ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 519.95

УПРАВЛЕНИЕ С ПОВОДЫРЕМ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ С m ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСТОЯННОЙ ДИНАМИКОЙ

Члингарян А.С.

Ключевые слова: дифференциальные игры, устойчивость решений, управление с поводырем
Key words: differential games, solution’s stability, control with guide.

Ա.Ս. Չլինգարյան
Ուղղորդով ղեկավարումը շատ նպատակային բազմություններին մոտեցման խաղային խնդրում հաստատուն դինամիկայով համակարգերի համար

Ուղղորդով ղեկավարումը, որը մեկ բազմության համար ներմուծվել է Ն.Ն. Կրասովսկու կողմից, ընդլայնված է m նպատակային բազմությունների համար [2]: Ենթադրվում է որ նպատակային բազմություններին մոտեցման հաջորդականությունը ֆիքսված է իսկ համակարգի դինամիկան հաստատուն է: Պրոցեդուրան իրենից ներկայացնում է օժանդակ համակարգի՝ ուղղորդի ներմուծման մեջ, որը շարժվում է տրված ստաբիլ բազմությունով: Նախնական և օժանդակ համակարգերի շարժումները ձևավորվում են այնպես, որ խաղի ընթացքում նրանք փոխադարձաբար հսկվեն, ինչը ապահովում է լուծումների կայունությունը ըստ ինֆորմացիոն աղավաղումների:

A.S. Chlingaryan
Control with guidance in the pursuit game with m target domains for systems with constant dynamics

Control with guidance introduced by Krasovsky for one target set [1] is extended to the case of m [2] target sets. It is assumed that the consequence of the meetings with the target sets is fixed and the system has constant dynamics. The procedure consists in introducing a secondary system – a guidance, which moves by the given stable bridge. The movements of the initial and the secondary systems are formed in such a way that in the process of the game they track each other, which guarantees ensures the stability of the solutions with respect to informational disturbances.

Управление с поводырем, введенное Н.Н. Красовским для одного целевого множества [1], распространено на случай m [2] целевых множеств. Предполагается, что последовательность встреч с целевыми множествами зафиксирована, а динамика системы постоянная. Процедура заключается во введении в рассмотрение вспомогательной системы - поводыря, движущейся по заданному стабильному мосту. Движения исходной и вспомогательной систем формируются так, чтобы в процессе игры они взаимно отслеживались, что обеспечивает устойчивость решений относительно информационных помех.

1. Опишем процедуру управления с поводырем для первого игрока в игре сближения. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, \mathrm{v}) \tag{1.1}$$

Здесь $f : [t_0, \infty) \times R^n \times P \times Q \to R^n$ – непрерывная функция; $P \subset R^p$, $Q \subset R^q$ – компакты, характеризующие возможности игроков.

Динамика поводыря характеризуется таким же дифференциальным уравнением:

$$\dot{w} = f(t, w, u^*, \mathrm{v}^*) \tag{1.2}$$

где $w \in R^n$, $u^* \in P$, $\mathrm{v}^* \in Q$.

Предполагается [2], что функция $f(t,x,u,\mathrm{v})$ удовлетворяет:

1.Условию бесконечной продолжимости решения, т.е.

$$\left|x' f(t,x,u,\mathrm{v})\right| \le \chi(1+\|x\|^2) \text{ при } (t,x,u,\mathrm{v}) \in [t_0,\infty) \times R^n \times P \times Q$$

где χ – постоянное число;

2. любой ограниченной области

$G \subset R^{n+1} = [\{t,x\} : t \in [-\infty,\infty], x \in R^n]$ условию Липшица:

$$\left\| f(t,x^{(1)},u,\mathrm{v}) - f(t,x^{(2)},u,\mathrm{v}) \right\| \le \lambda_G \left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\| \text{ при } (t,x^{(i)},u,\mathrm{v}) \in G \times P \times Q$$

$$(i = 1,2)$$

Предполагается также, что выполняется условие седловой точки маленькой игры ([1], с.38), т.е.

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} s_*' f(t_*,x_*,u,\mathrm{v}) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s_*' f(t_*,x_*,u,\mathrm{v}) \qquad (1.3)$$

при $s_* \in R^n$ $(t_*,x_*) \in [t_0,\infty) \times R^n$.

Допустим, что заданы замкнутые, ограниченные и выпуклые множества M_k $(k \in I)$ и N в пространстве $\{t,x\} \in [-\infty,\infty] \times R^n$ $(I = (1,2,...,m))$. И плата определяется равенством

$$\gamma(x[\cdot]) = \sigma(\tilde{\tau}_1(x[\cdot]),...,\tilde{\tau}_m(x[\cdot]))$$

Здесь $x[\cdot] = \{x[t] : t \ge t_0\}$ – реализовавшееся движение системы (1.1) ;

$\sigma : [t_0,\infty]^m \to (-\infty,\infty]$ – заданная функция;

$\tilde{\tau}_k(x[\cdot]) = \min\{\tilde{\tau} : \tilde{\tau} \in T(x[\cdot],M_k,N)$, где $T(x[\cdot],M_k,N) = \{\tau : \tau \ge t_0, (t,x[t]) \in N\}$ при $t_0 \le t \le \tau$, $(\tau,x[\tau]) \in M_k\}$;

в случае $T(x[\cdot],M_k,N) = \varnothing$ полагаем $\tilde{\tau}_k(x[\cdot]) = \infty$ $(k \in I)$ [1].

Предполагается [2], что функция σ удовлетворяет следующим условиям:

I. На множестве $[t_0,\infty)^m$ функция σ принимает конечные значения и непрерывна;

II. $\sigma(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_m) = \infty$, если хотя бы одно $\tilde{\tau}_i = \infty$;

III. множество $\Sigma(c) = \{(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_m) : \sigma(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_m) \le c\}$ ограниченно для любого конечного числа c;

IV. неравенство $\sigma(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_i',...,\tilde{\tau}_m) \le \sigma(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_i'',...,\tilde{\tau}_m)$ справедливо для любых наборов $(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_i',...,\tilde{\tau}_m)$ и $(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_i'',...,\tilde{\tau}_m)$, удовлетворяющих неравенству $\tilde{\tau}_i' \le \tilde{\tau}_i''$.

Предположим, что последовательность встреч с целевыми множествами $M_1,...,M_m$ строго зафиксирована. Тогда, как и в [3], из семейства u-стабильных мостов $W_k(t_i \mid i \in I \setminus \{i_1,...,i_{m-k}\})$ $k = 0,...,m-1$ [2] выбирается одна ветвь u-стабильных мостов $W_k(t_1,t_2,...,t_{m-k})$, здесь

$k = 0,...,m-1$, которая к моментам времени $t_1,...,t_m$ обрывается соответственно на целевых множествах $M_1,...,M_m$.

Итак, при прицеливании на множество M_1, т.е. при $t \in [t_0, t_1]$ нужно воспользоваться управлением $u^e[t]$, экстремальным к мосту $W_0(\cdot)$. Для множества M_2 берем управление $u^e[t]$ $t \in [t_1, t_2]$, экстремальное к мосту $W_1(\cdot, t_1)$, где t_1 – момент встречи с целевым множеством M_1. Аналогичным образом выбираются управления для следующих интервалов времени.

2. Выберем некоторую систему Δ полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$ $(i = 1, 2, ...)$, покрывающих полуось $[t_0, \infty)$. Сначала возьмем первый отрезок времени $[t_0, t_1]$. Предположим, что имеются информационные помехи, вследствие которых на всем отрезке времени $[t_0, t_1]$ разность между $x^*[t]$ и реализовавшимся на деле значением фазового вектора $x[t]$ удовлетворяет оценке

$$\left\| x^*[t] - x[t] \right\| \le \zeta_1 \quad (t_0 \le t \le t_1) \tag{2.1}$$

Это осуществимо, поскольку движения $x[t]$ меняются непрерывно в зависимости от начальных условий [1].

Пусть (t_0, x_0) – начальная позиция системы (1.1), $x_0^* = x^*[t_0]$ – результат неточного измерения первым игроком фазового вектора x_0. В качестве начальной позиции для вспомогательной системы (1.2) выберем точку $(t_0, w_0) \in W_0(\cdot)$, ближайшую к позиции (t_0, x_0^*), если таких точек не одна, то выбираем любую из них. На первом промежутке $[t_0, \tau_1]$ движения $x[t]$ и $w(t)$ определим следующим образом. Полагаем, что вектор $\mathrm{v}_*^{(0)} \in Q$ удовлетворяет соотношению

$$\max_{\mathrm{v} \in Q} \min_{u \in P} (x_0^* - w_0)' f(t_0, x_0^*, u, \mathrm{v}) = \min_{u \in P} (x_0^* - w_0)' f(t_0, x_0^*, u, \mathrm{v}_*^{(0)})$$

В качестве движения поводыря $w(t)$ $(t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$ возьмем то решение уравнения в контенгенциях:

$$\dot{w}(t) \in \Phi_u(t, w(t), \mathrm{v}^0) \quad (w(t_0) = w_0,\ t_0 \le t \le \tau_1)$$

$$(\Phi_u(t, w(t), \mathrm{v}) = CO[f : f = f(t, w, u, \mathrm{v});\ u \in P]$$

для которого выполняется условие

$$(t, w(t)) \in W_0(\cdot) \ \text{ при } t_0 \le t \le \tau \le t_1$$

где $\tau = \tau_1$, если на отрезке $[t_0, \tau_1]$ точка $(t, w(t))$ не попадает на M_1; в противном случае $\tau \le \tau_1$ – момент времени, когда точка $(t, w(t))$ впервые попадает на множество M_1. Существование такого движения $w(t)$ вытекает из свойства u-стабильности множества $W_0(\cdot)$ и условия $(t_0, w_0) \in W_0(\cdot)$.

Для построения движения $x[t]$ при $(t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$ определяем вектор $u^{(0)} \in P$ из условия

$$\min_{u \in P} \max_{\mathrm{v} \in Q} (x_0^* - w_0)' f(t_0, x_0^*, u, \mathrm{v}) = \max_{\mathrm{v} \in Q} (x_0^* - w_0)' f_1(t_0, x_0^*, u_*^{(0)}, \mathrm{v})$$

Постоянное управление $u[t] = u^{(0)}$, $(t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$ в паре с некоторой измеримой реализацией управления второго игрока $\mathrm{v}[t] \in Q$ определяет движение $x[t]$ при $(t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$, т.е.

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u^{(0)}, \mathrm{v}[t]) \quad (x[t_0] = x_0,\ t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$$

Предположим, что движения $x[t]$ и $w(t)$ определены на отрезке $[t_0, \tau_i]$, причем выполняются условия

$$(t, w(t)) \in W_0(t; t_0, x_0),\ (t, w(t)) \notin M_1 \text{ при } t_0 \le t \le \tau_i \le t_1$$

Для построения движения $w(t)$ на следующем участке (τ_i, τ_{i+1}) выберем управление $\mathrm{v}_*^{(i)} \in Q$ из условия:

$$\max_{\mathrm{v} \in Q} \min_{u \in P} (x^*[\tau_i] - w(\tau_i))' f(\tau_i, x^*[\tau_i], u, \mathrm{v}) =$$
$$= \min_{u \in P} (x^*[\tau_i] - w(\tau_i))' f(\tau_i, x^*[\tau_i], u, \mathrm{v}_*^{(i)})$$

где $x^*[\tau_i]$ и $x[\tau_i]$ удовлетворяют условию (2.1). Движение поводыря определим так, чтобы оно удовлетворяло уравнению в контенгенциях

$$\dot{w}(t) \in \Phi_u(t, w(t), \mathrm{v}_*^{(i)}) \quad (\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$$

и для него выполнялось условие

$$(t, w(t)) \in W_0(t; t_0, x_0) \text{ при } \tau_i \le t \le \tau \le t_1$$

где $\tau = \tau_{i+1}$, если на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ точка $(t, w(t))$ не попадает на M_1; в противном случае $\tau \le \tau_1$ – момент времени, когда точка $(t, w(t))$ впервые попадает на множество M_1. Существование такого движения $w(t)$, как и выше, вытекает из свойства u-стабильности множества $W_0(t; t_0, x_0)$ и условия $(\tau_i, w(\tau_i)) \in W_0(t; t_0, x_0)$.

Управление $u[t] = u^{(i)}$ $(\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$ в системе (1.1) выберем из условия

$$\min_{u \in P} \max_{\mathrm{v} \in Q} (x^*[\tau_i] - w(\tau_i))' f(\tau_i, x^*[\tau_i], u, \mathrm{v}) =$$
$$= \max_{\mathrm{v} \in Q} (x^*[\tau_i] - w(\tau_i))' f(\tau_i, x^*[\tau_i], u^{(i)}, \mathrm{v})$$

Это постоянное управление $u[t] = u^{(i)}$, $(\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$ в паре с некоторой измеримой реализацией управления второго игрока $\mathrm{v}[t] \in Q$ определяет движение $x[t]$ при $(\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$, т.е.

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u^{(i)}, \mathrm{v}[t]) \quad (\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$$

Указанная процедура продолжается последовательно до тех пор, пока точка $(t, w(t))$ не попадет на множество M_1. Поскольку множество $W_0(t;\, t_0, x_0)$ обрывается на M_1 к моменту времени t_1, то движущаяся по этому мосту $W_0(t; t_0, x_0)$ точка $(t, w(t))$ не позже чем к моменту времени t_1 попадет на множество M_1.

Причем в момент времени t_1 имеет место оценка [2]

$$\rho^2(t_1) \le \rho^2(t_0) e^{2\lambda(t_1 - t_0)} + (\varphi(\delta) + \varphi_*(\zeta_1)) \frac{1}{2\lambda} [e^{2\lambda(t_1 - t_0)} - 1] \qquad (2.2)$$

где $\rho^2(t) = \| x[t] - w(t) \|^2$ $(t_0 \le t \le t_1)$, из которой видно, что $\rho^2(t_1) \to 0$ при $\zeta_1 \to 0$ и $\delta \to 0$. Как и в [3], обозначим правую часть в (2.2) через $\varepsilon_1(\zeta_1, \delta)$. Следовательно, по теореме 57.1 [1] в момент времени t_1 движение $x[t]$ попадет в ε_1-окрестность сечения множества M_1 гиперплоскостью $t_1 = \text{const}$, т.е. на множество $M_1^{\varepsilon_1} = [(t', x') : t' = t_1, \| x' - x \| \le \varepsilon_1(\zeta_1, \delta), x \in M_1]$.

Теперь возьмем второй орезок времени $[t_1, t_2]$. Предположим, что на всем этом отрезке разность между $x^*[t]$ и $x[t]$ удовлетворяет оценке

$$\| x^*[t] - x[t] \| \le \zeta_2 \quad (t_1 \le t \le t_2)$$

Для этого интервала из ветви u-стабильных мостов $W_k(t_1, t_2, ..., t_{m-k})$, где $k = 0, ..., m-1$, выбирается мост $W_1(t;\, t_0, x_0, t_1)$ и экстремальная к нему стратегия $u^{(e)}(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$. Движение вспомогательной системы (1.2) продолжится из точки $(t_1, w[t_1])$, одновременно принадлежащей множествам M_1 и $W_1(t; t_0, x_0, t_1)$. Движение $x[t]$ продолжается из позиции $(t_1, x[t_1]) \in M_1^{\varepsilon_1}$. Тогда по теореме из 57.1 [1] не позже чем к моменту времени t_2 движение $x[t]$ попадет в некоторую ε_2-окрестность сечения множества M_2 гиперплоскостью $t_2 = \text{const}$, т.е. на множество $M_2^{\varepsilon_2} = [(t', x') : t' = t_2, \| x' - x \| \le \varepsilon_2(\zeta_2, \delta), x \in M_2]$. Причем

$$\varepsilon_2(\zeta_2, \delta) = \rho^2(t_2) \le \rho^2(t_1) e^{2\lambda(t_2 - t_1)} + (\varphi(\delta) + \varphi_*(\zeta_2)) \frac{1}{2\lambda} [e^{2\lambda(t_2 - t_1)} - 1]$$

где $\rho^2(t) = \| x[t] - w(t) \|^2$ $(t_1 \le t \le t_2)$.

Продолжая аналогичные рассуждения для следующих целевых множеств, на конечном интервале $[t_{m-1}, t_m]$ получим: движение $x[t]$ попадет в $\varepsilon_m(\zeta_m, \delta)$-окрестность сечения множества M_m гиперплоскостью $t_m = \text{const}$.

$$\varepsilon_m(\zeta_m, \delta) = \rho^2(t_m) \le \rho^2(t_{m-1}) e^{2\lambda(t_m - t_{m-1})} + (\varphi(\delta) + \varphi_*(\zeta_m)) \frac{1}{2\lambda} [e^{2\lambda(t_m - t_{m-1})} - 1]$$

где $\rho^2(t) = \|x[t] - w(t)\|^2$ $(t_{m-1} \le t \le t_m)$, $\varepsilon_m(\zeta_m, \delta) \to 0$ при $\zeta_m \to 0$ и $\delta \to 0$

Итак, получаем обобщение теоремы 57.1 из [1] на случай нескольких целевых множеств.

Теорема.

Пусть для $f(t, x, u, \mathrm{v})$ из (1.1) имеют место все вышеуказанные условия. Пусть также для всех позиций (t_*, x_*) и векторов s_* маленькая игра имеет седловую точку, то есть имеет место (1.3). Предположим, что существует семейство u-стабильных мостов $W_k(t, t_0, x_0, t_1, t_2, ..., t_{m-k})$ $k = 0, ..., m-1$, обрывающееся к моментам времени t_i $i = 1, ..., m$ на целевых множествах $M_1, ..., M_m$, соответственно, и пусть начальная позиция (t_0, x_0) принадлежит множеству $W_0(t, t_0, x_0)$. Тогда предложенная выше процедура управления с поводырем доставляет решение задачи сближения, устойчивое по отношению к информационным помехам, т.е. для любых чисел $\delta, \zeta_1, ..., \zeta_m$ существуют числа $\varepsilon_1(\zeta_1, \delta)$, $\varepsilon_2(\zeta_2, \delta), \ldots, \varepsilon_m(\zeta_m, \delta)$ такие, что при $\tau_{i+1} - \tau_i \le \delta$ $(i = 0, 1, ...)$ и

$\|x[\tau_i] - x^*[\tau_i]\| \le \zeta_1$ при $(t_0 \le t \le t_1)$;

$\|x[\tau_i] - x^*[\tau_i]\| \le \zeta_2$ при $(t_1 \le t \le t_2)$; и т. д.

$\|x[\tau_i] - x^*[\tau_i]\| \le \zeta_m$ при $(t_{m-1} \le t \le t_m)$ движения $x[t]$ в моменты $t_1, ..., t_m$ будут попадать соответственно в ε_1-окрестность множества M_1, ε_2-окрестность множества M_2 и так далее ε_m-окрестность множества M_m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. Габриелян М.С., Субботин А. И. Игровые задачи о встрече с m целевыми множествами. //ПММ. 1979. Т. 43. №. 2. С. 204-208.
3. Габриелян М.С., Члингарян А.С. Об устойчивости игровой задачи сближения-уклонения с несколькими целевыми множествами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №.3. С. 51-58.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 7.11.2006