

УДК 539.3

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЬЦЕВОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА И
УПРУГОГО СЛОЯ В РЕЖИМЕ ГРАНИЧНОГО ТРЕНИЯ

Шекян А. Л., Шекян Л. А.

Ключевые слова: упругость, контакт, слой, кольцевой штамп, трение, износ, тепловыделение.

Key words: Elasticity, contact, layer, circular ring punch, friction, wear, heat excretion.

Ա. Լ. Շեկյան, Լ. Ա. Շեկյան

Օղակաձև դրոշմի և առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցությունը
սահմանային շփման ռեժիմում

Ուսումնասիրված է իր առանցքի շուրջը հավասարաչափ պտտվող պլանում օղակաձև դրոշմի և առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցության առանցքահամաչափ խնդիրը շփման, մաշման և շփումից անջատված ջերմության գործոնների հաշվառումով: Խնդիրը բերված է ոչ գծային հավասարումների համակարգի և վերջինիս հետազոտությունը կատարված է սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա: Դիտարկված է թվային օրինակ:

A L. Shekyan, L. A. Shekyan

The contact interaction of the circular punch ring and elastic layer in conditions of boundary friction

An axisymmetric problem of the contact interacting of uniformly rotating about its axis punch with a rigidly closed an elastic layer in response to friction, wear and heat excretion from friction is considered. The problem is reduced to the solution of nonlinear equations, the investigation of which follows by compressed reflection principles. Numerical example is presented.

Проводится исследование осесимметричной контактной задачи для вращающегося вокруг своей оси кольцевого штампа и упругого слоя, находящихся в режиме граничного трения. Учитывается износ трущихся поверхностей и тепловыделение от трения. Приведен численный пример.

Проводится теоретическое исследование осесимметричной контактной задачи теории упругости для вращающегося вокруг своей оси кольцевого в плане штампа и упругого заземленного одним краем слоя, находящихся в режиме граничного трения. Учитываются факторы износа трущихся поверхностей и тепловыделения от трения.

Среди исследований, проведенных в этом направлении, можно отметить [1-5] и др.

Задача сведена к замкнутой системе нелинейных уравнений и на основе принципа сжимающих отображений проведено исследование полученной системы.

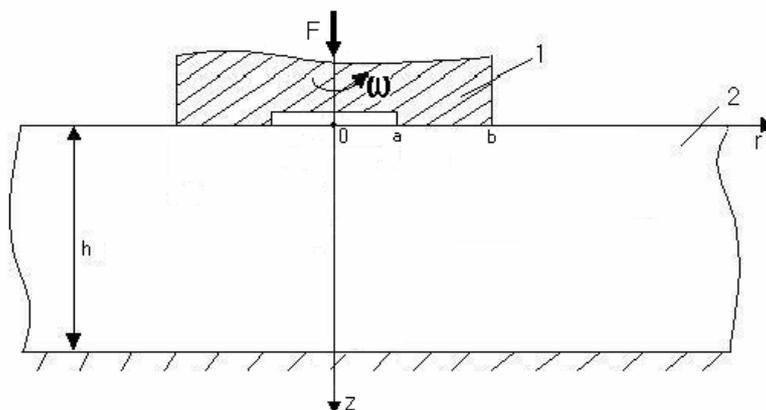
Рассматриваемую контактную задачу можно трактовать как простейшую модель взаимодействия вала и подпятника (опор скольжения для восприятия осевых нагрузок вала) в узлах трения инженерных конструкций, когда к трущимся поверхностям поступает смазка без избыточного давления. При таком условии упорные подшипники работают только в режиме граничного трения, так как в отличие от подшипников скольжения, их трущиеся поверхности плоскопараллельные и с повышением скорости скольжения в зоне трения не может быть получен необходимый клиновидный масляный зазор режима жидкостного трения, каким получается в подшипниках скольжения.

Актуальность проблемы обусловлена тем, что в машинах и механизмах, машиностроении, транспорте, сельском хозяйстве, добывающей промышленности и др., велики потери выработанной энергии на преодоление трения, а износ и

повреждение их отдельных деталей часто лимитируют работу всего устройства, ремонт которых требует больших расходов. При этом, исследованию соответствующей контактной задачи предшествует разработка мероприятий по снижению указанных затрат.

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений

Пусть штамп 1 с плоским кольцевым основанием с внутренним и внешним радиусами a и b ($a < b$) под действием внешних вертикальных сил с равнодействующей F равномерно вращается вокруг своей оси z и вдавливаясь в упругий слой 2, защемленный своей нижней поверхностью (фиг. 1).



Фиг. 1

Считаем, что тела 1 и 2 находятся в режиме граничного трения, характерными особенностями которого являются факторы изнашивания и тепловыделение от трения.

Требуется определить законы распределения контактных напряжений, действующих в зоне трения, меру погружения штампа в слой, а также потери мощности в узле трения.

В принятых предположениях условие равенства нормальных перемещений граничных точек слоя и штампа в зоне трения ($a \leq r \leq b, z = 0$) имеет вид

$$U_w + U_T + U_E = \delta \quad (1)$$

где U_w, U_T, U_E – вертикальные перемещения, обусловленные соответственно износом, температурной деформацией и упругой деформацией слоя, δ – мера погружения штампа в слой, h – толщина слоя.

Согласно экспериментам [6], скорость изнашивания может быть выражена степенной функцией

$$\frac{\partial U_w}{\partial t} = K_1 [p(r, t)]^m (\omega r)^n \quad (2)$$

где ω – угловая скорость штампа, t – время, $1 \leq m < 3, n \approx 1$, K_1 – коэффициент пропорциональности, зависящий от материалов пары трения и геометрии трущихся поверхностей, причем для переработанных поверхностей $m \approx 1$, $p(r, t)$ – контактное нормальное напряжение в точке с координатом r и в момент времени t ,

притом, после начального небольшого неустановившегося периода его изменение со временем незначительно, т.е можно считать $p(r,t) \approx p(r)$.

Для определения U_T будем считать, что часть выделенной от трения тепловой энергии постоянным потоком переходит в слой через ее граничные точки контактной области и смазочные камеры. При этом предполагается, что в слое установлено стационарное температурное поле, распределение которого $T(r, z)$ относительно окружающей среды удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

во всех внутренних точках слоя ($0 \leq r < \infty, 0 < z < h$), а на поверхности слоя – граничным условиям

$$-\lambda \frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} = \begin{cases} Q = \text{const} & 0 \leq r < b \\ 0, & b < r < \infty \end{cases} \quad (4)$$

$$T(r, h) = 0, \quad (0 \leq r < \infty)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, Q – величина теплового потока, которая, согласно экспериментам, пропорциональна средней мощности сил трения [7]

$$Q = K_2 \omega \int_a^b \tau(r) r^2 dr \quad (5)$$

Здесь K_2 – тепловой эквивалент работы сил трения, а $\tau(r)$ – касательное контактное напряжение, которое определяется законом Кулона [5]

$$\tau(r) = f p(r), \quad (a \leq r \leq b) \quad (6)$$

где f – коэффициент трения.

Решение граничной задачи (3)-(4) имеет вид [8]

$$T(r, z) = \frac{Qb}{2\lambda} \int_0^\infty \frac{J_1(b\alpha) \text{sh}\alpha(h-z)}{\alpha \text{ch}\alpha h} J_0(\alpha r) d\alpha \quad (7)$$

а температурные напряжения выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_r^T &= -\frac{QE\alpha_T b}{2\lambda r} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha b) \text{sh}\alpha(h-z)}{\alpha^2 \text{ch}\alpha h} J_1(\alpha r) d\alpha \\ \sigma_\phi^T &= -\frac{QE\alpha_T b}{2\lambda r} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha b) \text{sh}\alpha(h-z)}{\alpha^2 \text{ch}\alpha h} \left[J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} \right] d\alpha \\ \tau_{rz}^T &= \tau_{r\phi}^T = \sigma_z^T = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

где α_T – коэффициент температурного расширения, E – модуль упругости материала слоя, $J_0(z), J_1(z)$ – функции Бесселя первого рода.

Теперь, учитывая зависимость Дюгамеля-Неймана [8]

$$\varepsilon_z^T = \frac{1}{E} \left[\sigma_z^T - \nu (\sigma_r^T + \sigma_\phi^T + \sigma_z^T) \right] + \alpha_T T \quad (9)$$

на основе (7) и (8) получим

$$U_T = \frac{(1+\nu)Qb\alpha_T}{2\lambda} \int_0^\infty \frac{1-\text{ch}\alpha h}{\alpha^2 \text{ch}\alpha h} J_1(\alpha b) J_0(\alpha r) d\alpha \quad (10)$$

где ν – коэффициент Пуассона материала слоя.

Наконец, для определения упругих перемещений U_E , которые получают граничные точки слоя в зоне трения, когда поверхность слоя $z = h$ закреплена, а в точках $a \leq r \leq b, z = 0$ действуют осесимметрично распределенные контактные напряжения $p(r)$ и $\tau(r)$, соответственно, воспользуемся формулой (см.[1] с. 277-282, а также [9] с. 399-400)

$$U_E = \frac{2(1-\nu^2)}{Eh} \int_a^b p(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_0\left(\frac{ru}{h}\right) J_0\left(\frac{\rho u}{h}\right) du \quad (11)$$

где

$$L(u) = \frac{2\varpi \text{sh}2u - 4u}{2\varpi \text{ch}2u + 4u^2 + 1 + \varpi}, \quad \varpi = 3 - 4\nu \quad (12)$$

В число основных уравнений задачи входят также уравнения равновесия штампа

$$2\pi \int_a^b p(r) r dr = F, \quad 2\pi \int_a^b \tau(r) r^2 dr = M \quad (13)$$

где F и M – соответственно, внешние осевая сжимающая сила и вращающий момент пары, действующие на штамп.

Таким образом, для определения основных неизвестных задачи имеются уравнения (1)-(13), которые, как выясняется ниже, образуют полную систему уравнений относительно этих неизвестных.

2. Исследование полученной системы уравнений

Для проведения полного математического исследования полученной системы уравнений целесообразно ввести следующие безразмерные величины:

$$\xi = \frac{r}{b}, \quad \varepsilon = \frac{a}{b}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{b}, \quad p_0(\xi) = \frac{K_1 t}{b} (\omega r)^n [p(r)]^m$$

$$\theta = \frac{1-\nu^2}{hE} \left[\frac{b^{1+m+n}}{K_1 \omega^n t} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad \mu = \frac{K_2 E h \omega b^3}{2\lambda(1-\nu)} \alpha_T f \quad (14)$$

$$K(\xi, \eta) = \int_0^\infty L(u) J_0\left(\frac{b\xi}{2h} u\right) J_0\left(\frac{b\eta}{2h} u\right) du$$

$$q(\xi) = \int_0^\infty \left[1 - \left(\text{ch} \frac{2hu}{b} \right)^{-1} \right] u^{-2} J_1(u) J_0(\xi u) du$$

Тогда, учитывая (2), (5), (6), (10) и (11), из условия (1) получим уравнение

$$p_0(\xi) + \theta \int_\varepsilon^1 [K(\xi, \eta) - \mu g(\xi) \eta] \eta^{\frac{m-n}{m}} [p_0(\eta)]^{\frac{1}{m}} d\eta = \delta_0, \quad (\varepsilon \leq \xi \leq 1) \quad (15)$$

которое относительно неизвестной функции $p_0(\xi)$ является нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна [10]. В уравнение (15) входит также

неизвестное безразмерное жесткое перемещение штампа δ_0 . Для определения $p_0(\xi)$ и δ_0 , кроме (15) воспользуемся также первым уравнением равновесия (13), которое с учетом (14) можно записать в виде

$$\int_{\varepsilon}^1 [p_0(\xi)]^m \xi^{1-\frac{n}{m}} d\xi = F_0 \quad (16)$$

где F_0 – безразмерная сжимающая сила

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \left[K_1 \omega^n t b^{n-1-2m} \right]^{\frac{1}{m}} F \quad (17)$$

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи сводится к определению $p_0(\xi)$ и δ_0 из системы нелинейных уравнений (15) и (16).

Мощность $N = M\omega$, потерянная при преодолении сил трения в рассматриваемом узле инженерной конструкции, определяется с помощью второго уравнения равновесия (13), которое с учетом (14) принимает вид

$$N_0 = \int_{\varepsilon}^1 [p_0(\xi)]^n \xi^{2-\frac{n}{m}} d\xi \quad (18)$$

где введено обозначение

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \left[K_1 \omega^{n-m} t b^{n-1-3m} \right]^{\frac{1}{m}} N \quad (19)$$

Полное математическое исследование системы уравнений (15), (16) проводим на основе принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций [11]. С этой целью, следуя [12], введем в рассмотрение пространство X всех непрерывных на отрезке $\xi \in [\varepsilon, 1]$ функций $x(\xi)$ с чебышевской метрикой

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{\varepsilon \leq \xi \leq 1} |x_1(\xi) - x_2(\xi)| \quad (20)$$

где x_1, x_2 – две произвольные функции из X . В пространстве X рассмотрим оператор $y = A(x)$, определяемый формулой

$$y(\xi) = W - \theta \int_{\varepsilon}^1 [K(\xi, \eta) - \mu g(\xi)\eta] \eta^{\frac{m-n}{m}} |x(\eta)|^{\frac{1}{m}} d\eta, \quad (\varepsilon \leq \xi \leq 1) \quad (21)$$

где $x(\xi) \in X$, а W – произвольное положительное число. Учитывая (14), нетрудно убедиться, что $y(\xi) \in X$. Пусть, далее, S – замкнутый шар в X с центром 0 и с произвольным радиусом $R > 0$. На основе (20) и (21) можно утверждать, что для всех $x(\xi) \in X$, т. е. при

$$\rho(0, x) = \max_{\varepsilon \leq \xi \leq 1} |x(\xi)| \leq R \quad (22)$$

выполняется условие

$$\rho(0, y) \leq W + \theta R^{1/m} \psi \quad (23)$$

где

$$\psi = \max_{\varepsilon \leq \beta \leq 1} \int_{\varepsilon}^1 |K(\xi, \eta) - \mu g(\xi, \eta)\eta|^{\frac{m-n}{m}} d\eta \quad (24)$$

На основании (20) и (21) следует также, что если $x_1(\xi)$ и $x_2(\xi)$ – два произвольных элемента из S и $y_i = A(x_i), (i = 1, 2, \dots)$, то

$$\rho(y_1, y_2) \leq \frac{\theta}{m} R^{m-1} \psi \rho(x_1, x_2) \quad (25)$$

Из соотношений (23) и (24) вытекает, что если параметры W и R выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия

$$W + \theta R^m \psi \leq R, \quad \frac{\theta}{m} R^{m-1} \psi < 1 \quad (26)$$

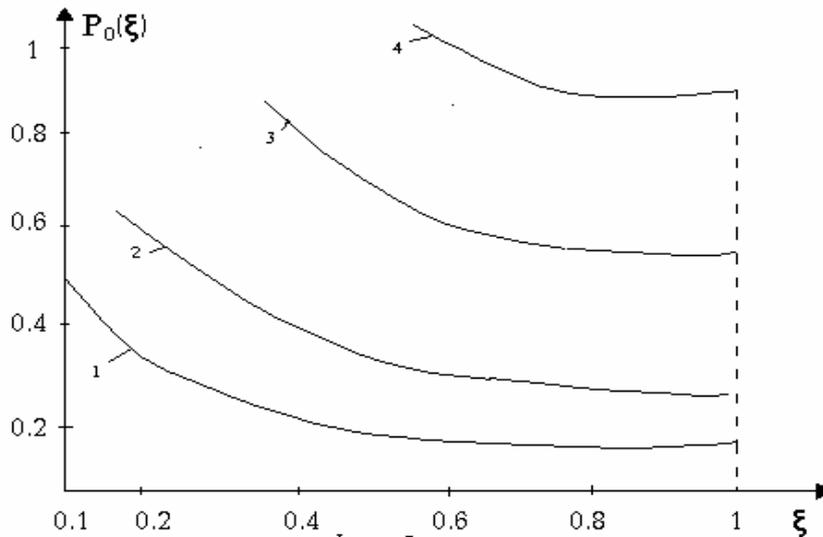
то оператор A будет отображать замкнутый шар S в себя и будет сжимающим [10]. Тогда оператор A в шаре S будет иметь неподвижную точку x^* , которая единственная и ее можно найти методом последовательных приближений

$$x_{i+1} = A(x_i), \quad i = 0, 1, \dots \quad (27)$$

отправляясь от любого начального элемента $x_0 \in S$. Полученная по метрике (20) последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ сходится к неподвижной точке x^* , которая удовлетворяет уравнению $x^* = A(x^*)$ и является искомой функцией $p_0(\xi)$. Наконец, с помощью (16) устанавливаем зависимость F_0 от принятого значения W , что можно трактовать как зависимость $\delta_0 = W$ от безразмерной внешней силы F_0 .

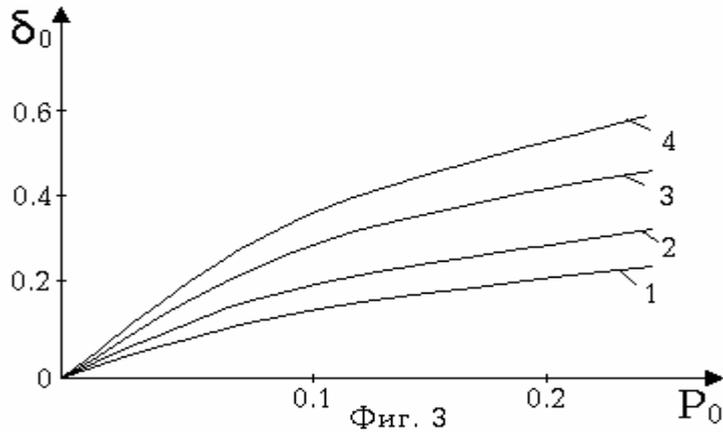
3. Анализ числовых результатов

Используя формулы (27) и отправляясь от начального элемента $x_0 \equiv 0$, с помощью ЭВМ получены решения интегрального уравнения (15) для некоторых значений безразмерного параметра ε и при следующих значениях безразмерных параметров: $F_0 = 0.2$; $m = n = 1$; $\mu = 0.1$; $\theta = 0.05$; $\chi = 2$; $h/b = 0.5$. Важно отметить, что при таких значениях параметров интегральное уравнение (15) переходит в линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, а условия



Фиг. 2

(23) существования и единственности его решения переходят в известное [10] условие $\theta \psi < 1$, которое в рассматриваемом примере выполняется.



Согласно этим вычислениям, на фиг. 2 линиями 1, 2, 3, 4 изображены законы распределения безразмерных контактных давлений $p_0(\xi)$ в области их определения $\xi \in [\varepsilon; 1]$, соответствующих значениям параметра $\varepsilon = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$. Как видно из этих графиков, значение $p_0(\varepsilon)$ безразмерного контактного давления на внутренней границе (т. е. на окружности $r = a$) для малых значений ε значительно больше, чем значения $p_0(1)$ безразмерного контактного давления на внешней границе контактной области (т. е. на окружности $r = b$). Кроме того, контактное давление достигает своего минимума вблизи точки $\xi = 1$.

На фиг. 3 линиями 1,2,3,4 изображены зависимости δ_0 от F_0 для указанных выше значений параметров $m, n, \mu, \theta, \chi, h/b$ и соответствующих при $\varepsilon = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$.

Авторы благодарят профессора С. М. Мхитаряна за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 309с.
2. Александров В. М., Коваленко Е. В. К теории контактных задач при наличии нелинейного износа // МТТ. 1982. №4. С. 98-108.
3. Акопян В. Н., Мхитарян С. М. К осесимметричной контактной задаче теории упругости при наличии износа. // Докл. АН АрмССР. 1982. Т. 75. №3. С. 140-144.
4. Горячева И. Г. Контактные задачи теории упругости для системы изнашиваемых штампов //МТТ. 1987. №6. С. 62-68
5. Александров В. М., Аннакулова Г. К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1992. Т. 13. №1. С. 154-160.
6. Трение, изнашивание и смазка. Справочник. Кн.1. М.: Наука, 1978. 400с.
7. Богатин О. Б., Мороз В. А., Тихонов А. Г. Проблемы моделирования нестационарного термоконтактного взаимодействия в трибосистемах // Трение и износ. 1992. Т. 13. №1. С. 172-184.
8. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд. АН СССР, 1962. 364с.
9. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
10. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ., 1960. 300с.
11. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа М.: Наука, 1965. 360с.
12. Мхитарян С. М., Шемян Л. А. Плоская контактная задача для двух шероховатых тел, изготовленных из степенно-упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С. 15-32.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.10.2006