ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ СОСТАВНОГО КЛИНА С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Агаларян О.Б.

Ключевые слова: Составное упругое тело, концентраторы напряжения, явление малонапряженности.
Keywords: Compound elastic body, stress concentrator, understressed effect.

Հ. Բ. Աղալարյան

Ծերջավոր ճաքով թուլացված բաղադրյալ սեպի հարթ խնդրի մասին

Դիտարկվում է կամայական անկյունային բացվածքով երկու սեպերից կազմված բաղադրյալ սեպի՝ որը պարունակում է վերջավոր երկարությամբ շառավղային ճաք, լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը առաձգականության տեսության հարթ խնդրի դրվացքով: Նախապես, ներմուծվում են երկու նոր անհայտ ֆունկցիաներ, որոնք հնարավորություն են տալիս խառը եզրային խնդրի լուծումը հանգեցնել այնպիսի խնդրի լուծմանը, երբ եզրային պայմանները տրված են միայն լարումների թենզորի կոմպոնենտների միջոցով. Այնուհետև, ներմուծված անհայտ ֆունկցիաները որոշելու համար ճաքի եզրերի վրա տրված պայմաններից արտածվում են սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգ; Ընդ որում, օգտագործվում են նոր կոմբինացված մեխանիկական պարամետրեր, որոնք էապես պարզեցնում են վերջնական արտահայտությունների անալիտիկական տեսքերը. և որոնց փոփոխման տիրույթը, ի տարբերություն Դանդերսի պարամետրերի /3/ հանդիսանում է քառակուսի, որի կենտրոնը հանդիսանում է կոորդինատների սկզբնակետը իսկ կողմի երկարությունը հավասար է երկուսի.

Ստացված լուծումների հիման վրա որոշվում են ինչպես լարումների վարքը սեպերի միացման գագաթի շրջակայքում այնպես էլ լարումների ինտենսիվության գործակիցները ճաքի գագաթներում:

H.B. Aghalaryan

On Plane Problem Compound Wedge with Radial Crack

In the statement of plane problem of the theory of elasticity the stress-strain state of compound wedge made from two different materials and contained on the common bound crack of the finite length is considered. In the polar coordinate system new unknown functions that allow the solution of mixed problem brought to the solution of the problem with boundary conditions only for the component of stress tensor are inserted.

On the base of received solution both behavior of stress and the coefficients of stress concentration in the crack apex and in a vicinity of connection of compound body are determined.

В постановке плоской задачи теории упругости рассматривается напряженно-деформированное состояние составного клина, изготовленного из двух различных материалов и содержащей на общей грани трещину конечной длины. В полярной координатной системе предварительно вводятся новые неизвестные функции, что позволяет решение смешанной задачи свести к решению задачи с граничными условиями, написанными только относительно компонент тензора напряжений. Далее из граничных условий на берегах трещины для определения вводимых функций при помощи интегрального преобразования Меллина получается система сингулярных интегральных уравнений. При этом используются новые комбинированные физические параметры, которые существенно упрощают окончательные аналитические выражения и в отличие от параметра Дандерса они изменяются в квадрате с центром в начале координат и длиной стороны, равной двум.

На основе полученного решения определяется как поведение напряжений, так и коэффициенты концентрации напряжений в вершинах трещины и в окрестности соединения составного тела.

В постановке плоской задачи теории упругости рассматривается напряженно-деформированное состояние составного клина, изготовленного из двух различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. Принимается, что на общей грани содержится трещина произвольного расположения и длины. Составное тело нагружено внешними нормальными и касательными нагрузками, которые приложены к берегам трещины, равны по величине и противоположны по направленнию, а внешные грани свободны от нагрузок. Из решенных краевых задач для составных тел отметим [1-4] .

1.Пусть $\Omega_i \ (i=1,2)$ – два бесконечных клина, которые соединены вдоль их общих граней и находятся в плоском деформированном состоянии. В полярной координатной системе (r,ϑ) имеем следующие уравнения статики:

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\sigma_r-\sigma_\theta=0 \\ \dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+r\dfrac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r}+2\tau_{r\vartheta}=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

и уравнение неразрывности, написанное в компонентах напряжений

$$\Delta(\sigma_r+\sigma_\vartheta)=0, \text{ где } \Delta=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \tag{1.2 }$$

Компоненты напряжения и деформации связаны по закону Гука.

$$\begin{cases} \varepsilon_r=\dfrac{1}{2\mu}\left[\sigma_r-\left(1-\dfrac{m}{4}\right)(\sigma_r+\sigma_\vartheta)\right] \\ \varepsilon_\vartheta=\dfrac{1}{2\mu}\left[\sigma_\vartheta-\left(1-\dfrac{m}{4}\right)(\sigma_r+\sigma_\vartheta)\right] \\ \gamma_{r\vartheta}=\dfrac{1}{\mu}\tau_{r\vartheta} \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\mu-$ модуль сдвига, а m – величина, связанная с постоянным коэффициентом Пуассона соотношением $m=4(1-\nu)$ для плоского деформированного состояния, а $m=\dfrac{4}{1+\nu}-$для обобщенного плоского напряженного состояния. Компоненты деформации и компоненты вектора перемещения u,v связаны линейными сотноошениями:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\vartheta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\vartheta}, \qquad \gamma_{r\vartheta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+\frac{\partial v}{\partial r} \tag{1.4}$$

Систему уравнений (1.1) – (1.2) необходимо решить со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(1)}(r,-\alpha_1)=0 \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}(r,-\alpha_1)=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \sigma_\vartheta^{(2)}(r,\alpha_2)=0 \\ \tau_{r\vartheta}^{(2)}(r,\alpha_2)=0 \end{cases}, \qquad (0\le r\le\infty) \tag{1.5}$$

На общей грани клиньев имеем условия непрерывности напряжений и перемещений

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(1)}(r,0)=\sigma_\vartheta^{(2)}(r,0) \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}\left(r,0=\tau_{r\vartheta}^{(2)}(r,0)\right) \end{cases} \ (0\le r\le\infty), \quad \begin{cases} u^{(1)}(r,0)=u^{(2)}(r,0) \\ v^{(1)}(r,0)=v^{(2)}(r,0) \end{cases}, \ r\notin(l_1,l_2) \tag{1.6}$$

где $(i=1,2)$ – для первого и второго клиньев. (l_1, 0) и (l_2, 0) – координаты концов трещины.

На границах разреза заданы внешние уравновешенные нормальные и касательные нагрузки .

$$\begin{cases} \sigma_{\vartheta}^{(1)}\left(r,0\right)=\sigma_{\vartheta}^{(2)}\left(r,0\right)=p\left(r\right) \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}\left(r,0\right)=\tau_{r\vartheta}^{(2)}\left(r,0\right)=\tau\left(r\right) \end{cases}, \qquad r\in\left(l_1,l_2\right) \tag{1.7}$$

С учетом соотношения (1.4) после дифференцирования по r два последних условия (1.5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(1)}\left(r,0\right)-\varepsilon_r^{(2)}\left(r,0\right)=\varphi\left(r\right)=\begin{cases}\varphi\left(r\right) & r\in\left(l_1,l_2\right)\\ 0 & r\notin\left(l_1,l_2\right)\end{cases} \\ \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\varepsilon_r^{(1)}\left(r,0\right)-\varepsilon_r^{(2)}\left(r,0\right)\right)-\dfrac{\partial}{\partial r}r\left(\gamma_{r\vartheta}^{(1)}\left(r,0\right)-\gamma_{r\vartheta}^{(2)}\right)=\psi\left(r\right)=\begin{cases}\psi\left(r\right) & r\in\left(l_1,l_2\right)\\ 0 & r\notin\left(l_1,l_2\right)\end{cases} \end{cases} \tag{1.8}$$

где введенные неизвестные функции φ и ψ имеют одинаковый характер по аргументу в окрестности концентраторов напряжений и отличны от нуля лишь на границе разреза. Тогда с учетом закона Гука (1.8) имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\left[\sigma_r^{(1)}\left(r,0\right)-\left(1-\dfrac{m'}{4}\right)\left(\sigma_r^{(1)}+\sigma_{\vartheta}^{(2)}\right)\right]-\dfrac{1}{2\mu^{ii}}\left[\sigma_r^{(2)}-\left(1-\dfrac{m^{ii}}{4}\right)\left(\sigma_r^{(1)}+\sigma_2^{(2)}\right)\right]=\varphi\left(r\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\dfrac{1}{2\mu'}\left[\sigma_r^{(1)}-\left(1-\dfrac{m'}{4}\right)\left(\sigma_r^{(1)}+\sigma_{\vartheta}^{(2)}\right)\right]-\dfrac{1}{2\mu^{ii}}\left[\sigma_r^{(2)}-\left(1-\dfrac{m^{ii}}{4}\right)\left(\sigma_r^{(1)}+\sigma_{\vartheta}^{(2)}\right)\right]\right\}- \\ -\dfrac{\partial}{\partial r}r\left[\dfrac{1}{\mu'}\tau_{r\vartheta}^{(1)}\left(r,0\right)-\dfrac{1}{\mu^{ii}}\tau_{r\vartheta}^{(2)}\left(r,0\right)\right]=\psi\left(r\right) \end{cases} \tag{1.9}$$

Таким образом, фактически решение смешанной краевой задачи сводится к решению первой краевой задачи в соответствующих областях, когда все граничные условия написаны относительно компонентов напряжения, для их решения применим интегральное преобразование Меллина [3].

С этой целью введем образы функции σ_{ϑ}, σ_r, $\tau_{r\vartheta}$ следующими формулами:

$$\tilde{\sigma}_r\left(s,0\right)=\int_0^{\infty}\sigma_r\left(r,\vartheta\right)r^s dr,\ \tilde{\sigma}_{\vartheta}\left(s,\vartheta\right)=\int_0^{\infty}\sigma_{\vartheta}\left(r,\vartheta\right)r^s dr,\ \tilde{\tau}_{r\theta}(s,\vartheta)=\int_0^{\infty}\tau_{r\vartheta}(r,\vartheta)r^s dr \tag{1.10}$$

Далее, применяя интегральное преобразование Меллина к уравнениям равновесия (1.1) и к уравнению сплошности, для функции $\tilde{\sigma}(s,\vartheta)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4\tilde{\sigma}(s,\vartheta)}{d\vartheta^4}+\left[\left(s+1\right)^2+\left(s-1\right)^2\right]\frac{d^2\tilde{\sigma}(s,\vartheta)}{d\vartheta^2}+\left(s^2-1\right)^2\tilde{\sigma}_{\vartheta}\left(s,\vartheta\right)=0 \tag{1.11}$$

Функции $\tilde{\sigma}_r(s,\vartheta)$ и $\tilde{\tau}_{r\vartheta}(s,\vartheta)$ выражаются через $\tilde{\sigma}_{\vartheta}$ по формулам :

$$\tilde{\tau}_{r\vartheta}\left(s,\vartheta\right)=\frac{1}{s-1}\frac{d\tilde{\sigma}_{\vartheta}\left(s,\vartheta\right)}{d\vartheta}, \quad \tilde{\sigma}_r\left(s,\vartheta\right)=\frac{1}{s\left(s-1\right)}\frac{d^2\tilde{\sigma}_{\vartheta}\left(s,\vartheta\right)}{d\vartheta^2}-\frac{1}{s}\tilde{\sigma}_{\vartheta}\left(s,\vartheta\right)$$

Общее решение имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{\vartheta}\left(s,\vartheta\right)=a_i\cos\left(s+1\right)\vartheta+b_i\cos\left(s-1\right)\vartheta+c_i\sin\left(s+1\right)\vartheta+d_i\sin\left(s-1\right)\vartheta \tag{1.12}$$

Здесь a_i, b_i, c_i, d_i– неизвестные функции, зависящие от комплексного параметра S. Из преобразованных граничных условий, написанных относительно компонентов напряжений, приходим к следующей алгебраической системе из восьми уравнений относительно неизвестных функций:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 - a_2 - b_2 = 0 \\ (s+1)c_1 + (s-1)d_1 - (s+1)c_2 - (s-1)d_2 = 0 \\ \dfrac{1-s-m'}{\mu'}a_1 - \dfrac{s-1}{\mu'}b_1 - \dfrac{1-s-m^{ii}}{\mu^{ii}}a_2 + \dfrac{s-1}{\mu^{ii}}b_2 = 2(s+1)\varphi(s) \\ \dfrac{1+s-m'}{\mu'}c_1 + \dfrac{s-1}{\mu'}d_1 - \dfrac{1+s-m^{ii}}{\mu^{ii}}c_2 - \dfrac{s-1}{\mu^{ii}}d_2 = \dfrac{2(s-1)}{s+1}\psi(s) \\ \cos(s+1)\alpha_1 a_1 + \cos(s-1)\alpha_1 d_1 - \sin(s+1)\alpha_1 c_1 - \sin(s-1)\alpha_1 d_1 = 0 \\ (s+1)\sin(s+1)\alpha_1 a_1 + (s-1)\sin(s-1)\alpha_1 b_1 + (s+1)\cos(s+1)\alpha_1 c_1 + \cos(s) = 0 \\ \cos(s+1)\alpha_2 a_2 + \cos(s-1)\alpha_2 b_2 + \sin(s+1)\alpha_2 c_2 + \sin(s-1)\alpha_2 d_2 = 0 \\ (s+1)\sin(s+1)\alpha_2 a_2 + (s-1)\sin(s-1)\alpha_2 b_2 - (s+1)\cos(s+1)c_2 - \cos(s) = 0 \end{cases} \qquad (1.13)$$

При решении последней алгебраической системы уравнений будем рассматривать два случая: первый, когда $\mu^i = \mu^{ii}$ и второй, когда $\mu^{ii} \neq \mu^i$. Тогда нетрудно заметить, что уравнения, содержащие физические параметры, можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} -ma_1 + a_2 = \varphi_1(s) \\ -mc_1 + c_2 = \psi_1(s) \end{cases} \qquad (1.14)$$

где введены обозначения:

$$m = \frac{m^i}{m^{ii}}; \quad \varphi_1(s) = \frac{2\mu}{m^{ii}}(s-1)\varphi(s); \quad \psi_1(s) = \frac{2\mu(s-1)}{m^{ii}(s+1)}\psi(s) \qquad (1.15)$$

Во втором случае вместо (1.14) будем иметь:

$$\begin{cases} (1-s-a)a_1 + (1-s)b_1 + ba_2 = \varphi_1(s) \\ (1+s-a)c_1 + (s-1)d_1 + bc_2 = \psi_1(s) \end{cases} \qquad (1.16)$$

Здесь введены новые физические параметры (a,b) и функции φ_1 и ψ_1, имеющие следующий вид:

$$\begin{cases} a = \dfrac{\mu^{ii}m^i}{\mu^{ii}-\mu^i} \\ b = \dfrac{\mu^i m^{ii}}{\mu^{ii}-\mu^i} \end{cases}; \qquad \begin{cases} \varphi_1(s) = 2\dfrac{\mu^i\mu^{ii}}{\mu^{ii}-\mu^i}(s-1)\varphi(s) \\ \psi_1(s) = 2\dfrac{\mu^i\mu^{ii}}{\mu^{ii}-\mu^i}\dfrac{s-1}{s+1}\psi(s) \end{cases} \qquad (1.17)$$

Рассмотрение этих двух случаев исчерпывает всевозможные значения физических параметров поставленной задачи.

Из последних четырех уравнений системы (1.13), определяя $a_1\ c_1\ a_2\ c_2$, получим:

$$a_1 = -\frac{1}{s+1}\left[s\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_1 s\right]b_1 - \frac{1}{s+1}\left[s\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1 s\right]d_1$$

$$c_1 = \frac{1}{s+1}\left[s\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1 s\right]b_1 - \frac{1}{s+1}\left[s\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_1 s\right]d_1 \qquad (1.18)$$

$$a_2=-\frac{1}{s+1}\left[s\cos 2\alpha_2+\cos 2\alpha_2 s\right]b_2+\frac{1}{s+1}\left[s\sin 2\alpha_2-\sin 2\alpha_2 s\right]d_2$$
$$c_2=-\frac{1}{s+1}\left[s\sin 2\alpha_2+\sin 2\alpha_2 s\right]b_2-\frac{1}{s+1}\left[s\cos 2\alpha_2-\cos 2\alpha_2 s\right]d_2$$

Эти выражения являются аналитическими функциями в соответствующей полосе регулярности $\left(\varepsilon-1\le \operatorname{Re} s\le 0\right)$, полученной от исследования поведения компонентов напряжения при $r\to 0$ и при $r\to\infty$. Для компактности последующих вычислений введем в рассмотрение следующие вспомогательные функции по формулам:

$$F^{\pm}\left(s,x\right)=s\sin 2x\pm\sin 2sx,\quad E^{\pm}\left(s,x\right)=s\cos 2x\pm\cos 2sx \tag{1.19}$$

Тогда с учетом (1.19) и (1.14) , подставляя значения a_1 , c_1 и a_2 , c_2 в первые четыре уравнения системы (1.13), в итоге, для случая $\mu^{ii}=\mu^{i}$ определение остальных неизвестных функций b_1, d_1 и b_2 , d_2 сводится к решению следующей системы из четырех уравнений:

$$\begin{cases}\left[-E^{+}\left(\alpha_1\right)+1+s\right]b_1-F^{-}\left(\alpha_1\right)d_1+\left[E^{+}\left(\alpha_2\right)-1-s\right]b_2-F^{-}\left(\alpha_2\right)d_2=0\\ F^{+}\left(\alpha_1\right)b_1-\left[E^{-}\left(\alpha_1\right)+1-s\right]d_1+F^{+}\left(\alpha_2\right)b_2+\left[E^{-}\left(\alpha_2\right)+1-s\right]d_2=0\\ -mE^{+}\left(\alpha_1\right)b_1-mF^{-}\left(\alpha_1\right)d_1+E^{+}\left(\alpha_2\right)b_2-F^{-}\left(\alpha_2\right)d_2=\tilde{\varphi}_1\left(s\right)\\ mF^{+}\left(\alpha_1\right)b_1-mE^{-}\left(\alpha_1\right)d_1+F^{+}\left(\alpha_2\right)b_2+E^{-}\left(\alpha_2\right)d_2=\psi_1\left(s\right)\end{cases} \tag{1.20}$$

В случае $\mu^{i}\neq\mu^{ii}$ с учетом (1.16) и после некоторых очевидных преобразований с целью упрощения структуры системы приходим к следующей системе:

$$\begin{cases}\left[E^{+}\left(\alpha_1\right)-1-s\right]b_1+F^{-}\left(\alpha_1\right)d_1-\left[E^{+}\left(\alpha_2\right)-1-s\right]b_2+F^{-}\left(\alpha_2\right)d_2=0\\ F^{+}\left(\alpha_1\right)b_1-\left[E^{-}\left(\alpha_1\right)+1-s\right]d_1+F^{+}\left(\alpha_2\right)b_2+\left[E^{-}\left(\alpha_2\right)+1-s\right]d_2=0\\ \left[\left(s+a\right)E^{+}\left(\alpha_1\right)-s\left(1+s\right)\right]b_1+\left(s+a\right)F^{-}\left(\alpha_1\right)d_1-\\ -\left[\left(1+b\right)E^{+}\left(\alpha_2\right)-1-s\right]b_2+(1+b)F^{-}(\alpha_2)d_2=\tilde{\varphi}_1(s)\\ \left(s-a\right)F^{+}\left(\alpha_1\right)b_1-\left[\left(s-a\right)E^{-}\left(\alpha_1\right)+s\left(1-s\right)\right]d_1-\\ -\left(1+b\right)F^{+}\left(\alpha_2\right)b_2-\left[(1+b)E^{-}(\alpha_2)+1-s\right]d_2=\tilde{\psi}_2(s)\end{cases} \tag{1.21}$$

Решая систему уравнений (1.20) или (1.21), определяя неизвестные функции $\tilde{\sigma}_{\vartheta}\left(s,\vartheta\right)$ и $\tilde{\tau}_{r\vartheta}\left(s,\vartheta\right)$, применяя обратное преобразование Меллина, для компонент напряжения получим интегральные выражения. Далее, из граничных условий на берегах трещины для определения неизвестных функций $\varphi\left(r\right)$, $\psi\left(r\right)$ приходим к системе интегральных уравнений. Опуская эти промежуточные выкладки, приведем результат вычислений в случае $\mu''=\mu'=\mu$

$$\begin{cases} \int\limits_{l_1}^{l_2} K_{11}(t,r)\varphi(t)\,dt + \int\limits_{l_1}^{l_2} K_{12}(t,r)\psi(t)\,dt = p(r) \\ \int\limits_{l_1}^{l_2} K_{21}(t,r)\varphi(t)\,dt + \int\limits_{l_1}^{l_2} K_{22}(t,r)\,\psi(t)\,dt = \tau(r) \end{cases} \tag{1.22}$$

Здесь введены следующие обзначения:

$$K_{11}(t,r) = \frac{16\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{1+y^2}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\left[mK_1(y,\alpha_2)\,\mathrm{sh}^2(\alpha_1 y) - K_1(y,\alpha_1)\,\mathrm{sh}^2(\alpha_2 y)\right]\cos\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy -$$

$$-\frac{16\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{(1+y^2)\,y}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\left[mK_1(y,\alpha_2)\sin^2\alpha_1 - K_1(y,\alpha_1)\sin^2\alpha_2\right]\sin\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy$$

$$K_{12}(t,r) = \frac{8\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{y}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\times$$

$$\times\left[mK_1(y,\alpha_2)(y\sin 2\alpha_1 - \mathrm{sh}2\alpha_1 y) + K_1(y,\alpha_1)(y\sin 2\alpha_2 - \mathrm{sh}2\alpha_2 y)\right]\cos\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy$$

$$K_{21}(t,r) = \frac{8\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{1+y^2}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\times \tag{1.23}$$

$$\times\left[mK_1(y,\alpha_2)(y\sin 2\alpha_1 + \mathrm{sh}2\alpha_1 y) + K_1(y,\alpha_1)(y\sin 2\alpha_2 + \mathrm{sh}2\alpha_2 y)\right]\sin\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy$$

$$K_{22}(t,r) = \frac{16\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\left[mK_1(y,\alpha_2)K_1(y,\alpha_1) - K_1(y,\alpha_1)K_1(y,\alpha_2)\right]\cos\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy -$$

$$-\frac{16\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\times$$

$$\times\left[mK_1(y,\alpha_2)\sin^2\alpha_1 - K_1(y,\alpha_1)\sin^2\alpha_2 + y\left(mK_1(y,\alpha_2)\,\mathrm{sh}^2\alpha_1 y - K_1(y,\alpha_1)\,\mathrm{sh}^2(\alpha_2 y)\right)\right]\sin\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy$$

Вещественные функции $K_1(y,\alpha_1)$ и $\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)$ имеют следующий вид:

$$K_1(y,\alpha) = y^2\sin^2\alpha - \mathrm{sh}^2 y\alpha$$

$$\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2) = 4(1+y^2)\left[m^2K_1(y,\alpha_1+\alpha_2) - m\left(K_1(y,\alpha_1+\alpha_2) - K_1(y,\alpha_1) - K\right)\right]$$

При выводе системы, предварительно на основе известного неравенства

$$\sin\alpha\, y \le \mathrm{sh}(\alpha y)\ ,\ \alpha \ge 0\ ,\ y \ge 0$$

было доказано, что уравнение $\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2) = 0$ не имеет отличного от нуля корней на мнимой оси в комплексной плоскости, то есть функции $€_\vartheta(s,\vartheta)$ и $€_{r\vartheta}(s,\vartheta)$ не имеют на этой прямой полюсов и являются аналитическими функциями. Отметим, что это справедливо не только для механических значений параметра $m \in [1,2]$, но также для любого положительного значения этой величины. В отличие $\Delta_m = 0$ уравнение $\Delta(s,\alpha_1,\alpha_2) = 0$ имеет счетные множества комплексных, в том числе, чисто мнимых корней, которые могут влиять на вид окончательной системы интегральных уравнений.

Опираясь на свойства подынтегральных выражений $K_{ij}(r,t)$ при $r \to 0$, $r \to \infty$, с использованием значения следующих интегралов:

$$\int_0^\infty \mathrm{th} As \sin(s \ln \frac{t}{r}) ds = \frac{e\sqrt{r^e t^e}}{t^e - r^e}\ ;\ \int_0^\infty \mathrm{cth} As \sin(s \ln \frac{t}{r})\, ds = e\frac{t^e + r^e}{t^e - r^e}\ ;\ e = \frac{\pi}{2A}$$

и делая соответствующим образом замену переменных, систему интегральных уравнений (1.22) приводим к интегральным уравнениям с выделенными особеностями ядер, то есть:

$$\begin{gathered}\int_{-c}^{c}\left[\ln\frac{1}{\xi - x} + K_{11}^{(1)}(\xi, x)\right]\varphi_1'(\xi)d\xi + \int_{-c}^{c}\left[\ln\frac{1}{\xi - x} + K_{12}^{(1)}(\xi, x)\right]\psi_1'(\xi)d\xi = P_1^{(1)}(x)\\ \int_{-c}^{c}\left[\ln\frac{1}{\xi - x} + K_{21}^{(1)}(\xi, x)\right]\varphi_1'(\xi)d\xi + \int_{-c}^{c}\left[\ln\frac{1}{\xi - x} + K_{22}^{(1)}(\xi, x)\right]\psi_1'(\xi)d\xi = T_1^{(1)}(x)\end{gathered} \quad (1.24)$$

Здесь $K_{ij}^{(1)}(\xi, x)$, $\varphi_1(\xi)$, $\psi_1(\xi)$, $P_1^{(1)}(x)$ $T_1^{(1)}(x)$ выражаются через известные функции, которые из-за громоздкости не приводятся. Необходимо отметить, что если в окрестностях вершин трещины заданы условия скольжения, то есть $\tau_{r\vartheta}^{i} = \tau_s = \mathrm{const}$ [5], то тогда представляя неизвестные функции $\varphi_1'(\xi)$ и $\psi_1'(\xi)$ в виде сумм ортогональных многочленов, для неизвестных коэффициентов известным путем получим систему бесконечных алгебраических уравнений. После решения этой системы и возвращаясь к старым переменным (r,t), обычным путем при помощи предельного перехода нетрудно выписать выражения для коэффициентов интенсивностей в концах трещины. В общем случае, систему уравнений можно решить численными методами с сочетанием выводящих асимптотических формул в окрестностях вершин трещины, которые нетрудно получить из (1.20) или (1.21). Далее, для определения асимптотических выражений компонент напряжения в окрестности соединения клиньев берется соответствующий путь интегрирования, используется лемма Жордана и теория вычетов. При этом, характер напряжения в окрестности определяется соответствующим образом расположенным корнем некоторого трансцендентного уравнения, которое получается приравниванием к нулю главного определителя системы (1.21) или (1.22).

Эти уравнения имеют вид:

– при $(\mu' = \mu'' = \mu)$

$$\Delta_m(s,\alpha_1,\alpha_2,m) = m^2 K(s,\alpha_2) + m\left[K(s,\alpha_1+\alpha_2) - K(s,\alpha_1) - K(s,\alpha_2)\right] + K(s,\alpha_1) = 0$$

– в случае $\mu' \neq \mu''$

$$\begin{gathered}\Delta(s,\alpha_1,\alpha_2,a,b) = K(s,\alpha_2)a^2 + K(s,\alpha_1)b^2 + \left(K(s,\alpha_1+\alpha_2) - K(s,\alpha_1) - K(s,\alpha_2)\right)ab - \\ -4K(s,\alpha_2)\sin^2(s\alpha_1)a + 4K(s,\alpha_1)\sin^2(s\alpha_2)b + 4K(s,\alpha_1)K(s,\alpha_2) = 0\end{gathered}$$

Введенная новая неизвестная функция $K(s,x)$ выражается следующим образом:

$$K(s,x) = \sin^2(s,x) - s^2\sin^2 x$$

Из уравнения $\Delta_m = 0$ при $m = 1$ получается известный результат для однородного клина с раствором угла $(\alpha_1 + \alpha_2)$ [1].

Необходимо отметить, что уравнение $\Delta_m = 0$ легко получается и из уравнения $\Delta = 0$. Для этого достаточно подставить выражения физических параметров a и b

и после очевидных преобразований произвести предельный переход $\mu' \to \mu''$. Именно это свойство является причиной того, что оно по сравнению с ранее известными результатами (2.3) имеет возможно простой, симметричный и компактный вид.

Аналогичным способом, как это предложено в работе [6], для малых значений параметра расстояния конца трещины от внешной поверхности, нетрудно вывести систему интегральных уравнений, в которых в отличие от (1.22) предельный переход $a \to 0$ возможнен. Таким образом, рассмотренных два класса задач исчерпывают всевозможные положения трещины на линии соединения клиньев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967.
2. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН Арм.ССР. 1987.
3. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. //ПМ. 1972. №3.
4. Аксентян О.К., Лущик О.Н. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения. // ПМ.1982. № 7. С.
5. Черепанов Г. П. Механика разрушения композитных материалов М : Наука, 1984.
6. Агаларян О.Б. Напряженно-деформированное состояние составного тела, изготовленного из двух упругих клиньев различного раствора. // В кн.: Ереван: Изд.АН Арм ССР, 1990. с.
7. Агаларян О. Б., Таманян Г. Ю. К задаче продольного сдвига составного клина с радиальной трещиной произвольной длины при различных граничных условиях .// Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С. 3–9.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.07.2004