ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3 , 624.04

# СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

Баблоян А.А., Багдасарян А.В.

**Ключевые слова:** полуплоскость, ослабленная полуплоскость, отверстие, трещина, напряжение, перемещение.
**Key words:** half-plane, weakened half-plane, opening, crack, tension, displacement.

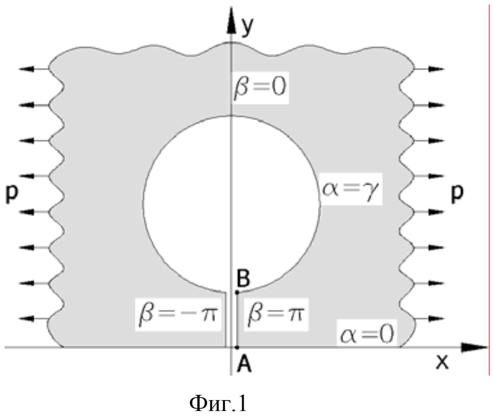
**Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Վ. Բաղդասարյան.**
**Համաչափ խնդիր կլոր անցքով և ճաքով թուլացված կիսահարթության համար**

Բերվում է կլոր անցքով և կիսահարթության եզրին ուղղահայաց ուղղաձիգ ճաքով թուլացված կիսահարթության համար առաձգականության տեսության խնդրի լուծումը: Անցքի և կիսահարթության եզրերին, ինչպես նաև ճաքի ափերին տրված են սիմետրիկ բաշխված նորմալ բեռնվածքներ: Անվերջության վրա կիսահարթությունը ձգվում է հավասարապես բաշխված p ինտենսիվության բեռնվածքով (նկ.1):

**A.H. Babloyan, A.V. Baghdasaryan**
**Symmetric Problem of Elasticity Theory for a Half-Plane Weakened with a Round Opening and a Crack**

The article presents the solution of a symmetric problem of elasticity theory for an elastic half-plane weakened by a round opening and a rectilinear crack, the latter being perpendicular to the edge of the half-plane. Symmetrically distributed normal loadings are given at the edges of the opening, the half-plane and banks of the split. On the infinity the half-plane spreads by equally distributed loadings with ***p*** intensity (fig.1).

Приводится решение задачи теории упругости для упругой полуплоскости, ослабленной круглым отверстием и прямолинейной трещиной, перпендикулярной к границе полуплоскости. На границах отверстия, полуплоскости и на берегах трещины задаются симметрично распределенные нормальные нагрузки. На бесконечности полуплоскость растягивается равномерно распределенными нагрузками




Фиг.1

интенсивности ***p*** (фиг.1). Аналогичная задача была решена другим методом в работе [8].

В силу симметрии задачу будем решать для половины рассматриваемой области $(x \geq 0, \beta \geq 0)$ , удовлетворяя при этом условиям симметрии на линии $\beta = 0$ .

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha,0)=0, \quad \mathrm{v}(\alpha,0)=0 \tag{1}$$

Граничные условия для половины области будут:

$$\begin{aligned}
&a\sigma_\alpha(0,\beta)=f_1(\beta), \quad a\sigma_\alpha(\gamma,\beta)=f_2(\beta), \quad (0\le\beta\le\pi)\\
&\tau_{\alpha\beta}(0,\beta)=0, \quad \tau_{\alpha\beta}(\gamma,\beta)=0, \quad (0\le\beta\le\pi)\\
&a\sigma_\beta(\alpha,\pi)=f_0(\alpha), \quad \tau_{\alpha\beta}(\alpha,\pi)=0, \quad (0\le\alpha\le\gamma)
\end{aligned} \tag{2}$$

Задачу будем решать методом Фурье с использованием биполярной системы координат.

$$x=\frac{a\sin\alpha}{\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta}, \quad y=\frac{a\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta}, \quad x+iy=ai\,\mathrm{cth}\frac{\alpha+i\beta}{2} \tag{3}$$

Известно [1-3], что плоская задача теории упругости сводится к определению бигармонической функции $\Phi$. В биполярной системе координат бигармоническое уравнение приводится к виду [4-5]

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)(g\Phi)=0\\
&\alpha g(\alpha,\beta)=\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta
\end{aligned} \tag{4}$$

где $g(\alpha,\beta)$ – мера отображения (3).

Напряжения и перемещения выражаются через функцию $g\Phi$ формулами [3-4]

$$\begin{aligned}
&a\sigma_\alpha(\alpha,\beta)=\left[(\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\mathrm{ch}\alpha\right](g\Phi)\\
&a\sigma_\beta(\alpha,\beta)=\left[(\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\cos\beta\right](g\Phi)\\
&a\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=-(\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}(g\Phi)\\
&u(\alpha,\beta)=\frac{g(\alpha,\beta)}{2\mu}[(1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}]\\
&\mathrm{v}(\alpha,\beta)=\frac{g(\alpha,\beta)}{2\mu}[(1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}]
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\mu$ – модуль сдвига, $\nu$ – коэффициент Пуассона, а $\Psi$ выражается через функцию $\Phi$ формулой:

$$g\Psi(\alpha,\beta)=(1-\nu)\iint\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right](g\Phi)\,d\alpha\,d\beta, \quad \delta_m=\frac{m\pi}{\gamma} \tag{6}$$

Решение уравнения (4) для рассматриваемой задачи ищем в виде суммы двух рядов Фурье

$$g\Phi(\alpha,\beta)=\Phi_0(\alpha,\beta)+\sum_{m=1}^{\infty}a_m(\beta)\cos\delta_m\alpha+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(\alpha)\cos n\beta \tag{7}$$

где

$$a_m(\beta) = \mathrm{A}_m \operatorname{sh}(\delta_m\beta)\sin\beta + \mathrm{B}_m \operatorname{ch}(\delta_m\beta)\cos\beta, \quad (m = 1,2,...)$$
$$b_n(\alpha) = \mathrm{E}_n \operatorname{ch}[(n+1)\alpha] + \mathrm{F}_n \operatorname{ch}[(n-1)\alpha] + \mathrm{G}_n \operatorname{ch}[(n+1)(\gamma-\alpha)] +$$
$$+ \mathrm{H}_n \operatorname{ch}[(n-1)(\gamma-\alpha)], \quad (n = 2,3,...)$$
$$b_1(\alpha) = \mathrm{E}_1 \operatorname{ch} 2\alpha + \mathrm{F}_1 \operatorname{ch} 2(\gamma-\alpha) + \mathrm{G}_1 + \mathrm{H}_1\alpha$$
$$b_0(\alpha) = \mathrm{E}_0 \operatorname{ch}\alpha + \mathrm{F}_0\alpha \operatorname{ch}(\gamma-\alpha) + \mathrm{G}_0 \operatorname{ch}(\gamma-\alpha) + \mathrm{H}_0(\gamma-\alpha)\operatorname{ch}\alpha \qquad (8)$$
$$\delta_m = m\pi/\gamma, \quad (0 \le \alpha \le \gamma, \quad 0 \le \beta \le \pi)$$

Первое слагаемое формулы (7) имеет вид

$$\Phi_0(\alpha,\beta) = \Phi_1(\alpha,\beta) + \Phi_2(\alpha,\beta), \quad \Phi_2(\alpha,\beta) = ap\left[\cos\beta - \frac{0.5\sin^2\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\right]$$
$$\Phi_1(\alpha,\beta) = c_0\left[2\cos\beta + (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\log\frac{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}\right] \qquad (9)$$

причем функцией $\Phi_2$ задается равномерно распределенная нормальная нагрузка на бесконечности с интенсивностью $p$ .

Разложим функцию $\Phi_0$ в ряд Фурье

$$\Phi_0(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\alpha)\cos(n\beta)$$
$$d_0(\alpha) = (-0.5ap + 2c_0)e^{-\alpha}, \quad d_1(\alpha) = ap - (0.5ap + 2c_0)e^{-\alpha}$$
$$d_n(\alpha) = (4c_0\frac{n\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha}{n^2-1} + ap\operatorname{sh}\alpha)e^{-n\alpha}, \quad (n = 2,4,6...) \qquad (10)$$
$$d_n(\alpha) = (ap\operatorname{sh}\alpha - 4c_0 n^{-1}\operatorname{ch}\alpha)e^{-n\alpha}, \quad (n = 3,5,7...)$$

С учетом (10) представим формулу (7) в виде

$$g\Phi(\alpha,\beta) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\beta)\cos(\delta_m\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty}[b_n(\alpha) + d_n(\alpha)]\cos(n\beta) \qquad (11)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2) на касательные напряжения, получим

$$b_n'(0) + d_n{}'(0) = b_n'(\gamma) + d_n{}'(\gamma) = 0, \quad a_m'(\pi) = 0, \quad (n,m = 1,2,...) \qquad (12)$$

Из граничных условий (2) для нормальных напряжений, с учетом (12), получим следующие дифференциальные уравнения:

$$(\operatorname{ch}\alpha + 1)\frac{\partial^2 g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha^2} - \operatorname{sh}\alpha\frac{\partial g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha} - g\Phi(\alpha,\pi) = F_0(\alpha)$$
$$(1-\cos\beta)\frac{\partial^2 g\Phi(0,\beta)}{\partial\beta^2} - \sin\beta\frac{\partial g\Phi(0,\beta)}{\partial\beta} + g\Phi(0,\beta) = F_1(\beta) \qquad (13)$$
$$(\operatorname{ch}\gamma - \cos\beta)\frac{\partial^2 g\Phi(\gamma,\beta)}{\partial\beta^2} - \sin\beta\frac{\partial g\Phi(\gamma,\beta)}{\partial\beta} + \operatorname{ch}\gamma\, g\Phi(\gamma,\beta) = F_2(\beta)$$
$$F_0(\alpha) = f_0(\alpha), \quad F_1(\beta) = f_1(\beta) + C_1, \quad F_2(\beta) = f_2(\beta) + C_2$$

Из формул (7) и (12) имеем

$$\left.\frac{\partial g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=b_0\,'(0)+d_0\,'(0),\quad \left.\frac{\partial g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\gamma}=b_0\,'(\gamma)+d_0\,'(\gamma)$$

$$\left.\frac{\partial g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\pi}=a_0\,'(\pi)=0 \tag{14}$$

Учитывая эти соотношения для постоянных интегрирования $C_1$ и $C_2$ в формулах (13), получим следующие значения:

$$C_1=0,\quad C_2=\operatorname{sh}\gamma[b_0\,'(\gamma)+d_0\,'(\gamma)] \tag{15}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (13) будут

$$g\Phi(0,\beta)=w_1(\beta)=a_1(1-\cos\beta)+b_1\sin\beta+Q_1(\beta)$$
$$g\Phi(\gamma,\beta)=w_2(\beta)=a_2(\operatorname{ch}\gamma\cos\beta-1)+b_2\sin\beta+Q_2(\beta) \tag{16}$$
$$g\Phi(\alpha,\pi)=w_0(\alpha)=a_0(\operatorname{ch}\alpha+1)+b_0\operatorname{sh}\alpha+Q_0(\alpha)$$

где

$$Q_1(\beta)=\int_{\varepsilon}^{\beta}\frac{\sin\eta-\sin\beta+\sin(\beta-\eta)}{(1-\cos\eta)^2}F_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta$$
$$Q_2(\beta)=\int_{0}^{\beta}\frac{\sin\eta-\sin\beta+\operatorname{ch}\gamma\sin(\beta-\eta)}{(\operatorname{ch}\gamma-\cos\eta)^2}F_2(\eta)\,\mathrm{d}\eta \tag{17}$$
$$Q_0(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}\frac{\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}\xi+\operatorname{sh}(\alpha-\xi)}{(\operatorname{ch}\xi+1)^2}F_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Для сходимости первого интеграла формул (16) будем считать, что граница полуплоскости $(\alpha=0)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $(y=0,$ $x=\pm\infty)$ свободна от внешних напряжений. Это условие в биполярных координатах записывается в виде

$$f_1(\beta)=0,\quad (0\le\beta<\varepsilon<<\pi) \tag{18}$$

Постоянные интегрирования в формулах (16) будем определять из следующих условий:

1) непрерывности функции $g\Phi$ в угловых точках $A(0,\pi)$ и $B(\gamma,\pi)$;

2) четности функции $g\Phi$ по переменной $\beta$;

3) ограниченности функции $g\Phi$ при $\alpha\to\infty$ и $\gamma=\infty$.

Подставляя значения функции $g\Phi$ из (11) в (16) и умножая обе части первых двух уравнений (16) на $\cos n\beta$ $(n=0,1,2,..)$ и интегрируя в пределах $(0,\pi)$, получим

$$\frac{\pi}{2}[b_n(\gamma_k)+d_n(\gamma_k)]+\sum_{m=0}^{\infty}\cos\delta_m\gamma_k\int_0^{\pi}a_m(\beta)\cos n\beta\,\mathrm{d}\beta=\int_0^{\pi}w_k(\beta)\cos n\beta\,\mathrm{d}\beta$$

$$\pi[b_0(\gamma_k)+d_0(\gamma_k)]+\sum_{m=0}^{\infty}\cos\delta_m(\gamma_k)\int_0^{\pi}a_m(\beta)\,\mathrm{d}\beta=\int_0^{\pi}w_k(\beta)\,\mathrm{d}\beta \tag{19}$$

$$(k=1,2;\ n=1,2,..)$$

где $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \gamma$ .

Аналогичным образом, если обе части последнего уравнения (16) умножить на $\cos\delta_m\alpha \quad (m = 0,1,2,..)$ и проинтегрировать по $\alpha$ в пределах $(0,\gamma)$ , получим

$$a_m(\pi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\gamma} \int_0^{\gamma} b_n(\alpha)\cos(\delta_m\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha = \frac{2}{\gamma}\int_0^{\gamma}[w_0(\alpha) - \Phi_0(\alpha,\pi)]\cos(\delta_m\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha$$

$$a_0(\pi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma} \int_0^{\gamma} b_n(\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha = \frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma}[w_0(\alpha) - \Phi_0(\alpha,\pi)]\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha, \;\; (m = 1,2,..) \quad (20)$$

Старые неизвестные постоянные, входящие в (7-8) или (11), будем определять из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
&(n+1)\,\mathrm{G}_n\,\mathrm{sh}[(n+1)\gamma] + (n-1)\mathrm{H}_n\mathrm{sh}[(n-1)\gamma] - d_n(0) = 0\\
&(n+1)\,\mathrm{E}_n\,\mathrm{sh}[(n+1)\gamma] + (n-1)\mathrm{F}_n\mathrm{sh}[(n-1)\gamma] + d_n(\gamma) = 0\\
&(n-1)(\mathrm{F}_n + \mathrm{H}_n)\mathrm{sh}[(n-1)\gamma] = (-1)^n X_n / \pi\\
&(n-1)(-\mathrm{F}_n + \mathrm{H}_n)\mathrm{sh}[(n-1)\gamma] = (-1)^n Y_n / \pi, \quad (n \ge 2)
\end{aligned} \qquad (21.1)$$

$$\begin{aligned}
&-2\mathrm{F}_1\mathrm{sh}(2\gamma) + \mathrm{H}_1 + d_1(0) = 0, \quad 2\,\mathrm{E}_1\,\mathrm{sh}(2\gamma) + \mathrm{H}_1 + d_1(\gamma) = 0\\
&\pi(2\,\mathrm{G}_1 + \mathrm{H}_1\gamma) = -2X_1, \quad 2\pi\mathrm{H}_1 = Y_1
\end{aligned} \qquad (21.2)$$

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{E}_0 + \mathrm{G}_0)\mathrm{sh}\gamma = (\mathrm{F}_0 + \mathrm{H}_0)(\mathrm{ch}\,\gamma - 1), \quad (\mathrm{E}_0 + \mathrm{G}_0) = X_0\\
&(\mathrm{G}_0 - \mathrm{E}_0)\mathrm{sh}\gamma = (\mathrm{F}_0 - \mathrm{H}_0)(\mathrm{ch}\,\gamma + 1), \quad (\mathrm{G}_0 - \mathrm{E}_0) = Y_0
\end{aligned} \qquad (21.3)$$

$$\mathrm{A}_m + \delta_m\,\mathrm{B}_m = 0, \quad \gamma(1 + \delta_m^{\,2})\mathrm{sh}(\pi\delta_m)\,\mathrm{B}_m = -2Z_m \quad (21.4)$$

где $X_n, Y_n$ и $Z_m \; (m,n = 0,1,2,...)$ – новые неизвестные постоянные.

Вычисляя интегралы, входящие в (19) и (20), после ряда преобразований, для определения новых неизвестных постоянных получим следующую совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{Z_m\,\mathrm{cth}(\pi\delta_m)}{1 + \delta_m^{\,2}} + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{4nX_n}{\pi\Delta(m,n)} = \int_0^{\gamma}[w_0(\alpha) - \Phi_0(\alpha,\pi)]\cos(\delta_m\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha -\\
&-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n[(n-1)^2 + \delta_m^{\,2}][d_n(0) - d_n(\gamma)]}{\Delta(m,n)} - \frac{2(\mathrm{E}_0 + \mathrm{G}_0)\mathrm{sh}\gamma}{(1 + \delta_m^{\,2})^2}, \;\; (m = 2,4,6..)\\
&\chi_n X_n + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)} = (-1)^n \int_0^{\pi}[w_1(\beta) + w_2(\beta)]\cos n\beta\,\mathrm{d}\,\beta -\\
&-\frac{\pi(-1)^n}{2}\left[\frac{d_n(0) - d_n(\gamma)}{n+1}\mathrm{cth}\frac{(n+1)\gamma}{2} + d_n(0) + d_n(\gamma)\right] \quad (n = 1,2,...)
\end{aligned} \qquad (22)$$

$$\frac{Z_m \operatorname{cth}(\pi\delta_m)}{1+\delta_m{}^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4nY_n}{\pi\Delta(m,n)}=\int_0^{\gamma}[w_0(\alpha)-\Phi_0(\alpha,\pi)]\cos(\delta_m\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n[(n-1)^2+\delta_m{}^2][d_n(0)-d_n(\gamma)]}{\Delta(m,n)}-\frac{2(\mathrm{G}_0-\mathrm{E}_0)\operatorname{sh}\gamma}{(1+\delta_m{}^2)^2},\ (m=1,3,5..)$$

$$\eta_n Y_n+\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)}=(-1)^n\int_0^{\pi}[w_1(\beta)-w_2(\beta)]\cos n\beta\,\mathrm{d}\,\beta- \tag{23}$$

$$-\frac{\pi(-1)^n}{2}\left[\frac{d_n(0)+d_n(\gamma)}{n+1}\operatorname{th}\frac{(n+1)\gamma}{2}+d_n(0)-d_n(\gamma)\right]\quad(n=1,2,...)$$

где

$$\chi_1=1,\quad \chi_n=\frac{\operatorname{sh}(n\gamma)+n\operatorname{sh}\gamma}{(n^2-1)[\operatorname{ch}(n\gamma)-\operatorname{ch}\gamma]},\quad (n=2,3,...)$$

$$\eta_1=\frac{\gamma-\operatorname{th}\gamma}{4},\quad \eta_n=\frac{\operatorname{sh}(n\gamma)-n\operatorname{sh}\gamma}{(n^2-1)[\operatorname{ch}(n\gamma)+\operatorname{ch}\gamma]},\quad (n=2,3,...) \tag{24}$$

$$\Delta(m,n)=\delta_m{}^4+2(n^2+1)\delta_m{}^2+(n^2-1)^2$$

Постоянные $X_0, Y_0$ и $c_0$ будем определять из следующих уравнений:

$$2X_0\operatorname{sh}\gamma+\frac{\gamma X_1}{\pi}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4nX_n}{\pi(n^2-1)^2}=\int_0^{\gamma}[w_0(\alpha)-\Phi_0(\alpha,\pi)]\,\mathrm{d}\,\alpha-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{d_n(0)-d_n(\gamma)}{(n+1)^2},\quad (m=0)$$

$$\pi\Big(d_0(0)+d_0(\gamma)+X_0\left[\operatorname{ch}\gamma+1+\gamma\operatorname{cth}(\gamma/2)\right]\Big)+$$

$$+\sum_{m=2,4,6}^{\infty}\frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)}=\int_0^{\pi}[w_1(\beta)+w_2(\beta)]\,\mathrm{d}\,\beta \tag{25}$$

$$\pi\Big(d_0(0)-d_0(\gamma)+Y_0\left[\operatorname{ch}\gamma-1-\gamma\operatorname{th}(\gamma/2)\right]\Big)+$$

$$+\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)}=\int_0^{\pi}[w_1(\beta)-w_2(\beta)]\,\mathrm{d}\,\beta$$

Исследуем бесконечные системы. Для оценки сумм модулей коэффициентов при неизвестных постоянных заменим эти суммы интегралами с точностью до бесконечно малых величин.

$$\int_0^{\infty}\frac{n\,\mathrm{d}\,n}{\Delta(m,n)}=\frac{1}{4\delta_m}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta_m{}^2-1}{2\delta_m}\right)\right],\quad \int_0^{\infty}\frac{\delta_m\,\mathrm{d}\,\delta_m}{\Delta(m,n)}=\frac{1}{8n}\log\frac{(n+1)^2}{(n-1)^2}$$

$$\sum_{m=2,4,6}^{\infty}\frac{8\delta_m(n^2-1)}{\gamma\Delta(m,n)}=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{5n4}+...\right)\left[1+o(n)\right] \tag{26}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(\delta_m{}^2+1)}{\pi\Delta(m,n)}=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3\delta_m{}^2}+\frac{1}{5\delta_m{}^4}+...\right)\left[1+o(n)\right]$$

С использованием (26) легко доказать, что нормы бесконечных систем не превосходят $2/\pi$. Если внешняя нагрузка достаточно гладкая, то свободные члены бесконечных систем будут стремиться к нулю. Таким образом, бесконечные системы вполне регулярны и их можно решать методом редукции или последовательных приближений.

Выражая старые коэффициенты через новые и подставляя эти значения в формулы (8) для функций $a_m(\beta)$ и $b_n(\alpha)$, получим

$$b_n(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n \operatorname{ch}[(n-1)\alpha](X_n-Y_n)}{(n-1)\operatorname{sh}[(n-1)\gamma]}+\frac{(-1)^n \operatorname{ch}[(n-1)(\gamma-\alpha)](X_n+Y_n)}{(n-1)\operatorname{sh}[(n-1)\gamma]}-\right.$$
$$-\frac{\operatorname{ch}[(n+1)(\gamma-\alpha)][(-1)^n(X_n+Y_n)-2\pi d_n(0)]}{(n+1)\operatorname{sh}[(n+1)\gamma]}-$$
$$\left.-\frac{\operatorname{ch}[(n+1)\alpha][(-1)^n(X_n-Y_n)+2\pi d_n(\gamma)]}{(n+1)\operatorname{sh}[(n+1)\gamma]}\right),\quad (n=2,3,...)$$

$$b_1(\alpha)=-\frac{1}{4\pi}\big(4X_1+Y_1[-2\alpha+\operatorname{sech}(\gamma)\operatorname{sh}(2\alpha-\gamma)+\gamma]-$$
$$-2\pi\operatorname{csch}(2\gamma)[\operatorname{ch}[2(\alpha-\gamma)]d_1(0)-\operatorname{ch}(2\alpha)d_1(\gamma)]\big),\quad (n=1) \tag{27}$$

$$b_0(\alpha)=\frac{1}{2}\big(\operatorname{cth}(\gamma/2)X_0[-\alpha\operatorname{ch}\alpha+\alpha\operatorname{ch}(\alpha-\gamma)+\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}(\alpha-\gamma)+\gamma\operatorname{ch}\alpha]-$$
$$-\operatorname{th}(\gamma/2)Y_0[-\alpha(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{ch}(\alpha-\gamma))+\operatorname{sh}\alpha+\operatorname{sh}(\alpha-\gamma)+\gamma\operatorname{ch}\alpha],\quad (n=0)$$

$$a_m(\beta)=\frac{2Z_m[\cos\beta\operatorname{ch}(\beta\delta_m)-\delta_m\sin\beta\operatorname{sh}(\beta\delta_m)]}{-\gamma(1+\delta_m{}^2)\operatorname{sh}(\pi\delta_m)},\quad (m=1,2,...)$$

Исследование бесконечных систем [6-7] показывает, что неизвестные постоянные имеют следующие асимптотические поведения:

$$X_k=x_0/k,\quad Y_k=y_0/k,\quad Z_k=z_0/\gamma_m,\quad (k,m>>1) \tag{28}$$

Если граничные значения касательных напряжений равны нулю, то $x_0=y_0=z_0$. В этом случае нормальные напряжения в угловых точках $A(0,\pi)$ и $B(\gamma,\pi)$ остаются ограниченными. В противном случае нормальные напряжения в этих точках будут иметь логарифмические особенности.

В том случае, когда на берегах трещины задаются условия гладкого контакта $\mathrm{v}_\beta(\alpha,\pi)=\mathrm{v}_0$, $\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\pi)=0$ $(0\le\alpha\le\gamma)$, то есть в трещину помещено абсолютно жесткое тело постоянной толщины, будем иметь

$$\frac{\partial g\Psi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha}-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha+1}g\Psi(\alpha,\pi)=2\mu v_o,\quad a_m{}'(\pi)=0 \tag{29}$$

где

$$\Psi(\alpha,\pi)=(1-\nu)\left\{-\sum_{m=1}^{\infty}\left[(\delta_m{}^2+1)\int_0^{\pi}a_m(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right]\frac{\sin(\delta_m\alpha)}{\delta_m}+\right.$$
$$\left.+\pi\left[b_0{}'(\alpha)+d_0{}'(\alpha)-\int\big(b_0(\alpha)+d_0(\alpha)\big)\,\mathrm{d}\,\alpha\right]\right\} \tag{30}$$

Рассматривая условие (1) как дифференциальное уравнение и решая его, получим

$$g\Psi(\alpha,\pi)=\mathrm{C}_0(\mathrm{ch}\,\alpha+1)+\frac{2\mu\,\mathrm{v}_0}{1-\nu}\mathrm{sh}\,\alpha \tag{31}$$

Подставляя значения $\Psi(\alpha,\pi)$ из (30) в (31) и обращая полученный тригонометрический ряд, получим

$$2\delta_m Z_m=[1-(-1)^m]\left(\frac{\mu\,\mathrm{v}_0}{1-\nu}-\pi Y_0\right),\quad (m=1,2,...)$$
$$C_0=0,\quad X_0=-\frac{\mu\,\mathrm{v}_0}{\pi(1-\nu)} \tag{32}$$

Точные значения постоянных $X_k$ и $Y_k$ $(k=1,2,...)$ можно получить из (22) и (23) с учетом (32). Значения постоянных $X_0$, $Y_0$ и $c_0$ определяются из последних двух уравнений (25) с учетом (32).

Таким образом, в этом случае задача решается точно.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
2. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1967. 402 с.
4. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.: ГТТИ. 1950.
5. Баблоян А.А. Контактные и смешанные задачи для однородных и составных тел. // Докторская диссертация. Ленинград: 1979. 346 с.
6. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. Киев: Академпериодика, 2002. 342 с.
7. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. Думка, 1978. 311 с.
8. Григорян С.С., Тер-Петросян Г.В. Определение роста граничной трещины полости полупространства// IV Всесоюзная конференция “Смешанные задачи механики деформируемого тела”. Одесса: 1989. 89 с.



Ереванский государственный университет
архитектуры и строительства



Поступила в редакцию
6.02.2007