ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №2, 2007 Механика

УДК 539.3.

ЩЕЛЕВЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ЭКРАНИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Мартиросян Э. В.

Ключевые слова: сдвиговые, щелевые волны, магнитное поле, идеальный проводник.
Key words: shifting, splitting waves, magnetic field, perfectly conductor.

Է. Վ. Մարտիրոսյան
Ճեղքավոր մագնիսաառաձգական սահքի ալիքներ էկրանացված մագնիսական դաշտում

Դիտարկվում են երկու կիսատարածություններ առաձգական իդեալ հաղորդիչ նյութերից որոնք անջատվում են իրարից վակուումի ճեղքով: Արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առքայությունը, որը գործում է կիսատարածության եզրերին ուղղահայաց հարթությունում, ապահովում է փոխազդեցություն գրգռված էլեկտրամագնիսական դաշտի ու կիսատարածության և շերտի առաձգական տեղափոխությունների դաշտերի միջև: Ցույց է տրվում որ նշված փոխազդեցությունը բերում է ճեղքավոր մակերևույթային սահքի ալիքի առաջացմանը:

E. V. Martirosyan

Splitting Magnetoelastic Shifting Waves in Screening Magnetic Field

We consider a system of elastic perfectly conducting semi – space and straightforward layer which separated by vacuum split. There is external constant magnetic field acting in a plane that perpendicular to the boundary of semi – space. It shown that the interaction between indignant electromagnetic field and fields of elastic displacements of semi – space and split becomes to existence of splitting surface shifting wave.

Рассматриваются полупространство и прямолинейный слой из упругих идеально проводящих материалов, разделенных щелью вакуума. Наличие внешнего постоянного магнитного поля, действующего в плоскости, перпендикулярной границе полупространства, обусловливает взаимодействие возмущенных электромагнитного поля и полей упругих перемещений полупространства и слоя. Показывается, что указанное взаимодействие приводит к появлению щелевой поверхностной сдвиговой волны.

1. Пусть имеются идеально проводящие полупространство и прямолинейный слой с различными упругими свойствами, разделенных щелью вакуума шириной $2h$. Прямоугольная декартова система координат выбирается так, чтобы плоскость $(x_1 0 x_3)$ находилась на расстоянии h между плоскостями, ограничивающими полупространство и слой, а ось $0x_2$ была направлена по нормали к поверхности полупространства. В начальном невозмущенном состоянии на всю систему (полу-пространство-щель-слой) действует постоянное магнитное поле, вектор напряженности $\vec{H}_0$ которого параллелен плоскости $(x_1 0 x_2)$:

$$\vec{H}_0 = H_{01}\vec{i} + H_{02}\vec{j}$$

где $\vec{i}\,,\,\vec{j}$ – орты осей x_1, x_2, соответственно; при этом на границе слоя, не смежной со щелью, предполагается наличие экрана поля. Задача состоит в изучении вопроса существования поверхностной сдвиговой волны для описанной слоистой системы.

Отметим, что в случае полупространств, разделенных шелью, щелевые магнитоупругие сдвиговые волны для поперечного (когда $H_{01} = 0$) и косого (когда $H_{01} \neq 0$) магнитных полей исследовались, соответственно, в [1],[2]. Другие задачи магнитоупругих поверхностных волн для косого магнитного поля изучались в недав-них работах [3],[4].

В случае антиплоской упругой деформации $u_j = v_j = 0,\ w_j = w_j(x_1, x_2, t)$, $j = 1,2,$ а также при предположении, что все искомые величины возмущенного электромагнитного поля не зависят от координаты x_3, линеаризованные уравнения магнитоупругости [5] имеют вид:

$$\left(C_{tj}^2 + V_{1j}^2\right)\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_1^2} + \left(C_{tj}^2 + V_{2j}^2\right)\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} + 2V_{1j}V_{2j}\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2},\ j = 1,2 \qquad (1)$$

где

$$V_{kj}^2 = \frac{\mu_j}{4\pi\rho_j}H_{0k}^2\ ,\ k = 1,2,$$

$C_{tj}^2 = G_j/\rho_j\,,\ G_j$ – модуль упругости, ρ_j – плотность среды, μ_j – ее магнитная проницаемость. Здесь значения индекса $j = 1,2$ соответствуют полупространству $x_2 > h$ и слою $-s < x_2 < -h \quad (s > h)$.

Уравнения электродинамики для возмущенного электромагнитного поля в щели $|x_2| < h$ приводятся к виду

$$c^2\,\Delta h_3 = \frac{\partial^2 h_3}{\partial t^2}\ ,\qquad \frac{\partial e_1}{\partial t} = c\,\frac{\partial h_3}{\partial x_2} \qquad (2)$$

где e_1 – компонента вектора напряженности возмущенного электрического поля $(e_2 = e_3 = 0)$, h_3 – компонента вектора напряженности возмущенного магнитного поля $(h_1 = h_2 = 0)$, Δ – оператор Лапласа, c – электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме.

Решения уравнений (1), (2) должны удовлетворять следующим граничным условиям: на плоскостях $x_2 = \pm h$

$$\left(G_j + \frac{\mu_j}{4\pi}H_{02}^2\right)\frac{\partial w_j}{\partial x_2} + \frac{\mu_j}{4\pi}H_{01}H_{02}\frac{\partial w_j}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi}H_{02}\,h_3$$

$$\frac{\mu_j}{c}H_{02}\frac{\partial w_j}{\partial t} = e_1\,,\quad j = 1,2$$

на плоскости $\qquad x_2 = -s\quad \dfrac{\partial w_2}{\partial t} = 0 \qquad (3)$

Первое из условий (3) означает, что на плоскостях $x_2 = \pm h$ выполняются граничные условия типа свободной границы [5]–[7]. Второе из них обеспечивает непрерывность тангенциальной компоненты напряженности e_1 возмущенного электрического поля при переходе через границы $x_2 = \pm h$. Третье условие означает наличие экрана поля на плоскости $x_2 = -s$. Отметим, что для идеального проводника условие экрана совпадает с граничным условием закрепленной границы.

Решения типа поверхностной волны должны удовлетворять также условию затухания:

$$\lim_{x_2 \to +\infty} w_1 = 0 \tag{4}$$

Таким образом, исследуемая задача сводится к решению уравнений (1), (2), удовлетворяющих условиям (3), (4).

2. Решения уравнений (1), (2) будем искать в виде гармонических волн вида $g(x_2)\exp(i(\omega t - kx_1))$ с частотою ω и волновым числом k , где $g-$достаточно гладкая неизвестная функция на оси. Нетрудно видеть, что решение первого урав-нения из (1), удовлетворяющее условию затухания (4), имеет следующий вид:

$$w_1 = A\exp(-kp_1x_2)\exp(i(\omega t - kx_1 + k\alpha_1 x_2)) \tag{5}$$

где $A-$ произвольная постоянная и

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2}, \quad p_1^2 = \frac{C_{t1}^2 + V_{11}^2 - \eta}{C_{t1}^2 + V_{21}^2} - \alpha_1^2, \quad p_1 > 0, \quad \alpha_1 = \frac{V_{11}V_{21}}{C_{t1}^2 + V_{21}^2}$$

Согласно условию затухания (4) характеристика η квадрата фазовой скорости искомой волны должна удовлетворять условию:

$$0 < \eta < \eta_1 \tag{6}$$

где

$$\eta_1 = C_{t1}^2 + V_{11}^2 - \alpha_1^2\left(C_{t1}^2 + V_{21}^2\right)$$

Аналогично, решения уравнений (2) имеют следующий вид:

$$h_3 = \exp(i(\omega t - kx_1))\left(B\exp\left(-kx_2\sqrt{1-\eta/c^2}\right) + C\exp\left(kx_2\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right)$$

$$e_1 = -\frac{ck}{i\omega}\sqrt{1-\eta/c^2}\exp(i(\omega t - kx_1))\left(B\exp\left(-kx_2\sqrt{1-\eta/c^2}\right) - \right.$$
$$\left. - C\exp\left(kx_2\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right) \tag{7}$$

где $B, C-$ произвольные постоянные.

Перейдем к решению второго из уравнений (1). Подставляя в него значение $w_2 = g(x_2)\exp(i(\omega t - kx_1))$, для неизвестной функции g получим уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left(C_{t2}^2 + V_{22}^2\right)g''(x_2) - 2ikV_{12}V_{22}\,g'(x_2) - k^2\left(C_{t2}^2 + V_{12}^2 - \eta\right)g(x_2) = 0$$

Представляя функцию g в виде $g(x_2) = \exp(k\lambda\, x_2)$, для постоянной λ получим характеристическое уравнение

$$\left(C_{t2}^2 + V_{22}^2\right)\lambda^2 - 2iV_{12}V_{22}\,\lambda - \left(C_{t2}^2 + V_{12}^2 - \eta\right) = 0$$

Положим $4D-$ дискриминант этого квадратного уравнения:

$$D = \left(C_{t2}^2 + V_{22}^2\right)\left(C_{t2}^2 + V_{12}^2 - \eta\right) - V_{12}^2V_{22}^2 = \left(C_{t2}^2 + V_{22}^2\right)^2 p \qquad (8)$$

где обозначено

$$p = \frac{C_{t2}^2 + V_{12}^2 - \eta}{C_{t2}^2 + V_{22}^2} - \alpha_2^2 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{V_{12}V_{22}}{C_{t2}^2 + V_{22}^2}$$

Если $D \neq 0$, то будем иметь два разных корня $\lambda_1 = i\alpha_2 + \sqrt{p}$, $\lambda_2 = i\alpha_2 - \sqrt{p}$ ($\sqrt{p}$ – главная ветвь корня) и решение w_2 будет следующего вида:

$$w_2 = \exp\left(i(\omega t - kx_1)\right)\left(E\exp\left(k\lambda_1 x_2\right) + F\exp\left(k\lambda_2 x_2\right)\right) \qquad (9_1)$$

где $E, F -$ произвольные постоянные. Если же $D = 0$, то характеристическое уравнение будет иметь один корень $\lambda = i\alpha_2$ и решение w_2 будет вида

$$w_2 = \left(E + Fx_2\right)\exp\left(i(\omega t - kx_1)\right)\exp\left(ki\alpha_2\, x_2\right) \qquad (9_2)$$

где $E, F -$ произвольные постоянные.

Перейдем к нахождению дисперсионного уравнения исследуемой задачи. Отметим, что линейная функция $p = p(\eta)$ убывает на оси и пересекает ее в точке $\eta_2 = C_{t2}^2 + V_{12}^2 - \alpha_2^2\left(C_{t2}^2 + V_{22}^2\right)$, причем $\eta_2 > 0$. Поэтому возможны следующие два случая: $\eta_1 \le \eta_2$ или $0 < \eta_2 < \eta_1$.

Рассмотрим сперва первый случай, когда $\eta_1 \le \eta_2$. В этом случае из (8) и убывания функции p имеем $p > 0\ (D > 0)$ при $\eta \in (0, \eta_1)$, так что решение w_2 задается формулой (9_1). Для нахождения произвольных постоянных A, B, C, E, F используем граничные условия (3). Подставляя из (5), (7), (9_2) значения w_1, w_2, h_3, e_1 в граничные условия (3), получим следующую линейную однородную систему из пяти уравнений относительно неизвестных A, B, C, E, F :

$$\left(G_1 + \frac{\mu_1}{4\pi}H_{02}^2\right)k\,A\left(i\alpha_1 - p_1\right)\exp\left(kh\left(i\alpha_1 - p_1\right)\right) -$$

$$-\frac{\mu_1}{4\pi}H_{01}H_{02}\,Ak\,i\exp\left(kh\left(i\alpha_1 - p_1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}H_{02}\left[B\exp\left(-kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right) + C\exp\left(kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right]$$

$$\frac{\mu_1\omega^2}{c^2k} H_{02}\, A\exp\left(kh\left(i\alpha_1 - p_1 \right)\right) =$$
$$= \sqrt{1-\eta/c^2}\left[B\exp\left(-kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right) - C\exp\left(kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right]$$
$$\left(G_2 + \frac{\mu_2}{4\pi} H_{02}^2 \right) k\left[E\left(i\alpha_2 + \sqrt{p}\right)\exp\left(-kh\left(i\alpha_2 + \sqrt{p}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + F\left(i\alpha_2 - \sqrt{p}\right)\exp\left(-kh\left(i\alpha_2 - \sqrt{p}\right)\right)\right] -$$
$$-\frac{\mu_2}{4\pi} H_{01}H_{02}\; k\,i\left[E\exp\left(-kh\left(i\alpha_2 + \sqrt{p}\right)\right) + F\exp\left(-kh\left(i\alpha_2 - \sqrt{p}\right)\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{4\pi} H_{02}\left[B\exp\left(kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right) + C\exp\left(-kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right]$$
$$\frac{\mu_2\,\omega^2}{c^2k} H_{02}\left[E\exp\left(-kh\left(i\alpha_2 + \sqrt{p}\right)\right) + F\exp\left(-kh\left(i\alpha_2 - \sqrt{p}\right)\right)\right] =$$
$$= \sqrt{1-\eta/c^2}\left[B\exp\left(kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right) - C\exp\left(-kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right]$$
$$E\exp\left(-ks\left(i\alpha_2 + \sqrt{p}\right)\right) + F\exp\left(-ks\left(i\alpha_2 - \sqrt{p}\right)\right) = 0 \quad .$$
$$E\exp\left(-ks\left(i\alpha_2 + \sqrt{p}\right)\right) + F\exp\left(-ks\left(i\alpha_2 - \sqrt{p}\right)\right) = 0$$

Приравнивая к нулю детерминант полученной системы, находим дисперсионное уравнение

$$0 = -\frac{\mu_2\,\omega^2 H_{02}^2}{4\pi d_2\, c^2 k}\left[\exp\left(k(s-h)\sqrt{p}\right) - \exp\left(-k(s-h)\sqrt{p}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\left(\sqrt{1-\eta/c^2} - d_1\right)\exp\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right) + \left(\sqrt{1-\eta/c^2} + d_1\right)\exp\left(-2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right] +$$
$$+\sqrt{1-\eta/c^2}\left[\exp\left(k(s-h)\sqrt{p}\right) + \exp\left(-k(s-h)\sqrt{p}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\left(\sqrt{1-\eta/c^2} - d_1\right)\exp\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right) - \left(\sqrt{1-\eta/c^2} + d_1\right)\exp\left(-2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right]$$

где обозначено

$$d_1 = \frac{\mu_1\,\omega^2 H_{02}^2}{4\pi c^2 k^2\left[\left(G_1 + \frac{\mu_1}{4\pi} H_{02}^2\right)\left(p_1 - i\alpha_1 \right) + \frac{\mu_1}{4\pi} i H_{01}H_{02}\right]} \qquad (10)$$
$$d_2 = k\left[\left(G_2 + \frac{\mu_2}{4\pi} H_{02}^2\right)\left(\sqrt{p} + i\alpha_2\right) - \frac{\mu_2}{4\pi}\, i H_{01}H_{02}\right]$$

Замечая, что

$$d_1 = \frac{\eta V_{21}^2}{c^2\left[\left(C_{t1}^2 + V_{21}^2\right)\left(p_1 - i\alpha_1\right) + iV_{11}V_{21}\right]} = \frac{\eta V_{21}^2}{c^2\, p_1\left(C_{t1}^2 + V_{21}^2\right)} \qquad (11)$$
$$d_2 = k\rho_2\left(C_{t2}^2 + V_{22}^2\right)\sqrt{p}$$

с учетом (10), (11) найдем окончательный вид дисперсионного уравнения $\left(\eta_1 \leq \eta_2\right)$:

$$0=-\frac{\eta V_{22}^2}{c^2\left(C_{t2}^2+V_{22}^2\right)\sqrt{p}}\left[\sqrt{1-\eta/c^2}\,\mathrm{ch}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)-\mathrm{sh}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}\right]\mathrm{sh}\left(k(s-h)\sqrt{p}\right)+\left[\left(1-\eta/c^2\right)\mathrm{sh}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)-\right. \tag{12}$$
$$\left.-\frac{\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}\sqrt{1-\eta/c^2}\,\mathrm{ch}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right]\mathrm{ch}\left(k(s-h)\sqrt{p}\right)$$

Рассмотрим теперь другой случай, когда $0<\eta_2<\eta_1$. Здесь, если $\eta\in[0,\eta_1]$, $\eta\neq\eta_2$, то из (8) и убывания функции p имеем $D\neq 0$.Следовательно, из приведенных выше рассуждений для первого случая получим, что дисперсионное уравнение имеет вид (12). Если же $\eta=\eta_2$, то согласно (8) имеем $D=0$, поэтому решение w_2 задается формулой (9_2). Здесь применяя рассуждения, аналогичные приведенным в первом случае, получим, что дисперсионное уравнение получается из (12) в результате предельного перехода при $\eta\to\eta_2\left(p\to 0\right)$. Таким образом, в обоих рассмотренных выше возможных случаях $\eta_1\le\eta_2$ или $0<\eta_2<\eta_1$ дисперсионное уравнение исследуемой задачи задается уравнением (12), если при $0<\eta_2<\eta_1$, $\eta=\eta_2$ понимать дисперсионное уравнение в указанном предельном смысле.

Отметим, что предел дисперсионного уравнения (12) при $s\to h$ $(s>h)$ совпадает с дисперсионным уравнением для поверхностной сдвиговой волны вдоль границы полупространства и прямолинейной щели из вакуума ([4], (2.2)).

Отметим также, что в уравнении (12) от продольной компоненты H_{01} вектора напряженности магнитного поля зависят только величины p, p_1. Поэтому рассмотрение частного поперечного поля, когда $H_{01}=0$, не приводит к существенному упрощению этого уравнения.

В чисто упругом случае, когда отсутствует начальное $(\vec{H}_0=0)$ магнитное поле, имеем $V_{21}=V_{22}=0$. Поэтому, (12) сводится к уравнению:

$$\mathrm{ch}\left(k(s-h)\sqrt{p}\right)=0,\quad 0<\eta<\eta_1 \tag{13}$$

где $\eta_1,\eta_2\le c^2$. Отметим, что это формальное уравнение (без учета неравенства $0<\eta<\eta_1$) есть дисперсионное уравнение системы из прямолинейного волновода ширины $s-h$ из идеального проводника и примыкающей к ней прямолинейной ще-ли ширины $2h$ из вакуума ([8], стр. 218). Его корнями являются положительные числа η_n , где

$$p(\eta_n)=-\left[\frac{\pi(2n+1)}{2k(s-h)}\right]^2,\quad n=0,1,\ldots \tag{14}$$

3. Полученное дисперсионное уравнение (12) позволяет сделать определенные выводы относительно сформулированного в начале работы вопроса о существо-

вании поверхностной сдвиговой магнитоупругой волны в системе полупространство-щель-слой.

Пусть сперва $H_{02}=0$, т.е. вектор напряженности $\vec{H}_0$ начального магнитного поля направлен вдоль оси x_1. Тогда $V_{21}=V_{22}=0$ и дисперсионное уравнение (12) сводится к уравнению (13). Корнями этого уравнения могут быть только те из чисел η_n, определяемые по (14), которые содержатся в интервале $(0,\eta_1)$. Так как они – фазовые скорости возможных сдвиговых волн требуемого типа – зависят от волнового числа k, то возможные в изучаемом случае сдвиговые волны будут дис-персионными волнами.

Пусть теперь $H_{02}\neq 0(V_{21}\neq 0, V_{22}\neq 0)$. Предположим сперва, что $\eta_1 \le \eta_2 \le c^2$. Введем функцию

$$F(\eta)=-\frac{\eta V_{22}^2}{c^2\left(C_{t2}^2+V_{22}^2\right)\sqrt{p}}\left[\sqrt{1-\eta/c^2}\,\mathrm{ch}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)-\mathrm{sh}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}\right]\mathrm{sh}\left(k(s-h)\sqrt{p}\right)+\left[\left(1-\eta/c^2\right)\mathrm{sh}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}\sqrt{1-\eta/c^2}\,\mathrm{ch}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\right]\mathrm{ch}\left(k(s-h)\sqrt{p}\right)$$

Покажем, что при условии

$$\lim_{\eta\to\eta_1}F(\eta)<0 \tag{15}$$

дисперсионное уравнение (12) имеет корень в интервале $(0,\eta_1)$. В самом деле, функция F вещественна и непрерывна на промежутке $[0,\eta_1)$; кроме того, имеем $F(0)=\mathrm{sh}(2kh)\,\mathrm{ch}\left(k(s-h)\sqrt{p(0)}\right)>0$. Следовательно, учитывая (15), согласно теореме Больцано-Коши, получим, что равносильное (12) уравнение $F(\eta)=0$ имеет корень в интервале $(0,\eta_1)$.

Предположим теперь, что $0<\eta_2<\eta_1\le c^2$. В этом случае, аналогично при-веденным выше рассуждениям получим, что равносильное (12) уравнение $F(\eta)=0$ имеет корень в интервале $(0,\eta_2)$, если вместо (15) выполнено условие $F(\eta_2)<0$. С другой стороны, корнями уравнения (12) будут все числа $\eta=\eta_n$ из (14), принад-лежащие интервалу (η_2,η_1) и удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{1-\eta/c^2}=\frac{\eta V_{21}^2}{c^2p_1\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)}\mathrm{th}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)$$

или же принадлежащие интервалу (η_2,η_1) корни уравнения

$$\alpha\,\mathrm{tg}\left(k(s-h)\sqrt{-p}\right)=\beta$$

где

$$\alpha=\frac{\eta V_{22}^2}{c^2\left(C_{t2}^2+V_{22}^2\right)\sqrt{-p}}\left[\sqrt{1-\eta/c^2}\,\mathrm{ch}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)-\mathrm{sh}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}\right]$$

$$\beta=\left(1-\eta/c^2\right)\mathrm{sh}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)-\frac{\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}\sqrt{1-\eta/c^2}\,\mathrm{ch}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)$$

Рассмотрим предельный случай уравнения (12), когда одновременно $k(s-h)\to 0$ и $kh\to 0$ (длинноволновое приближение или узкая щель и тонкий слой). Тогда имеем $\mathrm{sh}\left(k(s-h)\sqrt{p}\right)\sim k(s-h)\sqrt{p}$,$\mathrm{ch}\left(k(s-h)\sqrt{p}\right)\sim 1$,

$$\mathrm{sh}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\sim 2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\,,\ \mathrm{ch}\left(2kh\sqrt{1-\eta/c^2}\right)\sim 1$$

и из (12) получим следующее предельное уравнение: при $0<\eta<\eta_1$

$$0=-\frac{\eta V_{22}^2\,k(s-h)}{c^2\left(C_{t2}^2+V_{22}^2\right)}\left[1-\frac{2kh\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}\right]+2kh\left(1-\eta/c^2\right)-\frac{\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}\qquad(16)$$

По сравнению с общим дисперсионным уравнением (12) предельное уравнение (16) поддается более детальному анализу. В самом деле, рассмотрим функцию

$$\Phi(\eta)=-\frac{\eta V_{22}^2\,k(s-h)}{c^2\left(C_{t2}^2+V_{22}^2\right)}\left[1-\frac{2kh\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}\right]+2kh\left(1-\eta/c^2\right)-\frac{\eta V_{21}^2}{c^2\left(C_{t1}^2+V_{21}^2\right)p_1}$$

Она вещественна и непрерывна на промежутке $[0,\eta_1)$, дифференцируема на интервале $(0,\eta_1)$, причем $\Phi(0)=2kh$. Легко проверить, что если kh и $k(s-h)$ выбраны достаточно малыми, то имеем $\Phi'(\eta)<0$ на интервале $(0,\eta_1)$ и $\lim\limits_{\eta\to\eta_1}\Phi(\eta)=-\infty$. Поэтому по теореме Больцано-Коши равносильное (16) уравнение $\Phi(\eta)=0$ имеет корень на интервале $(0,\eta_1)$. Из монотонности функции Φ на $(0,\eta_1)$ следует единственность этого корня. Таким образом, в рассмотренном пре-дельном случае существует единственная сдвиговая волна требуемого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М. В. Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны. // В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: Изд-во АН Арм.ССР. 1984. С. 70 – 74.
2. Белубекян М. В., Мартиросян Э. В. Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны в косом магнитном поле. // Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. № 2. С.129-135.
3. Chakraborty S., Chattopadhyay M. On Love – type magnetoelastic surface waves. // Journal of Applied Mechanics (Trans. of ASME). 1998. V.65. № 2. P. 535 – 539.
4. Мартиросян Э. В. Поверхностные сдвиговые магнитоупругие волны вдоль границы идеально проводящего полупространства. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. № 1. С. 63 – 69.

5. Kaliski S., Rogula D. Rayleigh waves in a magnetic field in the case of perfect conductor. // Proc. of Vibr. Probl. 1960. № 5. P.63-80.
6. Геворкян А. В., Казарян К. Б. Отражение и преломление магнитоупругой сдвиговой волны от упругого слоя. // В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: Изд-во АН Арм. ССР. 1984. С. 111 – 115.
7. Геворкян А. В. Магнитоупругие волны Лява в случае диэлектрического слоя идеально проводящего полупространства. // В сб.: «Исследования по механике твердого деформируемого тела». Ереван: Изд-во АН Арм. ССР. 1981. С. 81 – 86.
8. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam-New-York-Oxford, North-Holland Publ. Company, 1984. 425 p.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.08.2006