

КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМИ
СОЕДИНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ
Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н.

Ключевые слова: кинематика, упругий манипулятор, криволинейные координаты.

Key words: kinematics, elastic manipulator, curvilinear coordinates.

Ա.Ա. Դուկասյան, Հ.Ն. Մաճկալյան

Առաձգական հանգույցներով մանիպուլյատորի շարժման կինեմատիկան կորագիծ
կորդինատական համակարգում

Ուսումնասիրված է առաձգական հանգույցներով բազմադակ մանիպուլյատորի շարժման կինեմատիկան կորագիծ կորդինատական համակարգում: Առաձգականության գծային տեսության սահմաններում Լյամեի ընդհանրացված մատրիցայի միջոցով ստացված են մանիպուլյատորի օղակների բնութագրիչ կետերի և բռնիչի շարժման արագությունների ու արագացումների համար ընդհանրացված արտահայտություններ: Ստացված բանաձևերը թույլ են տալիս կորագիծ կորդինատական համակարգում հեշտությամբ որոշել տարբեր կոնստրուկցիաներով առաձգական մանիպուլյատորների կինեմատիկական առնչությունները: Որպես օրինակ որոշված է մեկ առաձգական հանգույցով երկօղակ մանիպուլյատորի բռնիչի շարժման արագությունը գլանային կորդինատական համակարգում:

A.A.Ghukasyan, H.N.Matshkalyan

The movement kinematics of manipulator with elastic joints in the curvilinear coordinate system

Movement kinematics of the multilink manipulator with elastic joints in the curvilinear coordinate system is studied. Within the bounds of the linear theory of elasticity by generalized Lyame matrix general expressions for speed and acceleration of the characteristic points of the links and manipulator handle are received. The received formulas allow to easily determine the kinematics of different constructions of the manipulators with elastic joints in the curvilinear coordinates. As an example movement velocity of a twolink manipulator with one elastic joint is determined in the cylindrical coordinate system.

Исследована кинематика движения многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейной системе координат. В рамках линейной теории упругости получены обобщенные выражения для скорости и ускорения характерных точек звеньев и схвата упругого манипулятора через обобщенные матрицы Лямэ. Полученные формулы позволяют в криволинейных координатах легко определить кинематические соотношения различных конструкций манипуляторов с упругими соединительными узлами. В качестве примера определена скорость движения схвата двухзвенного манипулятора с одним упругим узлом в цилиндрической системе координат.

1. Скорость движения в криволинейных координатах.

Рассмотрим модель манипулятора, представленного на фиг.1, звенья которого считаются абсолютно твердыми телами, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости, которые в пределе превращаются в идеальные связи [1]. Обобщенные координаты жесткой модели манипулятора, определяющие его конфигурацию в пространстве OXYZ, обозначим через $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, а через $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ – дополнительные обобщенные координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах. Заметим, что здесь как координаты α_j ($j = 1, 2, \dots, n$), так и координаты β_k ($k = 1, 2, \dots, m$) зависят только от времени.

Положения точек манипулятора в пространстве зависят как от обобщенных координат жесткой модели, так и от дополнительных координат, обусловленных упругостью конструкции. Следовательно, криволинейные координаты манипулятора s_i ($i = 1, 2, 3$) также будут зависеть от вышеназванных координат [2, 4]

$$s_i = s_i^*(\alpha, \beta) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Согласно предположению о высокой жесткости соединительных узлов ($C_k \sim \varepsilon^{-1}$)

и малости углов упругого поворота звеньев

$$(\beta_k \sim \varepsilon, (k = 1, 2, \dots, m; \varepsilon \ll 1) [3],$$

криволинейные координаты манипулятора можно представить в виде разложения по формуле Тейлора с точностью ε

$$s_i = s_i^*(\alpha, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial s_i^*(\alpha, 0)}{\partial \beta_k} \beta_k + o(\varepsilon^2) \quad (i=1,2,3) \quad (1.2)$$

где $s_i^*(\alpha, 0) = s_i^*(\alpha)$.

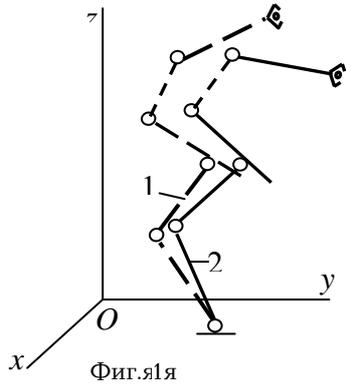
Скорость движения характерных точек (центр масс звеньев, центр соединительных узлов, положение схвата и т.д.) манипулятора в зависимости от обобщенных координат α_j, β_k и скоростей

$\dot{\alpha}_j, \dot{\beta}_k$ ($j=1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & \left[H_1(\alpha, \beta) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial s_1^*(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial s_1^*(\alpha, \beta)}{\partial \beta_k} \dot{\beta}_k \right) \right] \mathbf{s}_1^0 + \\ & + \left[H_2(\alpha, \beta) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial s_2^*(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial s_2^*(\alpha, \beta)}{\partial \beta_k} \dot{\beta}_k \right) \right] \mathbf{s}_2^0 + \\ & + \left[H_3(\alpha, \beta) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial s_3^*(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial s_3^*(\alpha, \beta)}{\partial \beta_k} \dot{\beta}_k \right) \right] \mathbf{s}_3^0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где \mathbf{s}_i^0 ($i = 1, 2, 3$) – единичные векторы касательной к координатным линиям s_i ($i = 1, 2, 3$) соответственно, H_i ($i = 1, 2, 3$) – коэффициенты Лямэ.

Введем обобщенную матрицу Лямэ [4] $\mathbf{H}_i^*(\alpha, \beta)$ элементы которого зависят от коэффициентов Лямэ H_i ($i = 1, 2, 3$) и от обобщенных координат манипулятора α_j, β_k ($j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$).



Фиг. 1я

1 – конфигурация упругой модели манипулятора
2я – конфигурация абсолютно жесткой модели

$$\mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ H_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{3,n} \quad \text{я} \quad (1.4)$$

Введем также матрицу $\mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ с элементами

$$\mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ H_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \right\}_{i,k=1}^{3,m} \quad (1.5)$$

Вектор скорости (1.3) в криволинейной системе координат с учетом введенных матриц (1.4) и (1.5) можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} \quad \text{я} \quad (1.6)$$

При $\boldsymbol{\beta} = 0$ формула (1.6) совпадает с формулой для абсолютно жесткой модели [4], поскольку $\mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{H}^*(\mathbf{a})$.

Предположения $C_k \sim \varepsilon^{-1}$ и $\beta_k \sim \varepsilon$ ($k=1,2,\dots,m; \varepsilon \ll 1$) и разложение (1.2) позволяют вектор скорости движения элементов манипулятора в криволинейных координатах представить в рамках скорости движения абсолютно жесткой модели с добавлением слагаемого, порядок которого не превышает ε я

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) + \mathbf{v}_2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) \quad (1.7)$$

где $\mathbf{v}_1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})$ – скорость движения жесткой модели манипулятора, а $\mathbf{v}_2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ – скорость, обусловленная упругостью соединительных узлов манипулятора, ($\mathbf{v}_2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) \sim \varepsilon$).

Поскольку коэффициенты Лямэ зависят от дополнительных обобщенных координат манипулятора, то при малых деформациях их также можно представить в виде разложения

$$H_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) = H_i(\mathbf{a}, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H_i(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_k} \beta_k + O(\varepsilon^2) \quad (i=1,2,3) \quad \text{я} \quad (1.8)$$

Подставляя (1.2), (1.8) в (1.3), вектор скорости движения манипулятора с точностью ε можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, 0) \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0) \dot{\boldsymbol{\beta}} \quad \text{я} \quad (1.9)$$

Согласно (1.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) &= \mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, 0) \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{v}_2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0) \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned} \quad \text{я} \quad (1.10)$$

Здесь обобщенная матрица Лямэ $\mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, 0)$ имеет размерность $(3 \times n)$ с элементами

$$\mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, 0) = \left\{ H_i(\mathbf{a}, 0) \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, 0)}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{3,n} \quad \text{я} \quad (1.11)$$

а обобщенная матрица $\mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ имеет размерность $(3 \times n)$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) &= \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left(H_i(\mathbf{a}, 0) \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, 0)}{\partial \alpha_j} \right) \beta_k \right\}_{i,j=1}^{3,n} = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^m \left[H_i(\mathbf{a}, 0) \frac{\partial^2 s_i^*(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_k \partial \alpha_j} + \frac{\partial H_i(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_k} \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, 0)}{\partial \alpha_j} \right] \beta_k \right\}_{i,j=1}^{3,n} \end{aligned} \quad \text{я} \quad (1.12)$$

$(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m)$.

При $\beta_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$), $H_2^*(\alpha, 0) = 0$.

Матрица $\mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0)$ имеет размерность $(3 \times m)$

$$\text{я} \quad \mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0) = \left\{ H_i(\mathbf{a}, 0) \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_k} \right\}_{i,k=1}^{3,m} \quad (1.13)$$

2. Ускорение движения в криволинейных координатах. Определяя скорость движения характерных точек манипулятора с упругими соединительными узлами в общем случае по формуле (1.6) и с точностью до ε по формуле (1.9), можно найти проекции вектора ускорения на осях криволинейной системы координат. Проекция вектора ускорения в криволинейной системе координат в общем случае имеют вид [2]

$$\text{я} \quad w_i = \frac{1}{H_i} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{s}_i} - \frac{\partial v^2}{\partial s_i} \right\} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Для упругого манипулятора $s_i = s_i^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$, $H_i = H_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ ($i = 1, 2, 3$).

В соответствии с (1.3) вектор скорости движения манипулятора зависит от обобщенных координат α_j, β_k и скоростей $\dot{\alpha}_j, \dot{\beta}_k$ ($j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$)

$$\text{я} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) \quad (2.2)$$

а модуль определяется выражением

$$\text{я} \quad |\mathbf{v}|^2 = \sum_{i=1}^3 \left[H_i^2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \dot{\beta}_k \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

где

$$\text{я} \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \dot{\beta}_k = \dot{s}_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) и произведя необходимые вычисления с учетом (2.4), определим проекции вектора ускорения \mathbf{w} на осях криволинейной системы координат. Компоненты вектора ускорения будут зависеть от обобщенных координат $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$, скоростей $(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ и ускорений $(\ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}})$ манипулятора

$$w_i = w_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

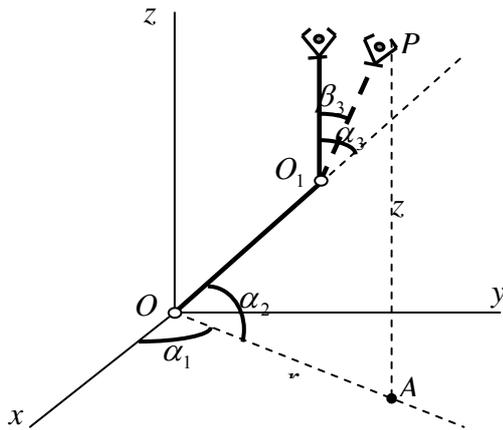
С учетом (1.8) выражение (2.3) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v}|^2 &= \sum_{i=1}^3 \left(H_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \frac{d}{dt} s_i^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \right)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^3 \left[\left(H_i(\mathbf{a}, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H_i(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_k} \beta_k \right) \frac{d}{dt} \left(s_i^*(\mathbf{a}, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_k} \beta_k \right) \right]^2 = \\
&= \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[H_i(\mathbf{a}, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H_i(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_k} \beta_k \right] \sum_{j=1}^n \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, 0)}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \right. \\
&\quad \left. + H_i(\mathbf{a}, 0) \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^m \frac{\partial s_i^*(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_k} \beta_k \right\}^2 + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.1) и произведя необходимые вычисления, компоненты вектора ускорения при малых деформациях в криволинейной системе координат также можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$w_i = w_i^1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}) + w_i^2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \quad (i=1,2,3) \tag{2.7}$$

где слагаемые $w_i^1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}})$ ($i=1,2,3$) соответствуют ускорению абсолютно жесткой модели манипулятора, а $w_i^2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}})$ ($i=1,2,3$) зависят от упругости соединительных узлов манипулятора и имеют порядок ε .



Фиг. 2

3. В качестве примера определим скорость движения схвата двухзвенного манипулятора (фиг. 2) в криволинейной системе координат. Обобщенные координаты абсолютно жесткой модели манипулятора обозначим через $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Дополнительную обобщенную координату, обусловленную упругостью шарнира O_1 , обозначим через β_3 (фиг.2), а линейные размеры звеньев — через l_1, l_2 , соответственно.

Скорость схвата рассматриваемого манипулятора удобно исследовать цилиндрическими координатами (φ, r, z) .

$$\begin{aligned}
s_1 &= \varphi = \alpha_1(t) \\
s_2 &= r = r^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos[\alpha_2 + (\alpha_3 - \beta_3)] \\
s_3 &= z = z^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = l_1 \sin \alpha_2 + l_2 \sin[\alpha_2 + (\alpha_3 - \beta_3)]
\end{aligned}
\tag{3.1}$$

Предполагая, что жесткость соединительного узла O_1 велика ($O_3 \sim \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \ll 1$), а угол поворота β_3 мал ($\beta_3 \sim \varepsilon$), разложение (1.2) для рассматриваемого случая принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha_1 \\ \text{я} \quad r &= r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0) + \frac{\partial r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 + O(\varepsilon^2) \\ z &= z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0) + \frac{\partial z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Скорость движения характерных точек манипулятора в общем случае определяется выражением (1.9). Представим эту формулу в цилиндрических координатах для определения скорости движения схвата рассматриваемого упругого манипулятора. Коэффициенты Лямэ имеют следующий вид:

$$\text{я} \quad H_\varphi = H_1(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = r(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3); \quad H_r = H_2 = 1; \quad H_z = H_3 = 1 \quad (3.3)$$

В силу (3.1) с точностью до ε , имеем

$$\text{я} \quad H_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) = H_1(\mathbf{a}, 0) + \frac{\partial H_1(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 \quad (3.4)$$

$$\text{где } H_1(\mathbf{a}, 0) = l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3), \quad \frac{\partial H_1(\mathbf{a}, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 = l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \beta_3$$

Определим элементы обобщенных матриц Лямэ

$$\mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, 0), \quad \mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}), \quad \mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0).$$

Матрица (1.11) для рассматриваемого манипулятора, согласно (3.3), (3.4), имеет следующие элементы:

$$\text{я} \quad \mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, 0) = \begin{pmatrix} l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \sin \alpha_2 - l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) & -l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \\ 0 & l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) & l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Вектором скорости движения схвата абсолютно жесткой модели манипулятора является $\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\mathbf{a}, 0) \dot{\mathbf{a}}$, или в проекциях

$$\begin{aligned} v_{1,\varphi} &= \dot{\alpha}_1 [l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)] \\ \text{я} \quad v_{1,r} &= -l_1 \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - l_2 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3) \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \\ v_{1,z} &= l_1 \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 + l_2 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3) \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Определим элементы матрицы $\mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$. Проведя необходимые вычисления с учетом (3.3), получим

$$\text{я} \quad \mathbf{H}_2^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} l_2 \beta_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & l_2 \beta_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) & l_2 \beta_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \\ 0 & l_2 \beta_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) & l_2 \beta_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Аналогичными вычислениями получим элементы обобщенной матрицы $\mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0)$.

$$\text{я} \quad \mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \\ 0 & 0 & -l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Проекции вектора скорости движения схвата, обусловленные упругостью узла O_1 (фиг.2), согласно (1.10), (3.7) и (3.8), имеют вид

$$\begin{aligned}
 v_{2,\varphi} &= \dot{\alpha}_1 l_2 \beta_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \\
 \text{я } v_{2,r} &= l_2 \beta_3 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3) \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + l_2 \dot{\beta}_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \text{ я} \\
 v_{2,z} &= l_2 \beta_3 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3) \sin(\alpha_2 + \alpha_3) - l_2 \dot{\beta}_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $v_{2,\varphi}, v_{2,r}, v_{2,z}$ имеют порядок (.

Следовательно, проекции вектора скорости движения схвата рассматриваемого упругого манипулятора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 v_\varphi &= \dot{\alpha}_1 [l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)] + \dot{\alpha}_1 \beta_3 l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \\
 \text{я } v_r &= -l_1 \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - l_2 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3 - \dot{\beta}_3) \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + l_2 \beta_3 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3) \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \text{ я} \\
 v_z &= l_1 \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 + l_2 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3 - \dot{\beta}_3) \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + l_2 \beta_3 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3) \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \\
 &\text{я}
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы М.: Наука, 1989. 400 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 824 с.
3. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Вешников В.Б., Самвелян К.В., Степанов В.П., Шушко Д.А. Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт N231, ИПМ АН СССР. М.: 1984.66 с.я
4. Ղուկասյան Ա.Ա. Ընդհանրացված կորագիծ կոորդինատների մի կիրառության մասին: Գիտությունը և կրթությունը Արցախում: 2002. դ3,4.

я
Армянский государственный
педагогический университет им. Х.Абовяна

Поступила в редакцию
18.07.2007