

УДК 539.3

**ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ**

**Эшматов Б. Х.**

**Ключевые слова:** динамическая устойчивость, ортотропный, вязкоупругий

**Key words:** dynamic stability, orthotropic, viscoelastic

**B. Kh. Eshmatov**

**Dynamical Stability of Viscoelastic Orthotropic Cylindrical Panels**

The problem of dynamic stability of viscoelastic orthotropic cylindrical panel is considered by different theories. A behavior of cylindrical panel by different geometrical and physical parameters in the case of influence of fast-increasing compressive dynamic loads is investigated.

**Բ. Խ. Էշմատով**

**Առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ գլանային պանելների դինամիկ կայունությունը**

Դիտարկված է առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ գլանային պանելների դինամիկ կայունության խնդիրը տարբեր տեսություններով: Ուսումնասիրված է գլանային պանելի վարքը աճող դինամիկ սեղմող բեռնավորման դեպքում, տարբեր երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի համար:

Рассматривается задача о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной цилиндрической панели по различным теориям. Изучено поведение цилиндрической панели при различных геометрических и физических параметрах в случае воздействия на неё быстро возрастающих сжимающих динамических нагрузок.

Одной из особенностей развития современной инженерной деятельности человека является все более возрастающая сложность создающейся техники и технологии её изготовления, а также использование при создании инженерных конструкций новых материалов – как правило ортотропных – с заданным комплексом физико-механических свойств. Одной из важных разновидностей ортотропных материалов, находящихся за последние годы все большее применение, являются композиционные материалы. Применение таких материалов в инженерных конструкциях не только существенно улучшает их эксплуатационные характеристики, но и в ряде случаев позволяет создавать конструкции, нереализуемые в рамках традиционных материалов.

Известно, что конструкции из композиционных материалов в поперечном направлении обладают существенно более слабыми прочностными свойствами, чем в продольных. Поэтому при оптимальном проектировании неизбежно возникает вопрос учета ортотропных свойств материала конструкции [1-4].

Кроме этого, как показывают многочисленные экспериментальные и фундаментальные исследования, большинство композиционных материалов обладают ярко выраженными вязкоупругими свойствами [5-7].

Прочность конструкций из современных композиционных материалов в значительной степени определяется деформациями поперечного сдвига. Классическая теория оболочек этими эффектами пренебрегает, что делает актуальным развитие общей теории оболочек. Основная идея заключается в

представлении перемещений или напряжений в оболочке рядами; различные подходы отличаются друг от друга видом этих разложений. Однако наибольшее распространение в практике получили методы, основанные на принятии некоторых гипотез относительно распределения перемещений или напряжения по толщине. Наряду с классической гипотезой Кирхгофа-Лява [8-10] получила распространение модель Тимошенко [1,2,11], согласно которой при исследовании процессов, происходящих в оболочках, необходимо учитывать и поперечные сдвиги. Отметим также, что использование модели Кирхгофа-Лява хотя и позволяет получить достаточно точные решения ряда практических задач, однако в большинстве случаев, они являются недостаточно полными [8]. Это в первую очередь относится к вязкоупругим оболочкам из композиционных материалов, имеющих анизотропную структуру [12-17].

Для начала построим математическую модель задачи о динамической устойчивости цилиндрической панели, изготовленной из материала, обладающего вязкоупругими ортотропными свойствами в геометрически нелинейной постановке по классической теории Кирхгофа-Лява. В этом случае физическую зависимость между напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и деформациями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  примем в виде [12,17]:

$$\sigma_x = B_{11}(1 - R_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1 - R_{12}^*)\varepsilon_y, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2), \quad \tau_{xy} = 2B(1 - R^*)\gamma_{xy} \quad (1.1)$$

где  $R^*, R_{ij}^*$  – интегральные операторы с ядрами релаксации соответственно  $R(t)$  и  $R_{ij}(t)$ :

$$R^* \varphi = \int_0^t R(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad R_{ij}^* \varphi = \int_0^t R_{ij}(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad i, j = 1, 2$$

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad B_{12} = B_{21} = \mu_1 B_{22} = \mu_2 B_{11}, \quad B = \frac{G}{2}$$

$E_1, E_2$  – модули упругости в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $G$  – модуль сдвига;  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона; здесь и в дальнейшем символ  $(x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2)$  указывает, что остальные соотношения получаются круговой подстановкой индексов. Связь между деформациями в срединной поверхности  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  и перемещениями  $u, v, w$  по направлениям  $x, y, z$  с учетом начальных неуровненностей примем в виде:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R}(w - w_0) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (1.2)$$

где  $w_0 = w_0(x, y)$  – начальный прогиб,  $R$  – радиус кривизны срединной поверхности панели.

Изгибающие  $M_x, M_y$  и крутящие моменты  $H$ , приходящиеся на единицу длины граней элемента, с учетом (1.1) имеют вид [14-16]:

$$M_x = -\frac{h^3}{12} \left[ B_{11}(1-R_{11}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} + B_{12}(1-R_{12}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} \right], \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2)$$

$$H = -\frac{Bh^3}{3} (1-R^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.1) и (1.3) в уравнения движения элемента панели:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{q}{h} + \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\sigma_y}{R} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

получим систему интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$B_{11}(1-R_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-R_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-R^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$B_{22}(1-R_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-R_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-R^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{h^2}{12} \left\{ B_{11}(1-R_{11}^*) \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^4} + [8B(1-R^*) + B_{12}(1-R_{12}^*) + B_{21}(1-R_{21}^*)] \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \right.$$

$$+ B_{22}(1-R_{22}^*) \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial y^4} \left. \right\} - \frac{1}{R} [B_{22}(1-R_{22}^*) \varepsilon_y + B_{21}(1-R_{21}^*) \varepsilon_x] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} [B_{11}(1-R_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-R_{12}^*) \varepsilon_y] + 2B \frac{\partial w}{\partial y} (1-R^*) \gamma_{xy} \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} [B_{22}(1-R_{22}^*) \varepsilon_y + B_{21}(1-R_{21}^*) \varepsilon_x] + 2B \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \gamma_{xy} \right\} - \quad (1.5)$$

$$- \frac{q}{h} - P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  определяются из соотношений (1.2).

Математические модели, полученные с помощью системы (1.5) с соответствующими граничными и начальными условиями, одновременно учитывают вязкоупругие свойства, а также ортотропность материала панели.

Для материалов с низкой сдвиговой жесткостью и прочностью, какими являются композиционные материалы, имеющие анизотропную структуру, необходимо применение уточненных теорий оболочек (без привлечения гипотезы Кирхгофа-Лява). В связи с этим возникает необходимость определения предела применимости гипотезы Кирхгофа-Лява при решении задач о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной цилиндрической панели в геометрически нелинейной постановке. Для этого представим математическую модель данной задачи по обобщенной теории Тимошенко, учитывающая деформацию сдвига и инерцию вращения [1,2]. В этом случае физические соотношения между напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  и деформациями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  выражаются соотношениями:

$$\sigma_x = B_{11}(1-R_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1-R_{12}^*)\varepsilon_y, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2) \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy} = 2B(1-R^*)\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = 2B_{13}(1-R_{13}^*)\gamma_{xz}, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2)$$

где  $B_{ij}, B$  – упругие постоянные,  $R_{ij}^*, R^*$  – интегральные операторы с ядрами релаксации  $R_{ij}(t), R(t), i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ .

Связь между деформациями  $\varepsilon_x^z, \varepsilon_y^z, \gamma_{xy}^z$  и угловыми перемещениями  $\psi_x, \psi_y$  примем в виде:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad (x \leftrightarrow y), \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (1.7)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  определяются из соотношений (1.2).

С учетом (1.6) и (1.7) изгибающие, крутящие моменты  $M_x, M_y, H$  и поперечные силы  $Q_x, Q_y$  имеют вид:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{B_{11} h^3}{12} (1-R_{11}^*) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{B_{12} h^3}{12} (1-R_{12}^*) \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2) \\ H &= \frac{B h^3}{6} (1-R^*) \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ Q_x &= 2K^2 h B_{13} (1-R_{13}^*) \left( \frac{\partial (w-w_0)}{\partial x} + \psi_x \right), \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где коэффициент  $K$  определяется из [1,2].

Подставляя (1.6) и (1.8) в систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{1}{h} \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) + \frac{\sigma_y}{R} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{q}{h} + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= 0, \quad (x \leftrightarrow y) \end{aligned} \quad (1.9)$$

относительно перемещений  $u, v$ , прогиба  $w$  и угловых перемещений  $\psi_x, \psi_y$ , получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} B_{11}(1-R_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-R_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-R^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ B_{22}(1-R_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-R_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-R^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ -2K^2 \left[ B_{13}(1-R_{13}^*) \left( \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + B_{23}(1-R_{23}^*) \left( \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right] - \\ - \frac{1}{R} \left[ B_{22}(1-R_{22}^*) \varepsilon_y + B_{21}(1-R_{21}^*) \varepsilon_x \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \left[ B_{11}(1-R_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-R_{12}^*) \varepsilon_y \right] + 2B \frac{\partial w}{\partial y} (1-R^*) \gamma_{xy} \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \left[ B_{22}(1-R_{22}^*) \varepsilon_y + B_{21}(1-R_{21}^*) \varepsilon_x \right] + 2B \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \gamma_{xy} \right\} - \frac{q}{h} - P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{B_{11}h^2}{12}(1-R_{11}^*)\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2} + \frac{B_{12}h^2}{12}(1-R_{12}^*)\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y} + \frac{Bh^2}{6}(1-R^*)\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right) - \\ & - 2K^2B_{13}(1-R_{13}^*)\left(\frac{\partial(w-w_0)}{\partial x} + \psi_x\right) - \frac{\rho h^2}{12}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2} = 0, \quad (x \leftrightarrow y), \quad (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Математические модели, полученные с помощью системы уравнений (1.10) с соответствующими граничными и начальными условиями, одновременно учитывают вязкоупругие свойства, ортотропность материала панели, а также деформацию сдвига и инерцию вращения.

Здесь надо отметить, что если при решении задач динамики вязкоупругих систем в изотропной постановке, в системе интегро-дифференциальных уравнений, участвует только одно ядро релаксации с тремя различными реологическими параметрами вязкости, то в ортотропной постановке по гипотезе Кирхгофа-Лява принимает участие уже 5 различных ядер с 15 реологическими параметрами. В системе же уравнений, описывающих процесс по теории Тимошенко, в ортотропной постановке участвуют 7 разных ядер с 21 различными реологическими параметрами, что приводит к громоздким вычислениям.

Практическое использование нелинейной теории вязкоупругих систем возможно только при конкретном задании весовых функций, что соответствует выбору ядра релаксации. Выбор должен соответствовать наилучшему согласию с экспериментом, накладывающим существенные ограничения на аналитические выражения ядер. Вместе с этим эти выражения должны иметь удобную для анализа математическую форму.

Поэтому приходится делать необходимые обобщения, вводя более сложные зависимости. Часто такое обобщение рассматривается на основе слабо сингулярных функций, введение которых связано со следующими обстоятельствами.

Статические исследования вязкоупругих материалов на ползучесть и релаксацию свидетельствуют о чрезвычайно большой интенсивности релаксационных процессов в начальной стадии испытаний. При этом скорости процессов оказываются настолько большими, что их непосредственное измерение в начальный момент оказывается невозможным. Поэтому сами процессы приходится рассматривать как динамические и условно считать их скорости равными бесконечности [5,17].

Этот факт можно описать при помощи функций, обладающих интегрируемой особенностью абелевского типа. Эти функции, называемые слабо сингулярными, обеспечивают конечные деформации и напряжения в отличие от сильно сингулярных функций, которые и для них приводят к бесконечно большим значениям. Такие – слабосингулярные функции хорошо описывают скорости релаксационных процессов, если содержат достаточное число параметров. К этим ядрам относятся ядра, предложенные Работновым [5], Ржаницыным [18], Колтуновым [17] и другими.

В дальнейшем при расчете динамических задач воспользуемся простейшим и в то же время, достаточно общим слабосингулярным ядром Колтунова-Ржаницына с тремя реологическими параметрами ( $A, \beta$  и  $\alpha$ ), вида [17]:

$$R(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1.11)$$

Рассмотрим задачу о динамической устойчивости вязкоупругой полой круговой цилиндрической панели со сторонами опорного пункта  $a$  и  $b$ , постоянной толщины  $h$  и радиусом срединной поверхности  $R$ , изготовленной из ортотропного материала, подвергающейся динамическому сжатию вдоль стороны  $a$  силой  $P(t)=vt$  ( $v$  – скорость нагружения). В этом случае математическая модель задачи описывается системой уравнений (1.5).

Принимая, что края панели шарнирно оперты и что они смещаются свободно вдоль дуги и вдоль образующей и при этом кромки панели в срединной поверхности остаются прямолинейными, выражения для прогибов  $w, w_0$  и перемещений  $u, v$  на основе многочленной аппроксимации выберем в виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad w_0(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{0nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \\ u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в систему уравнений (1.5) и выполняя процедуру Бубнова-Галеркина, с учетом безразмерных величин:

$$\begin{aligned} \frac{w_{kl}}{h}, \frac{w_{0kl}}{h}, \frac{u_{kl}}{h}, \frac{v_{kl}}{h}, P^* &= \frac{P}{\sqrt{E_1 E_2}} \left( \frac{b}{h} \right)^2, \quad q^* = \frac{q}{\sqrt{E_1 E_2}} \left( \frac{b}{h} \right)^4, \quad t^* = \frac{P}{P_{sp}} = \frac{vt}{P_{sp}} = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{P^*}{P_{sp}^*} \\ S &= P_{sp}^* \left( \frac{\pi c \sqrt{E_1 E_2} h^3}{vb^4} \right)^2, \quad P_{sp}^* = \frac{P_{sp}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left( \frac{b}{h} \right)^2 = \frac{\gamma}{12\pi^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}, \quad \frac{\sqrt{S}}{\omega} R(t), \quad \frac{\sqrt{S}}{\omega} R_j(t), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

где  $c = \sqrt{\sqrt{E_1 E_2} / \rho}$ ;  $\omega = \sqrt{\pi^2 \sqrt{E_1 E_2} h^2 P_{sp}^* / (\rho b^4)}$  и сохранением при этом прежних обозначений, относительно безразмерных  $u_{kl}, v_{kl}$  и  $w_{kl}$ , получим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \ddot{u}_{kl} + \left[ \frac{12\pi^2 \Delta \delta^2 k^2}{\lambda^2 \gamma} (1 - R_{11}^*) + \frac{12\pi^2 g \delta^2 l^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R^*) \right] u_{kl} = \\ = - \frac{12\pi^2 \delta^2 kl}{\lambda \gamma} \left[ \Delta \mu_2 (1 - R_{12}^*) + g (1 - \mu_1 \mu_2) (1 - R^*) \right] v_{kl} - \frac{12\pi \Delta \mu_2 \beta \delta}{\lambda \gamma} k (1 - R_{12}^*) (w_{kl} - w_{0kl}) + \\ + \frac{12\pi \Delta \delta}{\lambda^3 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M n i^2 \mu_{nik} \beta_{mjl} (1 - R_{11}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\ + \frac{12\pi \Delta \delta \mu_2}{\lambda \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M m i j \gamma_{nik} \alpha_{mjl} (1 - R_{12}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\ + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (m i j \gamma_{nik} \alpha_{mjl} + n j^2 \mu_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{S} \ddot{v}_{kl} + \left[ \frac{12\pi^2 \delta^2 l^2}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) + \frac{12\pi^2 g \delta^2 k^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} (1 - R^*) \right] v_{kl} = \\
& = - \frac{12\pi^2 \delta^2 kl}{\Delta \lambda \gamma} \left[ \mu_1 (1 - R_{21}^*) + \Delta g (1 - \mu_1 \mu_2) (1 - R^*) \right] u_{kl} - \frac{12\pi \beta \delta}{\Delta \gamma} l (1 - R_{22}^*) (w_{kl} - w_{0kl}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \delta}{\Delta \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M m_j^2 \beta_{nik} \mu_{mjl} (1 - R_{22}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \delta \mu_1}{\Delta \lambda^2 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M nij \alpha_{nik} \gamma_{mjl} (1 - R_{21}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (nij \alpha_{nik} \gamma_{mjl} + n^2 j \beta_{nik} \gamma_{mjl}) (1 - R^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}), \\
& \frac{1}{S} \ddot{w}_{kl} - \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 t w_{kl} + \left[ \frac{\Delta \pi^4 k^4}{\lambda^4 \gamma} (1 - R_{11}^*) + \frac{4\pi^4 g k^2 l^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} (1 - R^*) + \frac{\Delta \pi^4 \mu_2 k^2 l^2}{\lambda^2 \gamma} (1 - R_{12}^*) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi^4 \mu_1 k^2 l^2}{\Delta \lambda^2 \gamma} (1 - R_{21}^*) + \frac{\pi^4 l^4}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) + \frac{12\beta^2}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) \right] (w_{kl} - w_{0kl}) = \\
& = \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\pi \Delta \delta}{\lambda^3 \gamma} a_{nmijkl} (1 - R_{11}^*) + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} c_{nmijkl} (1 - R^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{12\pi \mu_1 \delta}{\lambda \Delta \gamma} f_{nmijkl} (1 - R_{21}^*) \right] u_{ij} + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\pi \Delta \delta \mu_2}{\lambda^2 \gamma} b_{nmijkl} (1 - R_{12}^*) + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} d_{nmijkl} (1 - R^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{12\pi \delta}{\Delta \gamma} e_{nmijkl} (1 - R_{22}^*) \right] v_{ij} - \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \left[ \frac{3\Delta \pi^4}{8\lambda^4 \gamma} h_{nmijklrs} (1 - R_{11}^*) - \frac{3\Delta \pi^4 \mu_2}{8\lambda^2 \gamma} p_{nmijklrs} (1 - R_{12}^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3\pi^4 g (1 - \mu_1 \mu_2)}{4\lambda^2 \gamma} g_{nmijklrs} (1 - R^*) + \frac{3\pi^4}{8\Delta \gamma} q_{nmijklrs} (1 - R_{22}^*) - \frac{3\pi^4 \mu_1}{8\Delta \lambda^2 \gamma} r_{nmijklrs} (1 - R_{21}^*) \right] (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) + \\
& \quad + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\Delta \mu_2 \beta}{\lambda^2 \gamma} (n i \alpha_{nik} \beta_{mjl} + n^2 \beta_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R_{12}^*) + \frac{12\beta}{\Delta \gamma} (m j \beta_{nik} \alpha_{mjl} + m^2 \beta_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R_{22}^*) \right] \times \\
& \quad \times (w_{ij} - w_{0ij}) - \frac{12\pi \beta \delta}{\Delta \gamma} l (1 - R_{22}^*) v_{kl} - \frac{12\pi \mu_1 \beta \delta}{\Delta \lambda \gamma} k (1 - R_{21}^*) u_{kl} - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[ \frac{6\beta}{\Delta \gamma} m j \beta_{nik} \alpha_{mjl} (1 - R_{22}^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{6\mu_1 \beta}{\Delta \lambda^2 \gamma} n i \alpha_{nik} \beta_{mjl} (1 - R_{21}^*) \right] (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \frac{192\alpha_{kl} (1 - \mu_1 \mu_2)}{\pi^2 \gamma kl} q, \quad k, l = 1, 2, \dots \quad (1.13)
\end{aligned}$$

где

$$\Delta = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \delta = \frac{b}{h}; g = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}; \lambda = \frac{a}{b}; \gamma = 2\pi^4 \eta + 3\theta^2 (1 - \mu_1 \mu_2); \eta = 1 + \Delta \mu_2 + 2(1 - \mu_1 \mu_2) g$$

$\theta = b^2 / (Rh)$ ; остальные коэффициенты этой системы приведены в [14-16].

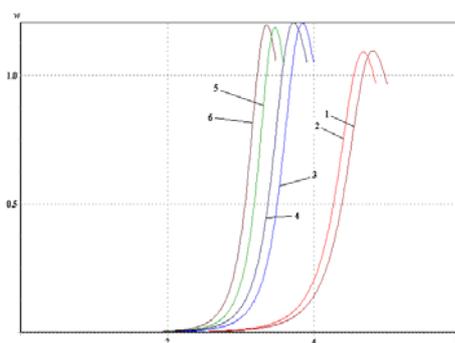
Систему (1.13) будем решать численным методом, основанным на использовании квадратурных формул [19]. Этот метод позволяет решать системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами типа Колтунова-Ржаницына, Абеля и Работнова. Она обеспечивает достаточно высокую точность полученных результатов, универсален, дает возможность решать широкий класс динамических задач теории вязкоупругости и экономичен с точки зрения компьютерного времени [19]. Далее в расчетах, в качестве ядер релаксации будем использовать слабосингулярные ядра Колтунова-Ржаницына вида (1.11).

Здесь, аналогично [8], в качестве критерия, определяющего критическое время, а вместе с тем и критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине панели. В качестве

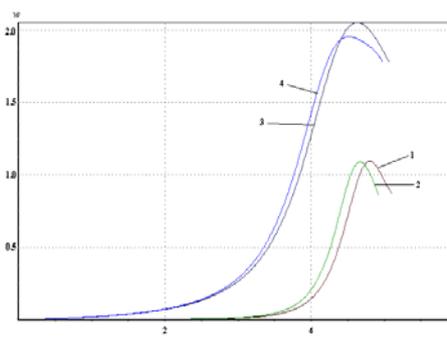
параметра, определяющего устойчивость панели, принят  $K_d$  – коэффициент динамичности, равный отношению динамической критической нагрузки к эйлеровой статической.

Фиг.1 относится к случаю квадратной по форме цилиндрической панели ( $\nu=1$ ) с начальной стрелой  $w_0 = 10^{-4}$ . Считаем, что поперечная нагрузка отсутствует, т.е.  $q=0$ . Кривые 1,2 ( $S=1$ ), 3,4 ( $S=3$ ) и 5,6 ( $S=5$ ), изображенные на фиг.1, соответствуют упругому и вязкоупругому случаям, соответственно. По оси абсцисс отложен безразмерный параметр  $t$ , равный отношению переменной величины сжимающей силы к статической нагрузке, а по оси ординат – безразмерная стрела прогиба  $w$ . Коэффициент динамичности  $K_d$  оказывается в упругом и вязкоупругом случаях при  $S=1$ , соответственно равным  $K_d=4.7$ ;  $K_d=4.5$ ; при  $S=3$  –  $K_d=3.75$ ;  $K_d=3.55$ , а при  $S=5$   $K_d=3.35$ ;  $K_d=3.2$ . Полученный результат показывает, что учет вязкоупругих свойств материала приводит к уменьшению критической нагрузки. Напомним, что параметр  $S$  обратно пропорционален  $\nu$ . Из графика видно, что с возрастанием скорости нагружения  $\nu$  значения коэффициента  $K_d$  увеличиваются.

На фиг.2 приведено исследование влияния дополнительной статической поперечной нагрузки на поведение квадратной по форме панели. Соответствующее значение  $K_d$  при  $q=1$  составляет 3.8 в упругом случае (кривая 3) и 3.7 в вязкоупругом (кривая 4), между тем, как при  $q=0$ , оно равно 4.7 (кривая 1) и 4.5 (кривая 2) соответственно.



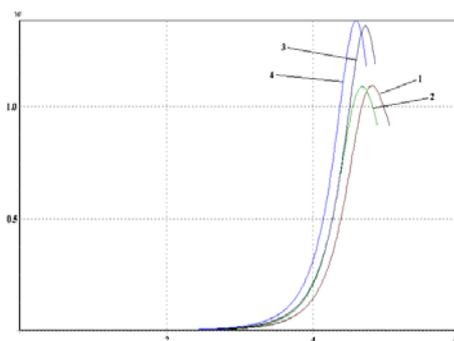
Фиг.1



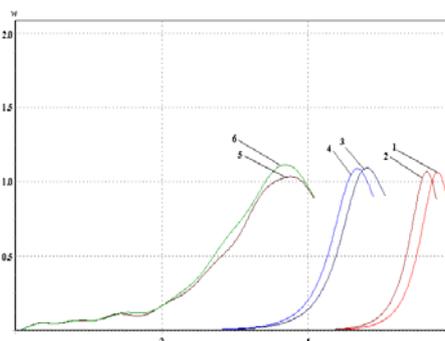
Фиг.2

На фиг.3 приведены графики кривых  $w$  для случаев вязкоупругой квадратной и удлиненной по форме панели. Результаты вычислений показывают, что при  $\nu=2$  соответствующие значения  $K_d$  равны в упругом случае 4.45 (кривая 3) и 4.3 в вязкоупругом (кривая 4). Сравнивая эти числа при  $\nu=1$  и  $\nu=2$ , приходим к выводу, что найденные для квадратной по форме панели значения  $K_d$  в вязкоупругом случае можно с небольшой погрешностью распространить на прямоугольные по форме панели иной конфигурации.

Исследовалось влияние начального прогиба  $w_0$  на поведение цилиндрической панели. На фиг.4 приведены графики кривых  $w$  для различных  $w_0=10^{-6}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-2}$ . При  $w_0=10^{-6}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-2}$  значения  $K_d$  в вязкоупругом случае равны 5.58; 4.5; 3.35 (кривые 2,4,6). Эти значения в упругом случае соответственно равны 5.74; 4.7; 3.58 (кривые 1,3,5).

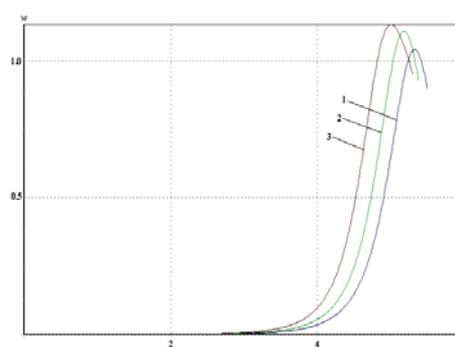


Фиг.3



Фиг.4

Изучено влияние ортотропности на процесс устойчивости панели. Как видно из фиг. 5, увеличение параметра  $\Delta$ , определяющего степень анизотропии (кривая 1 –  $\Delta=2.5$ ; кривая 2 –  $\Delta=2$  и кривая 3 –  $\Delta=1.5$ ), приводит к более позднему интенсивному возрастанию прогибов, соответственно увеличению критического значения  $K_d$ . Аналогичные результаты наблюдаются в экспериментах, проведенных с участием конструкций из композитных материалов [8]. Что еще раз подтверждает обоснованность выбранного метода и соответственно полученных результатов.



Фиг.5

Изучено также влияние параметра  $\nu$  на поведение цилиндрической панели. Полученные результаты показывают, что как и в случае колебания, параметр  $\nu$  (в интервале изменения  $0 < \nu < 1$ ) не оказывает существенного влияния на изменение критического времени и критической нагрузки.

Рассмотрим теперь предыдущую задачу с учетом деформации сдвига и инерции вращения по обобщенной теории Тимошенко. При принятых предположениях математическая модель этой задачи описывается системой уравнений (1.10).

В случае шарнирного опирания панели по краям, прогибы  $w, w_0$  и перемещения  $u$  и  $v$  представим в виде (1.12), а угловые перемещения  $\psi_x, \psi_y$  – в виде:

$$\begin{aligned} \psi_x(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \psi_{xnm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \psi_y(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \psi_{ynm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставляя (1.12) и (1.14) в систему уравнений (1.10) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина с введением соответствующих безразмерных величин, приведенных выше, получим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

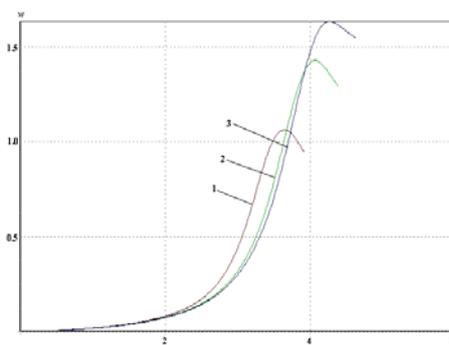
$$\begin{aligned}
& \frac{1}{S} \ddot{u}_{kl} + \left[ \frac{12\pi^2 \Delta \delta^2 k^2}{\lambda^2 \gamma} (1 - R_{11}^*) + \frac{12\pi^2 g \delta^2 l^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R^*) \right] u_{kl} = \\
& = -\frac{12\pi^2 \delta^2 kl}{\lambda \gamma} \left[ \Delta \mu_2 (1 - R_{12}^*) + g(1 - \mu_1 \mu_2)(1 - R^*) \right] v_{kl} - \frac{12\pi \Delta \mu_2 \beta \delta}{\lambda \gamma} k (1 - R_{12}^*) (w_{kl} - w_{0kl}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \Delta \delta}{\lambda^3 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M ni^2 \mu_{nik} \beta_{mjl} (1 - R_{11}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \Delta \delta \mu_2}{\lambda \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M mij \gamma_{nik} \alpha_{mjl} (1 - R_{12}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (mij \gamma_{nik} \alpha_{mjl} + nj^2 \mu_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \\
& \quad \frac{1}{S} \ddot{v}_{kl} + \left[ \frac{12\pi^2 \delta^2 l^2}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) + \frac{12\pi^2 g \delta^2 k^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} (1 - R^*) \right] v_{kl} = \\
& = -\frac{12\pi^2 \delta^2 kl}{\Delta \lambda \gamma} \left[ \mu_1 (1 - R_{21}^*) + \Delta g(1 - \mu_1 \mu_2)(1 - R^*) \right] u_{kl} - \frac{12\pi \beta \delta l (1 - R_{22}^*)}{\Delta \gamma} (w_{kl} - w_{0kl}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \delta}{\Delta \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M mj^2 \beta_{nik} \mu_{mjl} (1 - R_{22}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \delta \mu_1}{\Delta \lambda^2 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M nij \alpha_{nik} \gamma_{mjl} (1 - R_{21}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (nij \alpha_{nik} \gamma_{mjl} + n^2 j \beta_{nik} \gamma_{mjl}) (1 - R^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}), \\
& \quad \frac{1}{S} \ddot{w}_{kl} - \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 t w_{kl} + \frac{12\pi K^2 \delta^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} \left[ g_{13} \pi k^2 (1 - R_{13}^*) w_{kl} + g_{13} \lambda \delta k (1 - R_{13}^*) \psi_{xkl} + \right. \\
& \quad \left. + g_{23} \pi \lambda^2 l^2 (1 - R_{23}^*) w_{kl} + g_{23} \lambda^2 \delta l (1 - R_{23}^*) \psi_{ykl} + \frac{\beta^2 \lambda^2}{\Delta \pi K^2 (1 - \mu_1 \mu_2) \delta^2} (1 - R_{22}^*) (w_{kl} - w_{0kl}) \right] = \\
& = \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\pi \Delta \delta}{\lambda^3 \gamma} a_{nmijkl} (1 - R_{11}^*) + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} c_{nmijkl} (1 - R^*) + \frac{12\pi \mu_1 \delta}{\lambda \Delta \gamma} f_{nmijkl} (1 - R_{21}^*) \right] u_{ij} + \\
& \quad + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\pi \Delta \delta \mu_2}{\lambda^2 \gamma} b_{nmijkl} (1 - R_{12}^*) + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} d_{nmijkl} (1 - R^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{12\pi \delta}{\Delta \gamma} e_{nmijkl} (1 - R_{22}^*) \right] v_{ij} - \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \left[ \frac{3\Delta \pi^4}{8\lambda^4 \gamma} h_{nmijklrs} (1 - R_{11}^*) - \frac{3\Delta \pi^4 \mu_2}{8\lambda^2 \gamma} p_{nmijklrs} (1 - R_{12}^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3\pi^4 g (1 - \mu_1 \mu_2)}{4\lambda^2 \gamma} q_{nmijklrs} (1 - R^*) + \frac{3\pi^4}{8\Delta \gamma} r_{nmijklrs} (1 - R_{22}^*) - \frac{3\pi^4 \mu_1}{8\Delta \lambda^2 \gamma} r_{nmijklrs} (1 - R_{21}^*) \right] (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) + \\
& \quad + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\Delta \mu_2 \beta}{\lambda^2 \gamma} (ni \alpha_{nik} \beta_{mjl} + n^2 \beta_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R_{12}^*) + \frac{12\beta}{\Delta \gamma} (mj \beta_{nik} \alpha_{mjl} + m^2 \beta_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R_{22}^*) \right] \times \\
& \quad \times (w_{ij} - w_{0ij}) - \frac{12\pi \beta \delta}{\Delta \gamma} l (1 - R_{22}^*) v_{kl} - \frac{12\pi \mu_1 \beta \delta}{\Delta \lambda \gamma} k (1 - R_{21}^*) u_{kl} - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[ \frac{6\beta}{\Delta \gamma} mj \beta_{nik} \alpha_{mjl} (1 - R_{22}^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{6\mu_1 \beta}{\Delta \lambda^2 \gamma} ni \alpha_{nik} \beta_{mjl} (1 - R_{21}^*) \right] (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \frac{192\alpha_{kl} (1 - \mu_1 \mu_2)}{\pi^2 \gamma kl} q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{S} \ddot{\psi}_{xkl} + \frac{12\pi^2 \Delta \delta^2 k^2}{\lambda^2 \gamma} (1 - R_{11}^*) \psi_{xkl} + \frac{12\pi^2 \Delta \mu_2 \delta^2 kl}{\lambda \gamma} (1 - R_{12}^*) \psi_{ykl} + \frac{12\pi^2 g \delta^2 l^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R^*) \psi_{xkl} + \\
& + \frac{12\pi^2 g \delta^2 kl (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} (1 - R^*) \psi_{ykl} + \frac{144\pi K^2 g_{13} \delta^3 k (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} (1 - R_{13}^*) w_{kl} + \\
& \quad + \frac{144K^2 g_{13} \delta^4 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R_{13}^*) \psi_{xkl} = 0 \\
& \frac{1}{S} \ddot{\psi}_{ykl} + \frac{12\pi^2 \delta^2 l^2}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) \psi_{ykl} + \frac{12\pi^2 \mu_1 \delta^2 kl}{\Delta \lambda \gamma} (1 - R_{21}^*) \psi_{xkl} + \frac{12\pi^2 g \delta^2 kl (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} (1 - R^*) \psi_{xkl} + \\
& \quad + \frac{12\pi^2 g \delta^2 k^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} (1 - R^*) \psi_{ykl} + \frac{144\pi K^2 g_{23} \delta^3 l (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R_{23}^*) w_{kl} + \\
& \quad + \frac{144K^2 g_{23} \delta^4 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R_{23}^*) \psi_{ykl} = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{1.15}$$

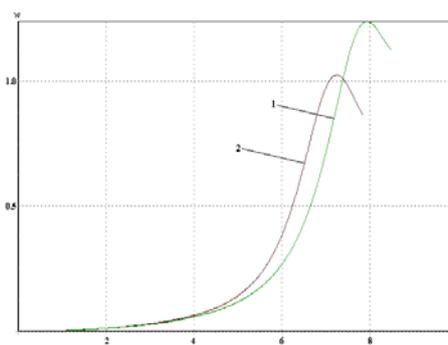
На фиг.6-8 приведены результаты расчетов деформирования вязкоупругой ортотропной цилиндрической панели с учетом деформации сдвига и инерции вращения.

На фиг.6 приведен график функции  $w$  вязкоупругой панели для различных значений геометрического параметра  $\delta$  (соотношение между шириной и толщиной). При  $\delta=10, 15$  и  $20$  (кривые 1,2,3 соответственно) "критическое" значение  $K_d$  составляет соответственно 3.48; 3.68; 3.75. Заметим, что увеличение параметра  $\delta$  приводит к перемещению всех кривых на право в сторону больших значений  $t$ , следовательно к увеличению коэффициента динамичности.

На фиг.7 приведены графики сравнения результатов, полученных по гипотезе Кирхгофа-Лява (кривая 1) и теории Тимошенко (кривая 2). Как видно из фиг.7, в случае, когда задача рассматривается по гипотезе Кирхгофа-Лява, критическое значение коэффициента динамичности составляет 7.38, в то время как при решении той же задачи по теории Тимошенко критическое значение  $K_d$  составляет 7.1. Это ещё раз подтверждает о необходимости при решении таких типов задач применения теорий наиболее полно учитывающих реальные процессы, происходящие в конструкциях типа цилиндрических панелей. В данном случае таковым является обобщенная теория Тимошенко, которая наряду с обычными деформациями учитывает деформацию сдвига и инерцию вращения.



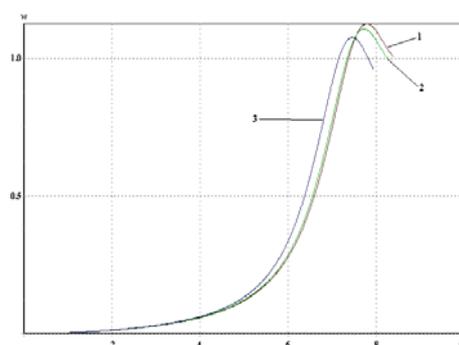
Фиг.6



Фиг.7

Также изучены влияния вязкоупругих свойств материала конструкции на поведение панели (фиг.8). Кривая 1 соответствует случаю, когда вязкоупругие

свойства материала не учитываются ( $A = A_{ij} = 0, i = 1,2; j = 1,2,3$  – упругий случай), кривая 2 – случаю (часто применяемому в работах многих авторов [12,13] при исследовании вязкоупругих ортотропных конструкций  $A = A_{13} = A_{23} = 0$ ), когда вязкоупругие свойства материала учитываются только по сдвиговым направлениям и кривая 3 – случаю, когда вязкоупругие свойства материала учитываются одинаково по всем направлениям ( $A = A_{ij} = 0.1, i = 1,2; j = 1,2,3$ ).



Фиг.8

Как видно из фиг. 8, результаты, полученные в упругом случае, почти совпадают с результатами, полученными в случае учета вязкоупругих свойств материала только по сдвиговым направлениям. Кроме этого, учет вязкоупругих свойств материала приводит к более раннему, интенсивному возрастанию прогибов соответственно уменьшению критических значений  $K_d$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1961. 384 с.
3. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек // Изв. АН Арм. ССР. Серия физ.-мат. наук. 1960. Т.13. №1. С.47-58.
4. Мовсисян Л.А. Об устойчивости анизотропной слоистой пластинки при ударе. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №2. С.47-55.
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
7. КФигтенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
8. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.:

Физматгиз, 1963. 635 с.

10. Донелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
11. Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1976. 214 с.
12. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивления жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1967. 398 с.
13. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 296 с.
14. Eshmatov.B.Kh. Nonlinear vibrations of viscoelastic orthotropic plates from composite materials // Third M.I.T. conference on Computational Fluid and Solid Mechanics. June 14-17. 2005. Boston (USA).
15. Eshmatov.B.Kh. Mathematical modeling of a task about dynamical stability of viscoelastic orthotropic plates taking account deformation shift and inertia of rotation // The 2-nd International Conference on Cybernetics and Information Technologies, Systems and Applications: CITSA 2005. July 14-17. 2005. Orlando (Florida, USA).
16. Эшматов Б.Х. Динамическая устойчивость вязкоупругих пластин при быстровозрастающих сжимающих нагрузках // ПМТФ. 2006.Т.47. №2. С.165-175.
17. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 276 с.
18. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Изд-во литературы по строительству, 1968. 416 с.
19. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем ИДУ, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ.1987.Т.51. №5.С.867-871.

Ташкентский институт  
ирригации и мелиорации

Поступила в редакцию  
19.09.2005