)$$

при  $-h \leq y \leq h$ , где

$$\bar{M}_2^\pm(\sigma) = h(\sigma \pm k_0) \bar{E}_2^\pm(\sigma) / \bar{K}_2^\pm(\sigma) \quad (2.7)$$

Таким образом, решение задачи в общем случае представляется в виде суммы решений (2.2) и (2.5) в областях  $|y| \geq h$ , и суммы решений (2.3) и (2.6) в области  $-h \leq y \leq h$ . Отметим, что при  $\mu = \mu_0$ ,  $k = k_0$ , т.е. для однородного случая решения (2.2), (2.3), (2.5) и (2.6) точно совпадают с соответствующими решениями, приведенными в [6].

Для вычисления интегралов по вещественной оси, входящих в формулы (2.2)-(2.6), переходим на комплексную плоскость, разрезанную указанным на фиг.2 образом.

Рассмотрим область  $-h \leq y \leq h$ ,  $x > 0$ . Для этой области путь интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  (фиг.2). Следовательно, в этом случае, в интегралах (2.3) и (2.6) при помощи формул (1.17)-(1.19), (1.26) и (1.30) следует перейти от “+” функции к “-” функциям. После этих преобразований перемещение  $w_0(x, y)$  для  $x > 0$  можно представить в виде

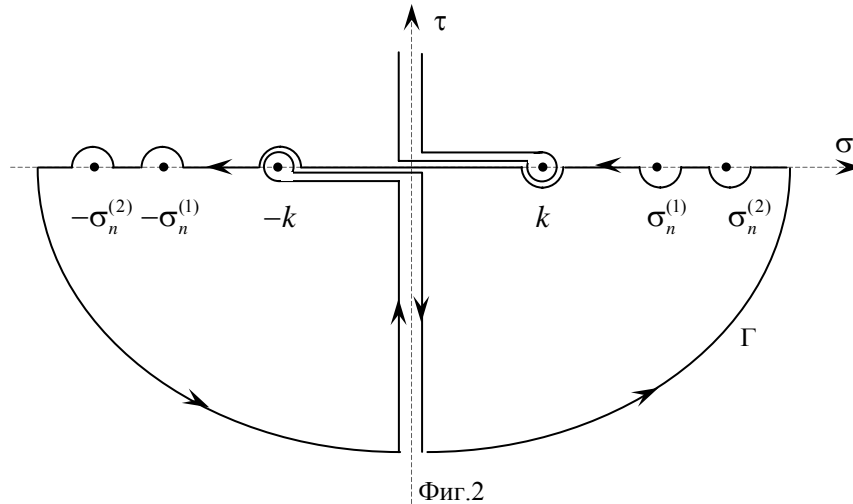
$$w_0(x, y) = -\frac{iA_{2N} \bar{M}_1^+(\gamma_{2N})}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu\gamma(\sigma) \text{ch}(\gamma_0 y) e^{-i\sigma x}}{\bar{M}_1^-(\sigma) L_1(\sigma) (\sigma + \gamma_{2N} - i0)} d\sigma - \quad (2.8)$$

$$-\frac{A_{2N+1} \bar{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu\gamma(\sigma) \text{sh}(\gamma_0 y) e^{-i\sigma x}}{\bar{M}_2^-(\sigma) L_2(\sigma) (\sigma + \gamma_{2N+1} - i0)} d\sigma, \quad x > 0, \quad -h \leq y \leq h$$

где  $\bar{M}_j^\pm(\sigma)$  ( $j = 1, 2$ ) даются формулами (2.4) и (2.7). Отметим, что полюс в точке  $\alpha = -(\sigma + i0)$  в интегралах (2.3) и (2.6) вследствие представления (1.30), всегда дает

составляющая, которая гасит падающую волну. Этим и обусловлено отсутствие падающей волны в  $w_0(x, y)$  (2.8).

В знаменателях подынтегральных выражений (2.8) входят функции  $L_1(\sigma)$  и



Фиг.2

$L_2(\sigma)$ , задаваемые формулами (1.9). Функции  $L_j(\alpha)$  ( $i = 1, 2$ ) очевидно не имеют чисто мнимых корней [6,9]. Они не могут иметь также комплексных корней в разрезанной комплексной плоскости (фиг.2), поскольку, если полагать, что в первой четверти  $\alpha = \alpha_0^{(j)}$ , ( $j = 1, 2$ ) является комплексным корнем  $L_j(\alpha)$ , то тогда и  $\overline{\alpha_0^{(j)}}$  будет корнем  $L_j(\alpha)$ , так как в этом случае имеем  $\sqrt{\alpha^2 - k^2} = \sqrt{\overline{\alpha}^2 - k^2}$ . Но тогда нетрудно убедиться, что поле перемещений имеет составляющее в виде приходящей волны из “+” бесконечности, т. е. нарушается физический смысл задачи.

Таким образом, подынтегральные функции в (2.8) внутри контура интегрирования  $\Gamma$  (фиг.2.) имеют только простые полюса в точках  $\sigma = -\sigma_m^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), т.е. в отрицательных действительных корнях функции  $L_i(\sigma)$ , о которых было сказано выше.

Имея в виду эти замечания, по обычной процедуре контурного интегрирования из (2.8) получим следующее представление амплитуд перемещений в рассматриваемой области:

$$\begin{aligned}
w_0(x, y) = & -\frac{A_{2N} \overline{M}_1^+(\gamma_{2N})}{\pi i \lambda^{-1}} \int_0^\infty \frac{\left(\overline{M}_1^-(i\tau)\right)^{-1} \alpha \alpha_0 \sin(h\alpha_0) \cos(\alpha_0 y)}{\alpha_0^2 \sin^2(h\alpha_0) + \lambda^2 \alpha^2 \cos^2(h\alpha_0)} \frac{e^{-\tau x} d\tau}{\gamma_{2N} - i\tau} + \\
& + \frac{A_{2N+1} \overline{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{\pi \lambda^{-1}} \int_0^\infty \frac{\left(\overline{M}_2^-(i\tau)\right)^{-1} \alpha \alpha_0 \cos(\alpha_0 h) \sin(\alpha_0 y) e^{-i\sigma x}}{\alpha_0^2 \cos^2(\alpha_0 h) + \lambda^2 \alpha^2 \sin^2(\alpha_0 h)} \frac{e^{-\tau x} d\tau}{\gamma_{2N+1} - i\tau} - \\
& - \frac{A_{2N} \overline{M}_1^+(\gamma_{2N})}{\pi \lambda^{-1}} \int_{-k}^0 \frac{\left(\overline{M}_1^-(\sigma)\right)^{-1} \beta \beta_0 \sin(h\beta_0) \cos(y\beta_0)}{\beta_0^2 \sin^2(h\beta_0) + \lambda^2 \beta^2 \cos^2(h\beta_0)} \frac{e^{-i\sigma x} d\sigma}{\gamma_{2N} + \sigma} + \\
& + \frac{i A_{2N+1} \overline{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{\pi \lambda^{-1}} \int_{-k}^0 \frac{\left(\overline{M}_2^-(\sigma)\right)^{-1} \beta \beta_0 \cos(h\beta_0) \sin(y\beta_0)}{\beta_0^2 \cos^2(h\beta_0) + \lambda^2 \beta^2 \sin^2(h\beta_0)} \frac{e^{-i\sigma x} d\sigma}{\gamma_{2N} + \sigma} + \Lambda(x, y)
\end{aligned}$$

$$x > 0, \quad -h \leq y \leq h \quad (2.9)$$

где

$$\alpha = \sqrt{k^2 + \tau^2}, \quad \alpha_0 = \sqrt{k_0^2 + \tau^2}, \quad \beta = \sqrt{k^2 - \sigma^2}, \quad \beta_0 = \sqrt{k_0^2 - \sigma^2} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda(x, y) = & \frac{A_{2N} \overline{M}_1^+(\gamma_{2N})}{2\pi} \sum_{m=1}^n \frac{a_m^{(1)}}{\sigma_m^{(1)} - \gamma_{2N}} \cos\left(\sqrt{k_0^2 - (\sigma_m^{(1)})^2} y\right) e^{i\sigma_m^{(1)} x} - \\
& - \frac{A_{2N+1} \overline{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{2\pi} \sum_{m=1}^{n_1} \frac{a_m^{(2)}}{\sigma_m^{(2)} - \gamma_{2N+1}} \sin\left(\sqrt{k_0^2 - (\sigma_m^{(2)})^2} y\right) e^{i\sigma_m^{(2)} x}
\end{aligned} \quad (2.11)$$

$$a_m^{(j)} = \frac{\mu \sqrt{(\sigma_m^{(j)})^2 - k^2}}{\overline{M}_j^-(\sigma_m^{(j)}) L_j'(\sigma_m^{(j)})}, \quad L_j'(\sigma) = \partial L_j / \partial \sigma \quad (j = 1, 2) \quad (2.12)$$

Здесь  $n_1 = n - 1$  при  $(n - 1)\pi < h\sqrt{k_0^2 - k^2} \leq \frac{(2n - 1)\pi}{2}$  и  $n_1 = n$  при  $(2n - 1)\pi/2 < h\sqrt{k_0^2 - k^2} \leq \pi n$ ,  $\lambda = \mu/\mu_0$ .

Следует отметить, что в (2.9) составляющая  $\Lambda(x, y)$  представляет сумму локализованных излученных волн, распространяющихся по несвободной части слоя. При этом, волновым числам  $\sigma_m^{(1)}$  соответствуют известные поверхностные волны Лява.

Определение перемещений в дальней  $x \rightarrow +\infty$  зоне рассматриваемой области сводится к определению асимптотических поведений интегральных составляющих из (2.9) при  $x \rightarrow +\infty$ . Не останавливаясь здесь (и в дальнейшем) на этих довольно-таки громоздких вычислениях, приведем окончательные результаты, определяющие волновое поле в дальней  $x \rightarrow +\infty$  зоне. Оно дается формулой

$$w_0(x, y) = \left( C_{2N} \cos\left(\sqrt{k_0^2 - k^2} y\right) - C_{2N+1} \sin\left(\sqrt{k_0^2 - k^2} y\right) \right) e^{i\left(kx - \frac{\pi}{4}\right)} \times \\ \times \left( (kx)^{-3/2} + O(x^{-5/2}) \right) - \Lambda(x, y), \quad -h \leq y \leq h, \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.13)$$

Здесь  $\Lambda(x, y)$  дается (2.11), а

$$C_{2N} = \frac{A_{2N} \lambda \bar{M}_1^+(\gamma_{2N})}{2\pi i \bar{M}_1^+(k)} \sqrt{\frac{2\pi k}{k_0^2 - k^2}} \frac{1}{(\gamma_{2N} - k) \sin\left(h\sqrt{k_0^2 - k^2}\right)} \quad (2.14)$$

$$C_{2N+1} = \frac{A_{2N+1} \lambda \bar{M}_2^+(\gamma_{2N})}{2\pi i \bar{M}_2^+(k)} \sqrt{\frac{2\pi k}{k_0^2 - k^2}} \frac{1}{(\gamma_{2N+1} - k) \cos\left(h\sqrt{k_0^2 - k^2}\right)}$$

Из (2.13) следует, что при  $|y| \leq h$ ,  $x \rightarrow +\infty$  волновое поле представляется в виде суммы сдвиговой объемной волны и конечного числа локализованных волн. Так что неволновые части из (2.9) в асимптотике сокращаются и в итоге остается волновая часть. Из (2.13) также следует, что объемная сдвиговая волна (2.13) в слое движется со скоростью распространения сдвиговой волны в пространстве, которое означает, что оно в асимптотике ( $x \rightarrow +\infty$ ) “диктует” свою скорость распространения объемной волны в слое.

В заключении данного пункта следует отметить, что представление (2.13) получено при условиях

$$h\sqrt{k_0^2 - k^2} \neq \pi(n-1), \quad h\sqrt{k_0^2 - k^2} \neq \frac{\pi(2n-1)}{2}, \quad n=1, 2, \dots$$

В этих особых случаях, когда

$$h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(n-1) \text{ или } h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(2n-1)/2, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.15)$$

из (2.14) следует, что  $C_N \rightarrow \infty$  (явление типа резонанса) и, следовательно, представление (2.13) уже непригодно. Исследование этих особых случаев показало, что асимптотика объемной волны в рассматриваемой  $-h \leq y \leq h$ ,  $x \rightarrow +\infty$  области дается формулами

$$\left[ w_0(x, y) \right]_{\text{об}} = \frac{A_{2(n-1)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^{n-1} \bar{M}_1^+(\gamma_{2(n-1)})}{\bar{M}_1^+(k)} \frac{hk}{\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{kx}} + O(x^{-3/2}) \right) \times \\ \times e^{i(kx - \pi/4)} \cos \frac{\pi(n-1)}{h} y \quad (2.16)$$

при  $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(n-1)$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,

$$\begin{aligned} [w_0(x, y)]_{06} &= A_{2n-1} (-1)^n \frac{\bar{M}_2^+(\gamma_{2(n-1)})}{\sqrt{2\pi\bar{M}_2^+(k)}} \frac{hk}{\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{kx}} + O(x^{-3/2}) \right) \times \\ &\times e^{i(kx-\pi/4)} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2h} y \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\text{при } h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \frac{\pi(2n-1)}{2}, \quad n=1, 2, \dots$$

Таким образом, в указанных (2.15) особых случаях амплитуда объемной волны в слое имеет порядок убывания  $O(x^{-1/2})$  (подобно однородному случаю) при  $x \rightarrow +\infty$ . При этом, оказывается, что если для некоторого фиксированного  $n^*$   $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(n^* - 1)$ , то поверхностная волна, соответствующая волновому числу  $\sigma_n^{(1)}$ , не появляется, а если  $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(2n^* - 1)/2$ , то отсутствует поверхностная волна с волновым числом  $\sigma_n^{(2)}$ . По-видимому, за счет этого и снижается порядок убывания объемной волны (2.16) и (2.17) при  $x \rightarrow \infty$ .

3. Волновое поле в области ( $-h \leq y \leq h$ ,  $x < 0$ ) определяется суммой решений (2.3) и (2.6). Переходим в разрезанную комплексную плоскость (фиг.2), замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости. Подынтегральные функции внутри контура интегрирования имеют только простые полюса в точках

$$\begin{aligned} \xi_m &= \sqrt{k_0^2 - (\pi m/h)^2}, \quad m=0, 1, 2, \dots \\ \eta_m &= \sqrt{k_0^2 - (\pi(2m-1)/2h)^2}, \quad m=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда, для амплитуды перемещений  $w_0(x, y)$  в области  $-h \leq y \leq h$ ,  $x < 0$  получим

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= w_{0N}(x, y) - A_{2N} \frac{2\mu}{\mu + \mu_0} \left[ \frac{\bar{E}_1^+(k_0) \bar{E}_1(\gamma_{2N})}{\bar{K}_1^+(k_0) \bar{K}_1^+(\gamma_{2N})} e^{-ik_0x} - \right. \\ &\left. - \bar{M}_1^+(\gamma_{2N}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \bar{M}_1^+(\xi_m)}{h\xi_m(\gamma_{2N} + \xi_m)} \cos\left(\frac{\pi m}{h} y\right) e^{-i\xi_m x} \right] + \\ &+ A_{2N+1} \frac{2\mu \bar{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{\mu + \mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\bar{M}_2^+(\eta_m)}{h\eta_m(\gamma_{2N+1} + \eta_m)} \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2h} y\right) e^{-i\eta_m x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $w_{0N}$  – падающая волна, а остальные – отраженные волны.

Из (3.1) следует, что из всех  $\xi_m$  и  $\eta_m$  лишь конечные числа вещественны, а остальные – мнимые. Следовательно, в волноводе ( $x < 0$ ) будут возбуждены конечное число распространяющихся отраженных волн и бесконечное число нераспространяющихся отраженных волн. При этом, из (3.2) видно, что при

$\mu \rightarrow 0$ , т.е. когда полупространства отсутствуют, то в волноводе остается только падающая волна.

В частном  $N = 0$  случае, когда падает одна нулевая волна, и если  $2hk_0 < \pi$ , то будем иметь только одну распространяющуюся отраженную волну, которая при  $x \rightarrow -\infty$  имеет вид

$$w_0(x, y)_{\text{отр}} = -A_0 \frac{2\mu}{\mu + \mu_0} \left[ \frac{\bar{E}_1^+(k_0)}{\bar{K}_1^+(k_0)} \right]^2 e^{-ik_0 x} \quad (3.3)$$

Для однородного ( $\mu = \mu_0, k = k_0$ ) случая, рассмотренного в [6], получим

$$w_0(x, y)_{\text{отр}} = -A_0 \left[ \bar{E}_1^+(k_0) \right]^2 e^{-ik_0 x} \quad (3.4)$$

Коэффициенты при  $\exp(-ik_0 x)$  в (3.3) и (3.4) представляют собой коэффициенты отражения. Отношение этих коэффициентов отражения однородной задачи к неоднородному дается формулой

$$\left( \sqrt{\frac{\mu + \mu_0}{2\mu}} \bar{K}_1^+(k_0) \right)^2 = \left( \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{\psi(\sigma) - 1 + (\lambda - \psi(\sigma)) e^{-2k_0 h \sqrt{\sigma^2 - 1}}}{1 + \lambda} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - 1} \right) \right)^2 \quad (3.5)$$

где  $\psi(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - 1} / \sqrt{\sigma^2 - \nu^2}$ ,  $\nu = k/k_0$ ,  $\lambda = \mu/\mu_0$ , а интеграл понимается в смысле главного значения.

4. Волновое поле в полупространствах  $\Omega_{\pm}$ , как было отмечено, представляется суммой решений (2.2) и (2.5). Для определения асимптотических поведений этих полей в дальних зонах полупространств следует отдельно рассматривать области  $x < 0$  и  $x > 0$ .

Для области  $|y| \geq h, x < 0$  путь интегрирования в разрезанной (фиг.2) комплексной плоскости замыкаем в верхней полуплоскости. Подынтегральные функции в этом случае имеют единственную точку ветвления  $\sigma = k$  и не имеют полюса. Переходя затем в полученных интегралах к полярным координатам

$$x = r \cos \theta, \quad |y| - h = r \sin \theta, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \quad (4.1)$$

при помощи подстановок

$$t(\sigma, \theta) = -\sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta + \sigma |\cos \theta| \quad (4.2)$$

$$t(\sigma, \theta) = +\sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta + \sigma |\cos \theta| \quad (4.3)$$

получим следующее асимптотическое представление для амплитуды перемещений при  $r \rightarrow \infty, |y| \geq h, x < 0$ :

$$\begin{aligned}
w(x, y) = & \frac{2\mu_0}{\sqrt{2\pi(\mu + \mu_0)}} \left[ A_{2N} \frac{\bar{M}_1^+(k|\cos\theta)\bar{M}_1^+(\gamma_{2N})}{h(k|\cos\theta + \gamma_{2N})} + \right. \\
& \left. + iA_{2N+1} \operatorname{sgn} y \frac{\bar{M}_2^+(k|\cos\theta)\bar{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{h(k|\cos\theta + \gamma_{2N+1})} \right] \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}} + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Отметим, что при  $\theta \rightarrow \pi$  из (4.4) получим асимптотику амплитуды перемещений граничных точек полупространств  $y = |h| \pm 0$ ,  $x \rightarrow -\infty$  (берегов трещин). Следовательно, при помощи (3.2) и (4.4) можно определить разность перемещений берегов трещин при  $x \rightarrow -\infty$ .

Для области  $|y| \geq h$ ,  $x > 0$  путь интегрирования в разрезанной комплексной плоскости (фиг.2) замыкаем в нижней полуплоскости. Подынтегральные функции в этом случае имеют единственную точку ветвления  $\sigma = -k$  и полюса в отрицательных нулях  $L_j(\sigma)$ , т.е. в точках  $\sigma = -\sigma_m^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ). Переходя затем к полярным координатам (4.1), при помощи подстановки

$$t(\sigma, \theta) = \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta + \sigma \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi/2 \tag{4.5}$$

получим следующую асимптотическую формулу для амплитуды перемещений объемной волны, при  $r \rightarrow \infty$ ,  $|y| > h$ ,  $x > 0$ :

$$\begin{aligned}
[w(x, y)]_{об} = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ A_{2N} \frac{\bar{M}_1^+(\gamma_{2N})}{\bar{M}_1^+(k \cos \theta)} \frac{(\gamma_{2N} - k \cos \theta)^{-1} k}{1 + i \frac{\mu k \sin \theta \operatorname{ctg} \left( h \sqrt{k_0^2 - k^2 \cos^2 \theta} \right)}{\mu_0 \sqrt{k_0^2 - k^2 \cos^2 \theta}}} + \right. \\
& \left. + A_{2N+1} \operatorname{sgn} y \frac{\bar{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{\bar{M}_2^+(k \cos \theta)} \frac{k(\gamma_{2N+1} - k \cos \theta)^{-1}}{1 - i \frac{\mu k \sin \theta \operatorname{tg} \left( h \sqrt{k_0^2 - k^2 \cos^2 \theta} \right)}{\mu_0 \sqrt{k_0^2 - k^2 \cos^2 \theta}}} \right] \frac{i \sin \theta}{\sqrt{kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} + \\
& + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

5. Распределение амплитуды сдвиговых напряжений  $\tau_{z\theta}$  около концов контактных линий (около концов трещин) можно получить из (2.8). Оно представляется формулой

$$\tau_{z\theta} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2r}} \cos \theta/2 + O(1), \quad r \rightarrow 0, \quad |\theta| \leq \pi \tag{5.1}$$

где

$$K_{III} = \frac{2\mu\mu_0}{\sqrt{\pi h(\mu + \mu_0)}} \left[ iA_{2N}\bar{M}_1^+(\gamma_{2N}) \operatorname{sgn} y - e^{-i\pi/4} A_{2N+1}\bar{M}_2^+(\gamma_{2N+1}) \right] \quad (5.2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + (|y| - h)^2}, \quad \bar{M}_i^\pm(\sigma) \text{ даются формулами (2.4) и (2.7).}$$

Отметим, что при получении асимптотической формулы (5.1) были использованы следующие предельные значения факторизованных функций при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ :

$$\bar{K}_i^\pm(\sigma) \rightarrow 1, \quad (i=1,2), \quad \bar{E}_1^\pm(\sigma) \rightarrow \frac{e^{\pm\pi/4}}{\sqrt{2h(\sigma \pm i0)}}, \quad \bar{E}_2^\pm(\sigma) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.3)$$

$$\text{где } (\sigma \pm i0)^{1/2} = \sigma_+^{1/2} \pm i\sigma_-^{1/2}, \quad \sigma_\pm^{1/2} = \theta(\pm\sigma)|\sigma|^{1/2}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283с.
2. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Манукян Э.А. Дифракция волн Лява на конечной или бесконечной трещине. /В сб.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Ереван: 1984. С.13-17.
3. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.
4. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого слоя в составное упругое пространство. /В сб.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Ереван: 2005. С.19-23.
5. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилаван С.А. Дифракция локализованной сдвиговой волны в упругом пространстве с полубесконечным включением. Смешанные задачи механики деформируемого тела. Саратов: 2005. 330с.
6. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 279с.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 782с.
8. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. / Уч. записки ЕГУ. 1979. № 3. С.29-34.
9. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.46-55.
10. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 335с.
11. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965.
12. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 283с.
13. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. // ПММ. 1968. Т.32. №4. С.632-646.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
9.08.2006