

УДК 534.14: 517.93

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ  
ПУЛЬСАЦИЙ ПУЗЫРЬКА

Григорян Ш.А., Оганян Г.Г.

**Ключевые слова:** пульсация, нелинейность, пузырек.

**Keywords:** pulsation, nonlinearity, bubble.

Շ.Հ. Գրիգորյան, Գ.Գ. Օհանյան

Պղպջակի զարկումները նկարագրող ոչ գծային ընդհանրացրած հավասարման մոտավոր  
լուծումները

Ստացված է անսեղմելի մածուցիկ հեղուկում մենակյաց պղպջակի զարկումները նկարագրող ընդհանրացված հավասարումը: Դիտարկված են ազատ և հարկադրված տատանումների խնդիրները: Այն պարագայում, երբ հաստատուն ամպլիտուդայով և հաճախությամբ արտաքին հարկադրական ուժը տրվում է սինուսոիդալ տեսքով, դուրս է բերված ամպլիտուդա-հաճախային բնութագրիչի հավասարումը, որն կայունացած զարկումների դեպքում նկարագրում է ռեզոնանսային կորը: Ցույց է տրված զարկումների ամպլիտուդայի թռիչքաձև փոփոխության հնարավորությունը: Երկրորդական ռեզոնանսների պարագայում գտնված են պղպջակի մակերևույթի փոփոխության օրենքները ըստ ժամանակի:

Sh.H. Grigoryan, G.G. Oganyan

Approximate Solutions of Generalized Equation of Bubble  
Pulsation with the Full Account of the Quadratic Nonlinearity

The bubble pulsation equation is obtained with quadratic nonlinearities more completely taking into account nonlinearity effects. The equation of amplitude-frequency characteristic is derived for external force with constant amplitude and frequency and sinusoidal variation on time. The equation of resonant curve is obtained for stationary regime of pulsation. Possibility of jumped change of pulsation of amplitude is shown.

Получено уравнение пульсации пузырька с квадратичными нелинейностями, более полно учитывающее нелинейные эффекты. Рассмотрены задачи свободных и вынужденных колебаний. При вынуждающей внешней силе, синусоидально изменяющейся во времени с заданной амплитудой и частотой, получено уравнение амплитудно-частотной характеристики, которое в случае установившегося режима пульсаций является уравнением резонансной кривой. В последнем случае показана возможность скачкообразного изменения амплитуды пульсаций. При исследовании вторичных резонансов выявлены законы изменения во времени сферической формы поверхности пузырька.

В несжимаемой жидкости свободные и вынужденные колебания одиночного пузырька неизменяемой сферической формы в линейной постановке исследованы многими авторами, в частности, в [1-3]. В нелинейной постановке подобные задачи рассмотрены в [2,4] методами численного анализа. В настоящей работе на основе упрощенной модели разреженной пузырьковой смеси [3] выведено уравнение со всеми тремя квадратичными нелинейностями, описывающее пульсации пузырька. Асимптотическими методами гармонического анализа [5,6] исследованы задачи свободных и вынужденных колебаний.

**1. Исходные уравнения.** Пусть одиночный сферический газовый пузырек находится в безграничной вязкой несжимаемой жидкости. Полагая, что термодинамическое поведение газа в пузырьке является адиабатическим,

радиальное движение системы жидкость-пузырек можно описать системой уравнений [3]

$$p_2 - p_1 = \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt}, \quad \rho_1 = \text{const}$$

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad \gamma = \frac{c_{p2}}{c_{v2}} \quad (1.1)$$

Здесь  $t$  – время,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $R$  – радиус пузырька,  $c_p$  и  $c_v$  – удельные теплоемкости,  $\gamma$  – показатель адиабаты газа,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости. Индексы 1,2 и 0 отнесены, соответственно к жидкости, газу и состоянию покоя (равновесия). Предположим, что в любой момент времени отклонения физических параметров смеси от своих равновесных значений малы

$$p_2 = p_0(1 + p'_2), \quad p_1 = p_0(1 + p'_1), \quad \rho_2 = \rho_{20}(1 + \rho'_2), \quad R = R_0(1 + R') \quad (1.2)$$

Здесь штрихи отнесены к избыточным значениям параметров и в дальнейшем опускаются. Подставляя (1.2) в уравнения Рэлея-Лэмба, адиабатического состояния газа и сохранения его массы в пузырьке, систему (1.1) приведем к упрощенному виду:

$$p_2 - p_1 = \frac{3\gamma}{\omega_{ar}^2} \left[ \frac{d^2 R}{dt^2} + R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right] + \frac{4\mu}{p_0} \frac{dR}{dt}$$

$$p_2 = -3\gamma R + \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2} R^2, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_1 R_0^2} \quad (1.3)$$

в котором малые члены порядка  $R^3$  и выше пренебрежены в сравнении с оставленными,  $\omega_{ar}$  – линейная частота собственных колебаний пузырька. Исключая из (1.3) избыточное давление  $p_2$ , получим уравнение с тремя нелинейностями

$$\ddot{R} + \omega_{ar}^2 R + 2\delta \dot{R} - \alpha R^2 + R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 + \frac{\omega_{ar}^2}{3\gamma} p_1 = 0$$

$$\delta = \frac{2\mu}{\rho_1} \frac{1}{R_0^2} = \frac{2}{3\gamma} \frac{\mu}{p_0} \omega_{ar}^2, \quad \alpha = \frac{3\gamma+1}{2} \omega_{ar}^2 \quad (1.4)$$

где точки над искомой функцией  $R$  означают, как обычно, дифференцирование по  $t$ . Полученное уравнение без пятого и шестого слагаемых, порознь и вместе взятых, как объект математического исследования, приведено в [5,6].

Для построения приближенного решения нелинейного уравнения используется асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского [5]. Решение ищется в виде разложения функции  $R$  в ряд по степеням безразмерного малого параметра  $\varepsilon$ , характеризующего малость амплитуды пульсаций  $a$

$$R = \varepsilon r_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 r_2(a, \varphi) + \varepsilon^3 r_3(a, \varphi) + \dots, \quad r_1 = a \cos \varphi, \quad \varphi = \omega_{ar} t + \beta \quad (1.5)$$

Здесь  $\beta$  – фаза,  $r_1$  – решение линейного варианта уравнения (1.4) без диссипативного слагаемого, где величины  $a$  и  $\beta$  – постоянные. При учете

нелинейных и диссипативных эффектов  $a$  и  $\beta$ , однако, полагаются уже не постоянными, а медленно меняющимися по  $t$  функциями. Поэтому их производные можно представить в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ .

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad \dot{\beta} = \varepsilon \phi_1(a) + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots, \quad \dot{\varphi} = \omega_{ar} + \dot{\beta} \quad (1.6)$$

где коэффициенты  $A_1, A_2$  и  $\phi_1, \phi_2$  определяются в процессе построения равномерно-пригодного решения во втором приближении. Согласно методу, в качестве новых независимых переменных принимаются функции  $a$  и  $\varphi$ . Вывод необходимых преобразований подробно изложен в [5,6] и их использование позволяет записать уравнение (1.4) в виде:

$$\begin{aligned} & \omega_{ar}^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + \omega_{ar}^2 R + \varepsilon 2\omega_{ar} \left( \phi_1 \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + A_1 \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \varphi} \right) + \varepsilon^2 \left[ (\phi_1^2 + 2\omega_{ar}\phi_2) \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + \right. \\ & \left. + 2(\omega_{ar}A_2 + A_1\phi_1) \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \varphi} + A_1^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + A_1 \frac{dA_1}{da} \frac{\partial R}{\partial a} + A_1 \frac{d\phi_1}{da} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right] = \\ & = -2\delta \left[ \omega_{ar} \frac{dR}{d\varphi} + \varepsilon \left( A_1 \frac{\partial R}{\partial a} + \phi_1 \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right) \right] + \alpha R^2 - R \left\{ \omega_{ar}^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + \varepsilon 2\omega_{ar} \times \right. \\ & \times \left( \phi_1 \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + A_1 \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \varphi} \right) + \varepsilon^2 \left[ (\phi_1^2 + 2\omega_{ar}\phi_2) \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + 2(\omega_{ar}A_2 + A_1\phi_1) \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \varphi} + \right. \\ & \left. + A_1^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + A_1 \frac{dA_1}{da} \frac{\partial R}{\partial a} + A_1 \frac{d\phi_1}{da} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right] \left. - \frac{3}{2} \left\{ \omega_{ar}^2 \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 + \varepsilon 2\omega_{ar} \times \right. \right. \\ & \times \left[ A_1 \frac{\partial R}{\partial \varphi} \frac{\partial R}{\partial a} + \phi_1 \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \varepsilon^2 \left[ A_1^2 \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)^2 + 2A_1\phi_1 \frac{\partial R}{\partial a} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \phi_1^2 \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 + 2\omega_{ar} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \left( A_2 \frac{\partial R}{\partial a} + \phi_2 \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right) \right\} - \frac{\omega_{ar}}{3\gamma} p_1 + 0(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

**2. Свободные колебания.** Полагается, что избыточное давление в жидкости (вынуждающая сила) отсутствует, т.е. в уравнениях (1.4) и (1.7) принимается  $p_1 \equiv 0$ .

Подстановка разложения (1.5) в уравнение (1.7) и последующее приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  приводит в первом (порядка  $\varepsilon$ ) приближении к однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi^2} + r_1 = 0, \quad r_1 = a \cos \varphi \quad (2.1)$$

Во втором приближении будем иметь

$$\frac{\partial^2 r_2}{\partial \varphi^2} + r_2 = -\frac{2}{\omega_{ar}} \left( \phi_1 \frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi^2} + A_1 \frac{\partial^2 r_1}{\partial a \partial \varphi} \right) + \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} r_1^2 - r_1 \frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi^2} - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} \right)^2$$

Подставляя решение (2.1) в правую часть уравнения, получим

$$\frac{\partial^2 r_2}{\partial \varphi^2} + r_2 = \frac{2}{\omega_{ar}} (a\phi_1 \cos \varphi + A_1 \sin \varphi) + \frac{a^2}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{a^2}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} + \frac{5}{2} \right) \cos 2\varphi$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой суперпозицию общего решения однородного и какого-либо частного решения неоднородного уравнений. Общее решение однородного уравнения включается в решение (2.1) и потому не приводится. Частные решения неоднородного уравнения с первыми двумя слагаемыми дают значения  $\phi_1 = 0$ ,  $A_1 = 0$ , а с последними членами определяют функцию

$$\begin{aligned} r_2(a, \varphi) &= \frac{a^2}{4} \frac{2\alpha - \omega_{ar}^2}{\omega_{ar}^2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{2\alpha + 5\omega_{ar}^2}{2\alpha - \omega_{ar}^2} \cos 2\varphi \right] = \\ &= \frac{3\gamma}{4} \left( 1 - \frac{\gamma + 2}{3\gamma} \cos 2\varphi \right) a^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

В третьем приближении (порядка  $\varepsilon^3$ ), с учетом  $A_1 = \phi_1 = 0$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r_3}{\partial \varphi^2} + r_3 &= -\frac{2}{\omega_{ar}} \left( \phi_2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi^2} + A_2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial a \partial \varphi} \right) - 2 \frac{\delta}{\omega_{ar}} \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} + 2 \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} r_1 r_2 - \\ &- r_1 \frac{\partial^2 r_2}{\partial \varphi^2} - r_2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi^2} - 3 \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подстановка решений (2.1) и (2.2) в (2.3) позволяет выявить явный вид неоднородного уравнения относительно функции  $r_3(a, \varphi)$ , откуда определяются коэффициенты  $A_2(a)$  и  $\phi_2(a)$ . Не приводя выкладок, аналогичных при получении формулы (2.2), выпишем частные решения

$$\phi_2 = -\frac{a^2 (2\alpha - \omega_{ar}^2) (10\alpha + \omega_{ar}^2)}{48 \omega_{ar}^3}, \quad A_2 = -\delta a \quad (2.4)$$

Сама функция  $r_3$  предстанет в виде

$$r_3 = \frac{(2\alpha + 11\omega_{ar}^2)(2\alpha + 5\omega_{ar}^2)}{192\omega_{ar}^4} a^3 \cos 3\varphi \quad (2.5)$$

Тогда, в силу формул (2.4) и разложений (1.6), амплитуда и фаза осцилляций определяются через формулы

$$a = a_0 e^{-\delta t}, \quad a_0 = a(0), \quad \beta = \frac{3\gamma(5\gamma + 2)}{32} \frac{\omega_{ar}}{\delta} a^2, \quad \varphi = \omega_{ar} t + \beta \quad (2.6)$$

Здесь  $a_0$  – постоянная интегрирования, величина  $\beta$ , как и следовало ожидать, является функцией от квадрата амплитуды. Приближенное решение (1.5) теперь предстанет в явном виде

$$R = a \cos \varphi - \frac{\gamma + 3}{4} a^2 \cos 2\varphi + \frac{3(\gamma - 1)}{4} a^2 + 0(a^3) \quad (2.7)$$

В отсутствие вязкости ( $\delta = 0$ ) вновь получим решение (2.7), в котором, однако, будет фигурировать нелинейная частота  $\Omega$

$$a = a_0 = \text{const}, \quad \varphi = \Omega t, \quad \Omega = \omega_{ar} \left[ 1 - \frac{3\gamma(5\gamma + 2)}{16} a_0^2 \right]$$

Без учета дополнительных нелинейностей – пятого и шестого членов уравнения (1.4)–будем иметь

$$\Omega_* = \omega_{ar} \left[ 1 - \frac{5(3\gamma + 1)^2}{48} a_0^2 \right]$$

Поскольку  $\Omega > \Omega_*$ , постольку полный учет квадратичных нелинейных эффектов увеличивает нелинейную частоту колебаний, которая, тем не менее, меньше частоты собственных колебаний пузырька.

**3. Вынужденные колебания.** Предположим, что вдали от пузырька избыточное давление в жидкости совершает периодические колебания с заданной частотой  $\omega$ . Полагая в (1.4)  $p_1 = 3\gamma F \cos \omega t$ , где  $F = \text{const}$  определяет амплитуду вынуждающей силы, перепишем уравнение в виде

$$\ddot{R} + \omega_{ar}^2 R + 2\delta\dot{R} - \alpha R^2 + R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\omega_{ar}^2 F \cos \omega t \quad (3.1)$$

Поскольку при вынужденных колебаниях возникают резонансные явления, то для нахождения их значений частот предварительно строится прямое разложение, откуда будут выявлены условия, при которых оно становится непригодным [5,6]. Вкратце опишем эту процедуру, аналогичную проведенной в [6]. Разложение (1.5) подставляется в уравнение (3.1) и далее коэффициенты при каждой степени  $\varepsilon$  приравниваются к нулю. Для функций  $r_1, r_2$  получаются уравнения, решения которых позволяют получить формулу для функции  $R$ . Однако, анализ получаемого таким путем приближенного решения свидетельствует, что оно не является равномерно-пригодным разложением второго порядка, поскольку при значениях частот  $\omega = \omega_{ar}$  и  $\omega = 2\omega_{ar}$ ,  $\omega = \omega_{ar}/2$  реализуются резонансы, называемые, соответственно, главным и вторичными.

**а. Главный (основной) резонанс на частоте  $\omega \approx \omega_{ar}$ .**

Потребуем, чтобы неоднородность, исходящая от внешнего воздействия, проявлялась одновременно с нелинейностью и диссипацией (затуханием), которые в задаче свободных колебаний появляются в членах порядка  $\varepsilon^3$  в третьем приближении. Поэтому примем, что  $F \sim \varepsilon^3$ . Подстановка разложения (1.5) в уравнение (3.1) и последующие выкладки вновь приводят для первого и второго приближений к решениям (2.1) и (2.2), определяющим форму свободных колебаний. В третьем приближении получим уравнение (2.3) с добавлением слагаемого  $(-F \cos \omega t)$  в правой части. Подстановка функций (2.1), (2.2) в полученное уравнение и ввод в рассмотрение параметра расстройки частоты  $\sigma = \omega_{ar} - \omega$  дает

$$\frac{\partial^2 r_3}{\partial \varphi^2} + r_3 = \left[ \frac{2}{\omega_{ar}} \phi_2 + \frac{a^2 (2\alpha - \omega_{ar}^2)(10\alpha + \omega_{ar}^2)}{24 \omega_{ar}^4} - \frac{1}{a} F \cos(\sigma t + \beta) \right] a \cos \varphi +$$

$$+ \left[ \frac{2}{\omega_{ar}} A_2 + 2 \frac{\delta}{\omega_{ar}} - F \sin(\sigma t + \beta) \right] \sin \varphi - \frac{(2\alpha + 5\omega_{ar}^2)(2\alpha + 11\omega_{ar}^2)}{\omega_{ar}^4} \frac{a^3}{8} \cos 3\varphi \quad (3.2)$$

В силу требования отсутствия секулярных членов в решении будем иметь

$$A_2(a) = -\delta a + \frac{\omega_{ar}}{2} F \sin(\sigma t + \beta)$$

$$\phi_2(a) = -\frac{a^2 (2\alpha - \omega_{ar}^2)(10\alpha + \omega_{ar}^2)}{48 \omega_{ar}^3} + \frac{\omega_{ar}}{2a} F \cos(\sigma t + \beta) \quad (3.3)$$

Подставляя соотношения (3.3) в разложения (1.8), приходим к неавтономной системе, в которой введем новую безразмерную переменную

$$v = \sigma t + \beta, \quad \dot{\varphi} = \dot{v} + \omega_{ar} - \sigma \quad (3.4)$$

исключается явная зависимость от  $t$  и система уравнений преобразовывается в автономную

$$a\dot{v} = \sigma a - \frac{a^3 (2\alpha - \omega_{ar}^2)(10\alpha + \omega_{ar}^2)}{48 \omega_{ar}^3} + \frac{\omega_{ar}}{2} F \cos v$$

$$\dot{a} = -\delta a + \frac{\omega_{ar}}{2} F \sin v \quad (3.5)$$

Отметим, что исследование основного резонанса иным способом–методом многих масштабов [6], – вновь приводит к системе (3.5) и формулам (2.1), (2.2).

Исследуем установившиеся ( $\dot{a} = 0, \dot{v} = 0$ ) пульсации пузырька и выведем уравнение резонансной кривой, выявляющей зависимость амплитуды  $a_0$  от расстройки частоты  $\sigma$ . Тогда из системы (3.5) следует соотношение

$$(B_2 a_0^2)^3 - 2\sigma_1 (B_2 a_0^2)^2 + (\sigma_1^2 + \delta_1^2) B_2 a_0^2 = \frac{B_0}{4} F^2$$

$$B_2 = \frac{(2\alpha - \omega_{ar}^2)(10\alpha + \omega_{ar}^2)}{48 \omega_{ar}^4}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\omega_{ar}} = 1 - \frac{\omega}{\omega_{ar}}, \quad \delta_1 = \frac{\delta}{\omega_{ar}} \quad (3.6)$$

представляющее собой искомое безразмерное уравнение резонансной кривой. В плоскости  $(\sigma_1, a_0)$  уравнение касательной к резонансной кривой имеет вид

$$\frac{da_0}{d\sigma_1} = \frac{a_0 (B_2 a_0^2 - \sigma_1)}{\sigma_1^2 - 4B_2 a_0^2 \sigma_1 + 3(B_2 a_0^2)^2 + \delta_1^2} \quad (3.7)$$

Приравняв в нулю уравнение (3.7), определим зависимость максимального значения амплитуды  $a_0$  от расстройки  $\sigma_1$ , подстановка которой в (3.6) выявляет, в свою очередь, ее зависимость от величины внешней вынуждающей силы

$$(a_0)_{\max}^2 = \frac{\sigma_1}{B_2}, \quad (a_0)_{\max} = \frac{1}{2} \frac{F}{\delta_1}$$

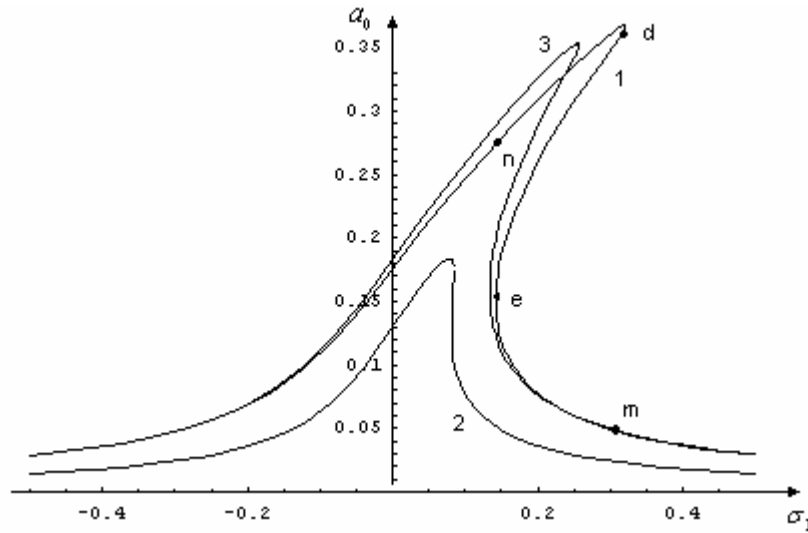
Уравнение вертикальной касательной находится из требования  $da_0/d\sigma_1 = \infty$ , т.е. равенства нулю знаменателя в (3.7), откуда определяются абсциссы вертикальной касательной

$$\sigma_1^{(1,2)} = 2B_2 a_0^2 \pm \sqrt{(B_2 a_0^2)^2 - \delta_1^2}$$

Из требования  $\sigma_1^{(1)} = \sigma_1^{(2)}$  находим значение критической силы внешнего воздействия

$$F_{кр}^{(2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1}{B_2}} = \sqrt{\frac{8}{B_2} \delta_1^3}, \quad \sigma_1 = 2\delta_1, \quad (a_0)_{кр}^2 = \frac{\delta_1}{B_2} \quad (3.8)$$

Очевидно, что каждому исходному радиусу пузырька и сорту газа соответствуют свои значения критической силы.



Фиг.1 Резонансные кривые для пульсирующих в воде пузырьков равного радиуса с одинаковым исходным давлением. Кривая 1 соответствует воздушному пузырьку при  $\delta_1 = 0.04$  и  $F = 2F_{кр}^{(2)} = 2.9442 \cdot 10^{-2}$ ; 2-тому же пузырьку при  $F = F_{кр}^{(2)} = 1.4725 \cdot 10^{-2}$ ; 3-пузырьку с  $CO_2$  при  $\delta_1 = 0.04167$  и  $F = 1.75F_{кр}^{(2)} = 2.9442 \cdot 10^{-2}$ .

Обозначим через  $F_{кр}^{(1)}$  критическое значение внешней вынуждающей силы в случае частичного учета нелинейных эффектов, т.е. пренебрежения пятым и шестым слагаемыми уравнения (3.1), а через  $B_1 = (5/12)(\alpha/\omega_{ar}^2)^2$  – коэффициент в уравнении (3.6) вместо  $B_2$ . Очевидно, что  $B_2 < B_1$  и, в силу (3.8), имеем  $F_{кр}^{(2)} > F_{кр}^{(1)}$ . При значениях  $F > F_{кр}^{(2)} > F_{кр}^{(1)}$  на резонансных кривых проявится гистерезис (фиг.1, кривые 1,3) и будут иметь место скачкообразные изменения амплитуды пульсаций пузырька. Однако, при выполнении требования  $F > F_{кр}^{(1)}$

возможна реализация значения  $F \leq F_{кр}^{(2)}$  и тогда явление гистерезиса отсутствует, т.е. резонансная кривая однозначна (фиг.1, кривая 2).

На фиг.1 при одинаковом исходном давлении  $p_0$  приведены резонансные кривые, отнесенные к пульсирующим в воде пузырькам равного радиуса  $R_0$ , которые находятся под воздействием разных значений внешних сил  $F$ . Кривые 1 и 2 относятся к воздушному пузырьку ( $\gamma = 1.4$ ;  $B_2 = 2.3625$ ) при  $\delta_1 = 0.04$  и, соответственно,  $F = 2F_{кр}^{(2)} = 2.9442 \cdot 10^{-2}$ ,  $F = F_{кр}^{(2)} = 1.4721 \cdot 10^{-2}$ . Кривая 3 отнесена к пузырьку того же радиуса с углекислым газом  $CO_2$  ( $\gamma = 1.29$ ;  $B_2 = 2.0468$ ) при  $\delta_1 = 0.04167$ ,  $F = 1.75F_{кр}^{(2)} = 2.9442 \cdot 10^{-2}$ . Характерной особенностью каждой из кривых является степень искривленности, зависящая от значений параметров  $\gamma$ ,  $\delta_1$  и  $F$ . С переходом от воздуха к  $CO_2$ , т.е. уменьшением  $\gamma$ , кривая 3 в сравнении с 1 менее искривлена (более пологая). Резкие искривления резонансных кривых, обусловленные наличием нелинейных эффектов, приводят к явлениям срыва и скачка амплитуды пульсации, что подтверждается анализом поведения, например, кривой 1. Действительно, передвижение по ней вдоль положительного направления оси  $\sigma_1$ , соответствующее уменьшению величины частоты  $\omega$  вынуждающей силы, приводит к медленному увеличению амплитуды до максимального значения  $a_0 = 0.368$  и последующему ее уменьшению до  $a_0 = 0.3673$  (точка  $d$ ,  $\sigma_1 = 0.3412$ ). По его достижению происходит срыв (скачкообразное уменьшение) значения до  $a_0 = 0.0462$  (точка  $m$ ,  $\sigma_1 = 0.3212$ ) и далее с уменьшением  $\omega$  имеет место плавный спад значения амплитуды. Передвижения вдоль отрицательного направления оси  $\sigma_1$ , соответствующее, наоборот, увеличению  $\omega$ , приводит к медленному увеличению амплитуды до значения  $a_0 = 0.01506$  (точка  $e$ ,  $\sigma_1 = 0.1428$ ). По его достижению значение амплитуды скачком увеличивается до  $a_0 = 0.2748$  (точка  $n$ ,  $\sigma_1 = 0.1428$ ) и с увеличением  $\omega$  происходит медленный спад значения  $a_0$ .

**б. Вторичные резонансы.** При их рассмотрении будет использован менее трудоемкий метод Ван-дер-Поля. Для компактной записи приводимых результатов удобно представлять искомые решения в комплексной форме. Решением линейного неоднородного варианта уравнения (3.1) является функция

$$R(t) = Ae^{i\omega_{ar}t} + \Lambda e^{i\omega t} + (\text{к.с.}), \quad A = \frac{a}{2} e^{i\beta}, \quad \Lambda = \frac{\omega_{ar}^2}{\omega^2 - \omega_{ar}^2} \frac{F}{2} \quad (3.9)$$

$$\dot{R}(t) = i\omega_{ar} A e^{i\omega_{ar}t} + i\omega \Lambda e^{i\omega t} + (\text{к.с.}) \quad (3.10)$$

где комплексная  $A$  и ее сопряженная  $\bar{A}$  амплитуды, а также фаза  $\beta$  являются постоянными величинами. Согласно идее метода, полагается [5,6], что решение нелинейного уравнения (3.1) вновь можно искать в виде (3.9), (3.10), однако, уже с



медленно меняющимися по  $t$  функциями  $A(t)$ ,  $\bar{A}(t)$  и  $\beta(t)$ . Здесь символ (к.с.) означает совокупность комплексно-сопряженных функций. Дифференцирование (3.9) с последующим комбинированием с (3.10) дает связь

$$\dot{\bar{A}} = -Ae^{2i\omega_{ar}t} \quad (3.11)$$

Подставляя (3.9) в уравнение (3.1) и учитывая связь (3.11), приходим к искомому уравнению первого приближения относительно комплексной амплитуды

$$\begin{aligned} i\dot{A} \left[ 1 + Ae^{i\omega_{ar}t} + \Lambda e^{i\omega t} + (k.c) \right] = & -i\delta \left[ Ae^{i\omega_{ar}t} + \frac{\omega}{\omega_{ar}} \Lambda e^{i\omega t} - (k.c) \right] e^{-i\omega_{ar}t} + \\ & + \frac{\alpha}{2\omega_{ar}} \left\{ 2A\Lambda \left( e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) + \Lambda^2 \left[ e^{i(2\omega - \omega_{ar})t} + e^{-i(2\omega + \omega_{ar})t} \right] + \right. \\ & + 2\bar{A}\Lambda \left[ e^{i(\omega - 2\omega_{ar})t} + e^{-i(\omega + 2\omega_{ar})t} \right] + A^2 \left( e^{i\omega_{ar}t} + e^{-i3\omega_{ar}t} \right) + 2(A\bar{A} + \Lambda^2) e^{-i\omega_{ar}t} \left. \right\} + \\ & + A\Lambda \left[ \frac{\omega^2 + \omega_{ar}^2 + 3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}} e^{i\omega t} + \frac{\omega^2 + \omega_{ar}^2 - 3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}} e^{-i\omega t} \right] + \frac{5}{4} \frac{\omega^2}{\omega_{ar}} \Lambda^2 \left[ e^{i(2\omega - \omega_{ar})t} + \right. \\ & + e^{-i(2\omega + \omega_{ar})t} \left. \right] + \bar{A}\Lambda \left[ \frac{\omega^2 + \omega_{ar}^2 - 3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}} e^{i(\omega - 2\omega_{ar})t} + \frac{\omega^2 + \omega_{ar}^2 + 3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}} e^{-i(\omega + 2\omega_{ar})t} \right] + \\ & + \frac{5}{4} \omega_{ar} \left( A^2 e^{i\omega_{ar}t} + \bar{A}^2 e^{-3i\omega_{ar}t} \right) + \left( \frac{\omega_{ar}}{4} A\bar{A} + \frac{\omega^2}{4\omega_{ar}} \Lambda^2 \right) e^{-i\omega_{ar}t} \quad (3.12) \end{aligned}$$

При выводе укороченных уравнений, описывающих в первом приближении вторичные резонансы, в уравнении (3.12) оставляются в рассмотрение лишь медленно меняющиеся слагаемые.

**61. Субгармонический резонанс на частоте  $\omega \approx 2\omega_{ar}$ .** Близость вынуждающей частоты к удвоенной собственной отразим через параметр расстройки  $\sigma = \omega - 2\omega_{ar}$ . Тогда, согласно (3.12), укороченное линейное уравнение предстанет с переменным коэффициентом в неоднородной части

$$i\dot{A} = -i\delta A + \frac{2\alpha + \omega_{ar}^2 + \omega^2 - 3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}} \bar{A}\Lambda e^{i\sigma t}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{F}{(2 + \sigma_{11})^2 - 1}, \quad \sigma_{11} = \frac{\sigma}{\omega_{ar}} = \frac{\omega}{\omega_{ar}} - 2$$

Подстановка  $A = Be^{i\sigma t/2}$  преобразует его в линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\dot{B} + \frac{2\delta + i\sigma}{2} B = -i\omega_{ar} E \Lambda \bar{B}, \quad E = \frac{2\alpha - \omega_{ar}^2 + \sigma(\sigma + \omega_{ar})}{2\omega_{ar}^2}$$

Представляя комплексную амплитуду в виде  $B = B_1 + iB_2$ , для действительных  $B_1, B_2$  получим систему связанных уравнений

$$\dot{B}_1 + \delta B_1 + \left( E\Lambda - \frac{\sigma_{11}}{2} \right) \omega_{ar} B_2 = 0, \quad \dot{B}_2 + \delta B_2 + \left( E\Lambda + \frac{\sigma_{11}}{2} \right) \omega_{ar} B_1 = 0$$

Опуская стандартные выкладки для разрешения полученной системы, выпишем общее решение для функции  $B(t)$

$$B = b_1 e^{\chi_1 T} + b_2 e^{\chi_2 T} - i \sqrt{\frac{EF + \Sigma}{EF - \Sigma}} (b_1 e^{i\chi_1 T} - b_2 e^{i\chi_2 T}), \quad b_{1,2} = \text{const}, \quad T = \omega_{ar} t \quad (3.13)$$

$$\Sigma = \sigma_{11} (\sigma_{11} + 1) (\sigma_{11} + 3), \quad \chi_{1,2} = -\delta_1 \pm \frac{1}{2} \frac{\sigma_{11}}{\Sigma} \sqrt{E^2 F^2 - \Sigma^2}, \quad \delta_1 = \frac{\delta}{\omega_{ar}}$$

Для того, чтобы амплитуда пульсаций пузырька оставалась малой, но конечной величиной, необходимо выполнение требования  $B \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для фиксированных значений  $\sigma_{11}$  и  $\delta_1$ . Такое условие налагает ограничение на величину вынуждающей силы  $F$  и потому решение (3.9) запишется в разных формах. Действительно, показатели экспонент в (3.13) являются вещественными и неположительными ( $\chi_{1,2} \leq 0$ ) в диапазоне

$$\frac{\Sigma}{E} \leq F \leq \frac{\Sigma}{E} \sqrt{1 + \left( 2 \frac{\delta_1}{\sigma_{11}} \right)^2}$$

Тогда решение (3.9) предстанет в виде функции

$$R(t) = 2(b_1 e^{\chi_1 T} + b_2 e^{\chi_2 T}) \cos\left(\frac{2 + \sigma_{11}}{2} T\right) + \frac{\sigma_{11}}{\Sigma} F \cos(\sigma_{11} + 2)T +$$

$$+ 2 \sqrt{\frac{EF + \Sigma}{EF - \Sigma}} (b_1 e^{\chi_1 T} - b_2 e^{\chi_2 T}) \sin\left(\frac{\sigma_{11} + 2}{2} T\right) \quad (3.14)$$

Величины  $\chi_{1,2}$  являются комплексными при значениях  $F < \Sigma/E$

и решение (3.9) запишется в виде

$$R(t) = 2b_1 e^{-\delta_1 T} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\Sigma + EF}{\Sigma - EF}} \right] \cos\left(\frac{\sigma_{11} + 2}{2} + \frac{\sigma_{11}}{2\Sigma} \sqrt{\Sigma^2 - E^2 F^2}\right) T +$$

$$+ 2b_2 e^{-\delta_1 T} \left[ 1 + \sqrt{\frac{\Sigma + EF}{\Sigma - EF}} \right] \cos\left[\frac{\sigma_{11} + 2}{2} - \frac{\sigma_{11}}{2\Sigma} \sqrt{\Sigma^2 - E^2 F^2}\right] T +$$

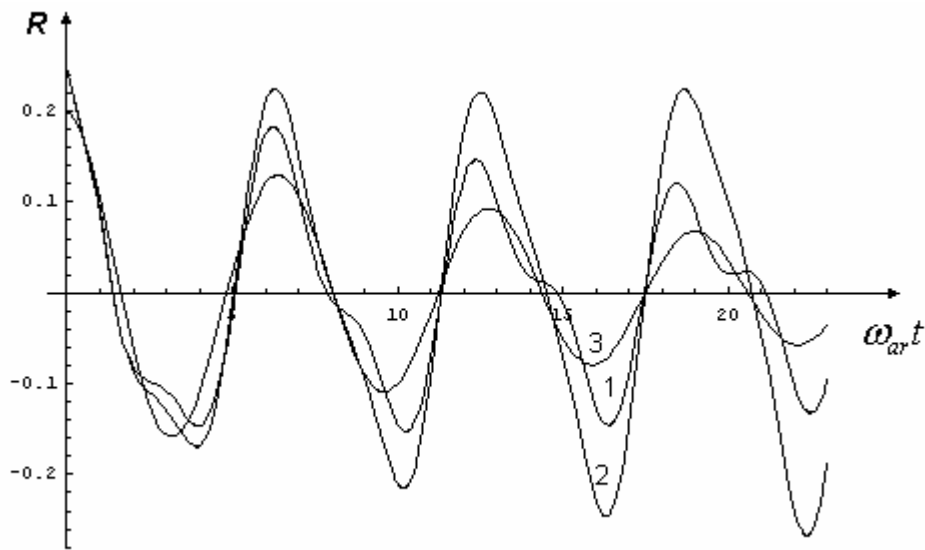
$$+ \frac{\sigma_{11}}{\Sigma} F \cos(\sigma_{11} + 2)T \quad (3.15)$$

При очень больших значениях времени  $T$  решения (3.14) и (3.15) стремятся к предельной функции

$$R(t) = \frac{\sigma_{11}}{\Sigma} F \cos(\sigma_{11} + 2)T$$

На фиг.2 для пульсаций воздушного ( $\gamma = 1.4$ ) пузырька в воде представлены графики решений (3.14) – кривые 1, 2 и (3.15) – кривая 3. Согласно определению

$\delta_1$  из (1.4) и (3.6), величина значения  $\delta_1$  обратно пропорциональна квадрату исходного радиуса  $R_0$ . Для достаточно мелкого пузырька ( $\delta_1 = 0.08$ ) с самого начала Эффект диссипации преобладает над линейностью и амплитуда пульсаций сразу уменьшается (кривая 1,  $b_1 = b_2 = 0.05$ ,  $\sigma_{11} = 0.08$ ,  $F = 0.1678$ ). Для пузырька большого размера ( $\delta_1 = 0.038$ ) при тех же исходных данных вначале нелинейность доминирует над диссипацией и посему происходит увеличение амплитуды, продолжающееся до момента  $t = 16\pi/\omega_{ar}$ . По истечении этого времени начинается процесс преобладания диссипации над нелинейностью и амплитуда медленно убывает – кривая 2. Для пульсаций, описываемых решением (3.15) при исходных данных  $\sigma_{11} = 0.08$ ,  $\delta_1 = 0.08$ , но с меньшей вынуждающей силой  $F = 0.0934$ , амплитуда сразу уменьшается – кривая 3. Численный анализ свидетельствует, что характер поведения кривой, соответствующий пузырьку большого радиуса ( $\delta_1 = 0.038$ ), совпадает с кривой 3. Этот факт можно объяснить не только доминированием диссипативного эффекта над нелинейными, но и малостью величины внешней вынуждающей силы  $F$ .



Фиг.2. Графики решений при субгармоническом резонансе на частоте  $\Omega = 2\omega_{ar}$ .  
Кривые 1,2 соответствуют решению (3.14), 3–решению (3.15).

**62. Субгармонический резонанс на частоте  $\Omega \approx \omega_{ar}/2$ .** Вводя в рассмотрение параметр расстройки частоты  $\sigma = \Omega - \omega_{ar}/2$ , из (3.11) получим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$i\dot{A} = -i\delta A + \frac{2\alpha + 5\omega^2}{4\omega_{ar}} \Lambda^2 e^{i2\sigma t}, \quad \Lambda = \frac{2F}{(2\sigma_{12} + 1)^2 - 4}, \quad \sigma_{12} = \frac{\sigma}{\omega_{ar}} = \frac{\omega}{\omega_{ar}} - \frac{1}{2}$$

общим решением которого является функция

$$A = A_0 e^{-\delta_1 T} - \frac{i}{\delta_1 + i2\sigma_{12}} \frac{2\alpha + 5\omega^2}{4\omega_{ar}^2} \Lambda^2 e^{i2\sigma_{12} T}, \quad \frac{1}{\delta_1 + i2\sigma_{12}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_1^2 + 4\sigma_{12}^2}} e^{-i \arctg 2\sigma/\delta}$$

где  $A_0$  – значение комплексной амплитуды в начальный момент времени  $t = 0$ .

Тогда решение (3.9) можно записать в явном виде

$$\begin{aligned} R(t) = & a_0 e^{-\delta_1 T} \cos(T + \beta_0) + \frac{4F}{(2\sigma_{12} + 1)^2 - 4} \cos\left(\frac{2\sigma_{12} + 1}{2} T\right) + \\ & + \frac{8\alpha + 5\omega_{ar}^2 (2\sigma_{12} + 1)^2}{2\omega_{ar}^2} \frac{1}{\left[(2\sigma_{12} + 1)^2 - 4\right]^2} \frac{F^2}{\sqrt{\delta_1^2 + 4\sigma_{12}^2}} \times \\ & \times \sin\left[\left(2\sigma_{12} + 1\right)T - \arctg \frac{2\sigma_{12}}{\delta_1}\right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь, в силу обозначений из (3.9),  $a_0$  и  $\beta_0$  – значения действительных амплитуды и фазы в момент  $T = 0$ .

**б3.** Помимо рассмотренных резонансов, из (3.12) следует, что возможен резонанс на очень низкой вынуждающей частоте  $\omega \approx 0$ , которому соответствует уравнение

$$\begin{aligned} i\dot{A} \left[ 1 + \Lambda (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right] = & -i\delta A + \\ + A\Lambda \left[ \frac{2\alpha + \omega_{ar}^2 + \omega^2}{2\omega_{ar}} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{3}{2}\omega (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right] \quad & \Lambda = -\frac{F}{2} \end{aligned}$$

Отделяя действительную и мнимую части, приходим к уравнениям относительно амплитуды  $a$  и фазы  $\beta$ . При их интегрировании учтем, что в силу порядков  $F \sim \varepsilon^3$ ,  $\omega/\omega_{ar} \sim \varepsilon^4$  имеет место соотношение  $|F \cos \omega t| \ll 1$ . Тогда

$$a(t) = a_0 e^{-\delta_1 T}, \quad \beta(t) = \frac{2\alpha + \omega_{ar}^2}{2\omega_{ar}} \frac{F}{\omega} \sin \frac{\omega}{\omega_{ar}} T + \beta_0, \quad a_0 = a(0), \quad \beta_0 = \beta(0)$$

и решение (3.9) предстанет в виде функции

$$R(t) = a_0 e^{-\delta_1 T} \cos\left(T + \frac{2\alpha + \omega_{ar}^2}{2\omega_{ar}^2} \frac{\omega_{ar}}{\omega} F \sin \frac{\omega}{\omega_{ar}} T + \beta_0\right) - F \cos \omega t$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Devin Ch. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsation air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Amer.. 1959. V.31. N12. pp.1654-1667.
2. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400с.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука. 1987. 464с.
4. Акуличев В.А. Пульсация кавитационных полостей // Мощные ультразвуковые поля. М.: Наука. 1968. С.129-165.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
6. Nayfeh A.S. Introduction to perturbation techniques. Ect.: Wiley. 1981. = Найфе А. Введение в теорию возмущений. М.: Мир, 1984. 535с.
7. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 456с.

Российско-Армянский (Славянский)  
государственный университет  
Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию  
17.07.2006