ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОАКТИВНОЙ СИСТЕМЕ СЛОЙ (класса 6mm)-ПОЛУПРОСТРАНСТВО(класса 43m)

Хачатрян В.М.

Ключевые слова: электроупругий, сдвиговой, волна, слой, полупространство.
Key words: electroelastic, shear, wave, layer, half-space.

Վ.Մ. Խաչատրյան
Մակերևութային էլեկտրաառաձգական սահքի ալիքները պիեզոակտիվ շերտ(6mm դասի)-կիսատարածություն (43m դասի) համակարգում

Դիտարկվում է պիեզոակտիվ առաձգական կիսատարածություն՝(43m դասի պիեզոէլեկտրիկ) պիեզոակտիվ ծածկույթով(6mm դասի պիեզոէլեկտրիկ)։ Շերտը և կիսատարածությունը գտնվում են սահող կոնտակտի վիճակում, որտեղ շոշափող մեխանիկական լարումները հավասար են զրոյի։ Շերտում և կիսատարածությունում մակերևութային ալիքների փոխազդեցությունը պայմանավորված է նրանց բաժանման եզրում էլեկտրական դաշտի անընդհատությամբ։ Վերլուծվում են մակերևութային էլեկտրաառաձգական սահքի ալիքների գոյության առանձնահատկությունները։

V.M. Khachatryan
Surface electroelastic shear waves in a system of piezoactive layer and half-space

A piezoactive half-space with a piezoactive layer on its surface is considered. Material of the layer is piezoelectric of class 6mm and material of the half-space is piezoelectric of class 43m. The layer and the half-space are in a condition of the sliding contact, where shear mechanical stresses are taken to be zero. Interaction between shear waves in the layer and the half-space is due to continuity of electrical field on their boundary. Features of existence of surface electroelastic shear waves are analyzed.

Рассматривается пьезоактивное упругое полупространство (класса 43m) с пьезоактивным покрытием (класса 6mm). Слой и полупространство находятся в состоянии скользящего контакта, где касательные механические напряжения между пьезоэлектриками принимаются равными нулю. Взаимодействие сдвиговых волн в слое и полупространстве обусловливается непрерывностью электрического поля на границе их раздела. Проанализированы особенности существования поверхностных электроупругих сдвиговых волн.

1. Большое количество работ посвящено исследованию сдвиговых поверхностных электроупругих волн в системе слой-полупространство, когда материалы либо слоя, либо полупространства пьезоактивны (напр., [1,2]). Имеются также работы, посвященные исследованию сдвиговых волн, локализованных вдоль границы двух пьезоэлектрических полупространств [3-5]. В [6] приводится решение задачи типа Лява, когда слой и полупространство состоят из различных пьезоэлектрических материалов, обладающих кубической симметрией. В [7] рассматривается пьезоактивное упругое полупространство с пьезоактивным покрытием. Материалы полупространства и слоя являются пьезоэлектриками класса 6mm с различными свойствами. Касательные напряжения между пьезоэлектриками принимаются равными нулю. Взаимодействие сдвиговых волн в слое и полупространстве обусловливается непрерывностью электрического поля на границе их раздела.

В настоящей работе также рассматривается задача, где и слой, и полупространство пьезоактивны и касательные напряжения между ними равны нулю, но в отличие от вышеприведенного случая, материал полупространства является пьезоэлектриком класса 43m кубической симметрии, а материал слоя – пьезоэлектриком класса 6mm гексагональной симметрии. Эта задача интересна тем, что в отличие от пьезокристалла класса 6mm полупространство из пьезокристалла 43m не позволяет локализации волны на свободной поверхности полупространства. Взаимодействие сдвиговых волн в слое и полупространстве обусловливается непрерывностью электрического поля на границе их раздела.

В прямоугольной системе координат (x, y, z) полупространство занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 \le y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, слой – область $-\infty < x < \infty, -h \le y < 0$, $-\infty < z < \infty$. Вакуум занимает область $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < -h$, $-\infty < z < \infty$.

Уравнения чисто сдвиговых волн (антиплоская электроупругая задача) для полупространства имеют вид [8]:

$$a_1^2 \Delta W_1 + 2\frac{e_{14}^{(1)}}{\rho_1}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} = \frac{\varepsilon_{11}^{(1)}}{2e_{14}^{(1)}}\Delta\varphi_1 \tag{1.1}$$

Уравнения чисто сдвиговых волн (антиплоская электроупругая задача) для слоя имеют вид [9,10]:

$$a_2^2 \Delta W_2 = \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}, \qquad \Delta W_2 = \frac{\varepsilon_{11}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}\Delta\varphi_2 \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1) и (1.2)

$$a_1^2 = \frac{c_{44}^{(1)}}{\rho_1}, \quad a_2^2 = \frac{c_{44}^{(2)}(1+\chi_2)}{\rho_2}, \quad \chi_2 = \frac{[e_{15}^{(2)}]^2}{\varepsilon_{11}^{(2)} c_{44}^{(2)}} \tag{1.3}$$

где W_1 и W_2 – упругие перемещения, а φ_1 и φ_2 – электрические потенциалы, соответственно, в полупространстве и в слое, $c_{44}^{(1)}$ и $c_{44}^{(2)}$ – модули сдвига материалов полупространства и слоя, χ_2 – коэффициент электромеханической связи материала слоя, $e_{14}^{(1)}$ и $e_{15}^{(2)}$ – пьезоэлектрические модули, соответственно, для материалов полупространства и слоя.

Условия контакта между слоем и полупространством математически задаются в виде:

$$\sigma_{23}^{(1)} = 0, \ \sigma_{23}^{(2)} = 0, \ \varphi_1 = \varphi_2, \ D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \qquad \text{при } y = 0 \tag{1.4}$$

где $\sigma_{23}^{(1)}$ и $\sigma_{23}^{(2)}$ – касательные напряжения, $D_2^{(1)}$ и $D_2^{(2)}$ – нормальные компоненты индукции электрического поля в соответственных областях. На свободной поверхности слоя $y = -h$ имеют место условия

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad \varphi_2 = 0 \tag{1.5}$$

Условие электрически закрытой границы $\varphi_2 = 0$ изолирует слоистую сплошную среду от вакуума. В другом случае мы должны были решить также уравнения электростатики для вакуумной области.

Требуется найти решения уравнений (1.1) и (1.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.4), (1.5) и следующим условиям затухания по глубине полупространства:

$$\lim_{y\to\infty} W_1 = 0, \quad \lim_{y\to\infty} \varphi_1 = 0 \tag{1.6}$$

Общее решение уравнений (1.1) в виде гармонических волн, удовлетворяющее условиям затухания (1.6), получается в виде:

$$W_1 = [A_1 \exp(-kp_1 y) + B_1 \exp(-kp_2 y)] \exp i(\omega t - kx) \tag{1.7}$$

$$\varphi_1 = \frac{c_{44}^{(1)}}{2ie_{14}^{(1)}}[A_1(\frac{1-\eta}{p_1} - p_1)\exp(-kp_1 y) + B_1(\frac{1-\eta}{p_2} - p_2)\exp(-kp_2 y)]\exp i(\omega t - kx)$$

при условии $$0 < \eta < 1. \qquad (1.8)$$

В (1.7)

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-\eta+4\chi_1+\sqrt{\eta^2+8\chi_1(2-\eta)+16\chi_1^2}}$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-\eta+4\chi_1-\sqrt{\eta^2+8\chi_1(2-\eta)+16\chi_1^2}}$$

где $\eta = \frac{\omega^2}{k^2 a_1^2}$, $\chi_1 = \frac{[e_{14}^{(1)}]^2}{\varepsilon_{11}^{(1)} c_{44}^{(1)}}$ –коэффициенты электромеханической связи материала полупространства.

Общее решение уравнений (1.2) в виде гармонических волн следующее:

$$W_2 = [A_2 \exp(k\sqrt{1-\theta\eta}y) + B_2 \exp(-k\sqrt{1-\theta\eta}y)]\exp i(\omega t - kx) \qquad (1.9)$$

$$\varphi_2 = [C\exp(ky) + D\exp(-ky) + \frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}[A_2 \exp(k\sqrt{1-\theta\eta}y) + B_2 \exp(-k\sqrt{1-\theta\eta}y)]]\exp i(\omega t - kx)$$

где $\vartheta = \frac{a_1^2}{a_2^2}$.

В (1.7)-(1.9) A_1, A_2, B_1, B_2, C, D – произвольные постоянные.

2. Используя связи между напряжениями и индукцией электромагнитного поля с одной стороны, перемещениями и потенциалом с другой, граничные условия (1.4) и (1.5) приведем к виду:

$$\begin{aligned} & c_{44}^{(1)}\frac{\partial W_1}{\partial y} + e_{14}^{(1)}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \quad c_{44}^{(2)}\frac{\partial W_2}{\partial y} + e_{15}^{(2)}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\ & \varphi_1 = \varphi_2, \quad e_{14}^{(1)}\frac{\partial W_1}{\partial x} - \varepsilon_{11}^{(1)}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = e_{15}^{(2)}\frac{\partial W_2}{\partial y} - \varepsilon_{11}^{(2)}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{aligned}, \quad \text{при } y = 0 \qquad (2.1)$$

$$c_{44}^{(2)}\frac{\partial W_2}{\partial y} + e_{15}^{(2)}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \quad \varphi_2 = 0 \qquad \text{при } y = -h \qquad (2.2)$$

Подстановка (1.7), (1.9) в граничные условия (2.1), (2.2) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных (в следующих уравнениях учитывается, что B_1 определяется посредством A_1, а A_1, в свою очередь, определяется посредством A_2, B_2, C, D):

$$C - D + (1-\chi_2)\gamma_2\frac{c_{44}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}A_2 - (1+\chi_2)\gamma_2\frac{c_{44}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}B_2 = 0 \qquad (2.3)$$

$$\exp(-\zeta)C + \exp(\zeta)D + \frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}\exp(-\gamma_2\zeta)A_2 + \frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}\exp(\gamma_2\zeta)B_2 = 0 \qquad (2.4)$$

$$\exp(-\zeta)C - \exp(\zeta)D + (1+\chi_2)\gamma_2\frac{c_{44}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}\exp(-\gamma_2\zeta)A_2 - (1+\chi_2)\gamma_2\frac{c_{44}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}\exp(\gamma_2\zeta)B_2 = 0 \qquad (2.5)$$

$$(L+\varepsilon_{11}^{(2)})C+(L-\varepsilon_{11}^{(2)})D+L\frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}A_2+L\frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}B_2=0 \tag{2.6}$$

где
$$L=\frac{\varepsilon_{11}^{(1)}(p_2^2+1-\eta)}{2\gamma_1(p_2^2+\gamma_1)}[1+(2\chi_1-\eta)(1-\gamma_1)+\frac{p_2^3-p_1^3}{p_2-p_1}\gamma_1],$$

а
$$\gamma_1=\sqrt{1-\eta}\,,\ \ \gamma_2=\sqrt{1-\vartheta\eta}\,,\ \ \zeta=kh \tag{2.7}$$

Из уравнений (2.4) и (2.5) постоянные C и D определяются посредством A_2 и B_2 следующим образом:

$$C=-\frac{e_{15}^{(2)}}{2e^{-\zeta}\varepsilon_{11}^{(2)}}[(1+\gamma_2\frac{1+\chi_2}{\chi_2})\exp(-\gamma_2\zeta)A_2+(1-\gamma_2\frac{1+\chi_2}{\chi_2})\exp(\gamma_2\zeta)B_2]$$
$$D=-\frac{e_{15}^{(2)}}{2e^{\zeta}\varepsilon_{11}^{(2)}}[(1-\gamma_2\frac{1+\chi_2}{\chi_2})\exp(-\gamma_2\zeta)A_2+(1+\gamma_2\frac{1+\chi_2}{\chi_2})\exp(\gamma_2\zeta)B_2] \tag{2.8}$$

Подстановка (2.8) в (2.3) и (2.6) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_2 и B_2:

$$[[\frac{\chi_2-\gamma_2(1+\chi_2)}{2e^{\zeta}}-\frac{\chi_2+\gamma_2(1+\chi_2)}{2e^{-\zeta}}]\exp(-\gamma_2\zeta)+\gamma_2(1+\chi_2)]A_2+$$
$$+[[\frac{\chi_2+\gamma_2(1+\chi_2)}{2e^{\zeta}}-\frac{\chi_2-\gamma_2(1+\chi_2)}{2e^{-\zeta}}]\exp(\gamma_2\zeta)-\gamma_2(1+\chi_2)]B_2=0$$
$$[[\frac{(L-\varepsilon_{11}^{(2)})(\chi_2-\gamma_2(1+\chi_2))}{2e^{\zeta}\chi_2}+\frac{(L+\varepsilon_{11}^{(2)})(\chi_2+\gamma_2(1+\chi_2))}{2e^{-\zeta}\chi_2}]\exp(-\gamma_2\zeta)-L]A_2+$$
$$+[[\frac{(L-\varepsilon_{11}^{(2)})(\chi_2+\gamma_2(1+\chi_2))}{2e^{\zeta}\chi_2}+\frac{(L+\varepsilon_{11}^{(2)})(\chi_2-\gamma_2(1+\chi_2))}{2e^{-\zeta}\chi_2}]\exp(\gamma_2\zeta)-L]B_2=0 \tag{2.9}$$

Из системы (2.9) условия существования ненулевых решений получаются в виде трансцендентного уравнения:

$$\Gamma(\eta,\zeta,\chi_1,\chi_2)\equiv L[2\chi_2(1+\chi_2)\gamma_2+(\chi_2^2+\gamma_2^2(1+\chi_2)^2)\,\mathrm{sh}(\zeta\gamma_2)\,\mathrm{sh}(\zeta)-2\chi_2(1+\chi_2)\gamma_2\,\mathrm{ch}(\zeta\gamma_2)\,\mathrm{ch}(\zeta)]+$$
$$+\varepsilon_{11}^{(2)}(1+\chi_2)\gamma_2[\chi_2\,\mathrm{ch}(\zeta\gamma_2)\,\mathrm{sh}(\zeta)-\gamma_2(1+\chi_2)\,\mathrm{sh}(\zeta\gamma_2)\,\mathrm{ch}(\zeta)]=0 \tag{2.10}$$

3. Из уравнения (2.10) видно, что $\eta=\dfrac{1}{\vartheta}$ является решением, но это решение тривиальное.

В длинноволновом приближении относительно толщины слоя ($\zeta<<1$) уравнение (2.10) приводится к виду:

$$\vartheta\eta(1+\chi_2)=1$$

Отсюда получается корень

$$\eta=\frac{1}{\vartheta(1+\chi_2)} \tag{3.1}$$

который будет удовлетворять условию (1.8), если

$$\vartheta(1+\chi_2)>1$$

Здесь длина волны велика только по сравнению с толщиной слоя и полупространство не теряет своего назначения.

Уравнение (2.10) в частном случае $\zeta \to \infty$ (коротковолновое приближение – могут существовать волны, локализованные у границы контакта двух полупространств) распадается на два уравнения:

$$\Gamma_1(\eta,\infty,\chi_1,\chi_2) \equiv L[\chi_2 - (1+\chi_2)\sqrt{1-\vartheta\eta}] + \varepsilon_{11}^{(2)}(1+\chi_2)\sqrt{1-\vartheta\eta} = 0 \quad (3.2)$$

$$\Gamma_2(\eta,\infty,\chi_2) \equiv \chi_2 - (1+\chi_2)\sqrt{1-\vartheta\eta} = 0 \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) имеет решение:

$$\eta = \vartheta^{-1}[1 - \frac{\chi_2^2}{(1+\chi_2)^2}]$$

при условии $1 - \frac{\chi_2^2}{(1+\chi_2)^2} < \vartheta$.

4.Пусть граничат пьезоэлектрик класса 43m $GaAs$ ($c_{44} = 5.94 \times 10^{10}$ н/м^2, $\rho = 5.307 \times 10^3$ кг/м^3, $e_{14} = -0.16$ кл/м^2, $\varepsilon_{11} = 9.73 \times 10^{-11}$ ф/м) и пьезоэлектрик класса 6mm ZnO ($c_{44} = 4.25 \times 10^{10}$ н/м^2, $\rho = 5.68 \times 10^3$ кг/м^3, $e_{15} = -0.59$ кл/м^2, $\varepsilon_{11} = 7.38 \times 10^{-11}$ ф/м).

Таблица 1

ζ	η_1	η_2	η_3
$\zeta << 1$	0.669221	-	-
0.001	0.669222	-	-
0.05	0.669281	-	-
0.1	0.66947	-	-
0.3	0.672117	-	-
0.5	0.170154	0.680539	-
1.0	0.602692	0.768529	-
5.0	0.664186	0.818872	-
10	0.676513	0.752176	0.875203

В табл. 1 приводятся значения корней уравнения (2.10) с учетом (2.7) (безразмерных характеристик скоростей локализованных волн) в зависимости от относительной толщины слоя ζ. В первой строчке приведено значение корня, полученное по приближенной формуле (3.1).

Для этих пьезоэлектриков рассмотрим уравнение (3.2). Из уравнения (3.2) для промежутка $0 < \eta < \frac{a_2^2}{a_1^2}$ численным образом получается решение $\eta_1 = 0.677445$.

Из уравнения (3.3) получается решение $\eta_2 = 0.736075$.

Теперь рассмотрим уравнение (2.10). Для случая, когда $\zeta = 100$ для промежутка $0 < \eta < \frac{a_2^2}{a_1^2}$ численным образом получаются два решения, которые совпадают с вышеполученными решениями η_1 и η_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даноян З.Н., Манукян Г.А. О поверхностных электроупругих волнах Лява в пьезоэлектрических подложках с металлизированным диэлектрическим слоем. //Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т.48. 3. С.43-52.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. Ереванского университета, 2006. 492 с.
3. Maerfeld C., Tournois P. Pure shear elastic surface wave guided by the interface of two semi-infinite media. //Appl. Phys. Lett. 1971. V.19. 4. P.117-121
4. Аветисян А.С., Маргарян Дж. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. //Изв. НАН РА. Механика. 1994. Т.47. 3-4. С.31-36.
5. Li. Sh. The electromagneto-acoustic surface wave in a piezoelectric medium: the Bleustein–Gulyaev mode. //J. Appl. Phys. 1996. V.80. №9. P.5264-5267.
6. Zakharenko A. Love-type waves in layered systems consisting of two cubic piezoelectric crystals. //Journal of sound and vibration. 2005. V.285. P.877-886.
7. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Поверхностные электроупругие сдвиговые волны в пьезоактивной системе слой-полупространство. //Ереванский Государственный Университет. Ученые записки. 2006. 3. С.25-30.
8. Cheng N.C., Sun C.T. Wave propagation in twolayered piezoelectric plates. //J. Acoust. Soc. Amer., 1975. V57. №3. P.632-639.
9. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239с.
10. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электроупругих средах. М.: Едиториел УРСС. 2003. 336с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
15.01.2007