ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №2, 2007 Механика

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВНЫХ УПРУГО-ПОЛЗУЧИХ ТЕЛ, АРМИРОВАННЫХ ТОНКИМИ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Саркисян В.С., Мирзоян Е.С., Мирзоян С.Е.

Ключевые слова: Ползучесть, включение, напряжение.
Keywords: Creep, inclusion, stress.

Վ.Ս.Սարգսյան, Ե.Ս.Միրզոյան, Ս.Ե.Միրզոյան

Բարակ բացարձակ կոշտ ներդրակներով առաձգամածուցիկ հարթության լարվածային վիճակի մասին

Աշխատանքում ժառանգականորեն ծերացող սողքի տեսությամբ հետազոտվում է առաձգամածուցիկ հարթության և բարակ բացարձակ կոշտ շրջանային ներդրակների միջև կոնտակտային խնդիրների դաս:

V.S.Sarkisyan, Y.S.Mirzoyan, S.Y.Mirzoyan

On the Stressed State of Viscoelastic Plane with System Thin Solid Inclutions

In the theory of creep of hereditarily aging bodies a class of contact interaction problems between massive bodies in the form of elastically-creeping plane with circular perfectly rigit thin inclusions is investigated.

В постановке теории ползучести наследственно стареющих тел исследуется один класс задач контактного взаимодействия между массивными телами в виде упруго-ползучей плоскости с круговыми абсолютно жесткими тонкими включениями. Армированные тонкими включениями деформируемые тела представляют собой композиты (железобетонные массивы), в которых около включений образуются локальные поля напряжений, характеризующиеся большими и интенсивно изменящимися градиентами. Изучение таких концентраций напряжений представляется важным в расчетах на прочность железобетонных конструкций, вообще в композитах. Поэтому по изучению различных аспектов напряженно-деформированного состояния деформируемых тел с включениями проведены многочисленные и обширные исследования. В этом направлении укажем на работы [1-4].

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Пусть наследственно-стареющая вязкоупругая плоскость, отнесенная к полярней системе координат (r,ϑ), по совокупности интервалов

$L_k\{r=R;\ \alpha_k<\vartheta<\beta_k,\ -\pi<\alpha_k<\beta_k<\pi\}\ (k=1,2,...,n)$ на окружности радиуса R армирована круговыми абсолютно жесткими тонкими включениями. Будем считать, что материал плоскости обладает мерой ползучести $C(t,\tau)$, модулем упруго-мгновенной деформации $E(t)$ и находится в условиях плоской деформации. Пусть далее в момент времени τ_0 вязкоупругая плоскость на бесконечности нагружается изменяющимися по времени и равномерно распределенными нормальными напряжениями

$$\sigma_y^\infty=p(t),\sigma_x^\infty=q(t)$$

где $\sigma_y^\infty, \sigma_x^\infty$ – соответствующие компоненты напряжений на бесконечности. Пусть одновременно в тот же момент времени τ_0 на κ-ом $\left(k=\overline{1,n}\right)$ включении действуют силы с главным вектором $\{T_k(t), P_k(t)\}$ и главным моментом $M_k(t)$, а в точке $O(0,0)$ действуют сила $\{T(t), P(t)\}$ и момент $M(t)$, изменяющиеся во времени t.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние плоскости.

Предположим, как обычно, что для материала плоскости коэффициенты поперечного сжатия для упруго-мгновенной деформации $\nu(t)$ и деформация ползучести $\nu^*(t,\tau)$ постоянны [5-7]:

$$\nu(t) = \nu^*(t,\tau) = \nu = \text{const} \tag{1}$$

Тогда при плоской деформации основные реологические соотношения-зависимости между напряжениями и деформациями для материала плоскости имеют вид [5-7]:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x^*(t) = \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{E^*(t)}\left[\sigma_x(t) - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y(t)\right] - \\
&-\int_{\tau_0}^{t} \frac{1-\nu^2}{E^*(\tau)}\left[\sigma_x(\tau) - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y(\tau)\right] E^*(\tau)K^*(t,\tau)d\tau \\
&\varepsilon_y^*(t) = \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{1-\nu^2}{E^*(t)}\left[\sigma_y(t) - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x(t)\right] - \\
&-\int_{\tau_0}^{t} \frac{1-\nu^2}{E^*(\tau)}\left[\sigma_y(\tau) - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x(\tau)\right] E^*(\tau)K^*(t,\tau)d\tau \\
&\gamma_{xy}^*(t) = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = 2(1+\nu)\left[\frac{\tau_{xy}(t)}{E^*(t)} - \int_{\tau_0}^{t} \frac{\tau_{xy}(\tau)}{E^*(\tau)} E^*(\tau)K^*(t,\tau)d\tau\right]
\end{aligned} \tag{2}$$

$$E^*(t) = E(t+\rho), \rho = \tau - \tau_0 \tag{3}$$

$$K^*(t,\tau) = K(t+\rho, \tau+\rho), K(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau)\right] \tag{4}$$

Здесь $\sigma_x(t) = \sigma_x\left(x,y,t\right)$, $\sigma_y(t) = \sigma_y\left(x,y,t\right)$, $\tau_{xy}(t) = \tau_{xy}\left(x,y,t\right)$ –компоненты напряжений, а $u^* = u^*\left(x,y,t\right)$, $v^* = v^*\left(x,y,t\right)$ – соответственно, компоненты горизонтальных и вертикальных смещений. Кроме того, здесь звездочки над компонентами деформаций и смещений означают, что они берутся с учетом ползучести. Входящие в (4) меры ползучести представляются в виде [5-7]:

$$C(t,\tau) = \varphi(\tau)f(t-\tau) \quad (t \geq \tau)$$

где функция $\varphi(t)$ характеризует старение материала, а функция $f(t-\tau)$ – его наследственные свойства, причем на основани экспериментальных данных можно положить [7]

$$f(t-\tau)=\sum_{k=0}^{n}B_k e^{-\gamma_k(t-\tau)} \qquad B_0=1,\sum_{k=0}^{n}B_k=0,\gamma_0=0,\gamma_k>0\,(k=1,2,...,n)$$

При этом функция $\varphi(\tau)$ аппроксимируется одним из выражений

$$\varphi(\tau)=A_0+\sum_{k=1}^{n}A_k e^{-\beta_k\tau},\varphi(\tau)=A_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\tau^k}\ \left(\beta_k>0,k=1,2,...,n\right)$$

Здесь A_k,B_k,γ_k и β_k – константы материала плоскости, определяемые экспериментальным путем. В дальнейшем примем также, что $E(t)=E=\mathrm{const}$.

Применив к (2) известную процедуру получения перемещений, придем к соотношениям (I – единичный оператор)

$$\begin{gathered}u^*(x,y,t)=(I-K)u(x,y,t),\ \ v^*(x,y,t)=(I-K)v(x,y,t)\\ K\varphi=\int_{\tau_0}^{t}\varphi(\tau)E^*(\tau)K^*(t,\tau)d\tau\end{gathered} \tag{5}$$

Таким образом, при условиях (1) компоненты смещений u^*и v^* точек упруго-ползучего тела с учетом ползучести выражаются через те же компоненты упруго-мгновенных смещений $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$. В случае обобщенного плоского напряженного состояния тела в уравнениях (2) следует произвести замены:

$$\nu\to\nu/(1+\nu),\ E\to E(1+2\nu)/(1+\nu)^2\ .$$

Далее, вязкоупругую плоскость по окружности с радиусом R разрежем на круговой диск и на плоскость с круговым отверстием и вычислим компоненты смещений граничных точек диска (-) и плоскости с круговым отверстием (+). Известно, что [8]

$$\begin{gathered}W_-\left(R,\vartheta,t\right)=u_r^-\left(R,\vartheta,t\right)+i\,u_\vartheta^-\left(R,\vartheta,t\right)=-\frac{\kappa\left[T\left(t\right)+iP\left(t\right)\right]}{2\pi\mu\left(\kappa+1\right)}\ln R\,e^{-i\vartheta}-\\ -\frac{T\left(t\right)+iP\left(t\right)}{2\pi\mu\left(\kappa+1\right)}e^{-i\vartheta}+\frac{iM\left(t\right)\left(\kappa+1\right)}{8\pi\mu R}+\frac{R}{4\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\mathrm{X}}_-\left(\varphi,t\right)e^{-i(\vartheta-\varphi)}d\varphi+\frac{T\left(t\right)-iP\left(t\right)}{4\pi\mu}e^{i\vartheta}+\\ +\frac{R\left(\kappa+1\right)}{4\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{X}_-\left(\varphi,t\right)e^{-i(\vartheta-\varphi)}\ln\left|2\sin\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right|d\varphi+\frac{R\left(\kappa+1\right)}{8\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{X}_-\left(\varphi,t\right)d\varphi-\\ -\frac{iR\left(\kappa-1\right)}{8\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{X}_-\left(\varphi,t\right)e^{-i(\vartheta-\varphi)}\left(\pi-\left|\vartheta-\varphi\right|\right)\mathrm{sgn}\left(\vartheta-\varphi\right)d\varphi;\\ W_+\left(R,\vartheta,t\right)=u_r^+\left(R,\vartheta,t\right)+iu_\vartheta^+\left(R,\vartheta,t\right)=\frac{p\left(t\right)+q\left(t\right)}{8\mu}R\left(\kappa+1\right)-\\ \left(-\pi<\vartheta<\pi\right)\end{gathered} \tag{6}$$

$$-\frac{R(\kappa+1)}{4\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{X}_{+}(\varphi,t)e^{-i(\vartheta-\varphi)}\ln\left|2\sin\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right|d\varphi-\frac{p(t)-q(t)}{4\mu}R(\kappa+1)e^{-2i\vartheta}-$$

$$-\frac{iR(\kappa-1)}{8\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{X}_{+}(\varphi,t)e^{-i(\vartheta-\varphi)}\left(\pi-|\vartheta-\varphi|\right)\operatorname{sgn}(\vartheta-\varphi)\,d\varphi;$$

$\kappa=3-4\nu,\quad \mu=E/2(1+\nu)$, $X_{\pm}(\varphi,t)=T_{\pm}(\varphi,t)+i\sum_{\pm}(\varphi,t)\quad(-\pi<\varphi<\pi)$

$$-\sigma_r\big|_{r=\pm R}=T_{\pm}(\varphi)=\begin{cases}\sigma_{\pm}(\varphi,t), & \varphi\in L;\\ \sigma(\varphi,t), & \varphi\in L';\end{cases}\qquad -\sigma_{r\varphi}\big|_{r=R}=\Sigma_{\pm}(\varphi)=\begin{cases}\tau_{\pm}(\varphi,t), & \varphi\in L;\\ \tau(\varphi,t), & \varphi\in L';\end{cases}$$

$$L=\bigcup_{k=1}^{n}L_k,\ \ L'=(-\pi,\pi)/L.$$

Здесь $u_r^{\pm},u_\vartheta^{\pm}$ – смещения граничных точек в радиальном и круговом направлениях, соответственно, а σ_r, $\sigma_{r\varphi}$–компоненты напряжений.

Теперь обозначая

$$W(\vartheta,t)=W_{+}(R,\vartheta,t)+W_{-}(R,\vartheta,t)\ ,\ \Phi(\vartheta,t)=W_{+}(R,\vartheta,t)-W_{-}(R,\vartheta,t)$$

$$\Sigma(\vartheta,t)=\mathrm{X}_{+}(\vartheta,t)+\mathrm{X}_{-}(\vartheta,t)\ ,\ \Omega(\vartheta,t)=\mathrm{X}_{+}(\vartheta,t)-\mathrm{X}_{-}(\vartheta,t)$$

с учетом (5) и (6) находим

$$\left(W^{*}(\vartheta,t)e^{i\vartheta}\right)'_{\vartheta}=(I-K)i\frac{p(t)+q(t)}{8\mu}R(\kappa+1)e^{i\vartheta}+(I-K)i\frac{p(t)-q(t)}{4\mu}R(\kappa+1)e^{-i\vartheta}+$$

$$+(I-K)i\frac{R(\kappa+1)}{8\pi\mu}e^{i\vartheta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Sigma(\varphi,t)-\Omega(\varphi,t)}{2}d\varphi-(I-K)\frac{M(t)(\kappa+1)}{8\pi\mu R}e^{i\vartheta}+$$

$$+(I-K)i\frac{T(t)-iP(t)}{2\pi\mu}e^{2i\vartheta}-(I-K)\frac{R(\kappa+1)}{8\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}d\varphi-$$

$$-(I-K)\frac{iR(\kappa-1)}{8\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\Sigma(\varphi,t)e^{i\varphi}\left[2\pi\delta(\vartheta-\varphi)-1\right]d\varphi$$

$$\left(\Phi^{*}(\vartheta,t)e^{i\vartheta}\right)'_{\vartheta}=(I-K)i\frac{p(t)+q(t)}{8\mu}R(\kappa+1)e^{i\vartheta}+(I-K)\frac{M(t)(\kappa+1)}{8\pi\mu R}e^{i\vartheta}-$$

$$-(I-K)i\frac{R(\kappa+1)}{8\pi\mu}e^{i\vartheta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Sigma(\varphi,t)-\Omega(\varphi,t)}{2}d\varphi+(I-K)i\frac{p(t)-q(t)}{4\mu}R(\kappa+1)e^{-i\vartheta}-$$

$$-(I-K)i\frac{T(t)-iP(t)}{2\pi\mu}e^{2i\vartheta}-(I-K)\frac{R(\kappa+1)}{8\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\Sigma(\varphi,t)e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}d\varphi-$$

$$-(I-K)\frac{iR(\kappa-1)}{8\pi\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}\left[2\pi\delta(\vartheta-\varphi)-1\right]d\varphi$$

Здесь $\delta(\vartheta)$– известная дельта-функция Дирака.

Так как смещения непрерывны на $r=R$, то $\Phi^*(\vartheta,t)\equiv 0$. Из последнего выражения определим функцию $\Omega(\vartheta,t)$. С этой целью $\Omega(\vartheta,t)e^{i\varphi}$ и $\Sigma(\vartheta,t)e^{i\varphi}$ представим рядами Фурье

$$\Sigma(\varphi,t)e^{i\varphi}=\frac{\Sigma_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\Sigma_k\cos k\varphi+\overline{\Sigma}_k\sin k\varphi\right)$$

$$\Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}=\frac{\Omega_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\Omega_k\cos k\varphi+\overline{\Omega}_k\sin k\varphi\right)$$

После простых преобразований получим

$$\begin{gathered}\left(W^*(\vartheta,t)e^{i\vartheta}\right)'_{\vartheta}=(I-K)i\frac{p(t)+q(t)}{4\mu}R(\kappa-1)e^{i\vartheta}+(I-K)i\frac{p(t)-q(t)}{2\mu}Re^{-i\vartheta}-\\
-(I-K)\frac{iRe^{i\vartheta}}{2\pi\mu(\kappa+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\varphi,t)d\varphi-(I-K)\frac{M(t)}{2\pi\mu R}e^{i\vartheta}+\qquad(-\pi<\vartheta<\pi)\\
+(I-K)i\frac{T(t)-iP(t)}{\pi\mu(\kappa+1)}e^{2i\vartheta}-(I-K)\frac{R\kappa}{2\pi\mu(\kappa+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}d\varphi\\
(I-K)\Sigma e^{i\varphi}=(I-K)\frac{\Sigma_0}{2}+(I-K)\frac{i(\kappa-1)}{2\pi(\kappa+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\vartheta,t)e^{i\vartheta}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\vartheta}{2}d\vartheta-\\
-(I-K)\frac{e^{i\varphi}}{\pi(\kappa+1)}+2(I-K)\frac{T(t)-iP(t)}{\pi R(\kappa+1)}e^{2i\varphi}+(I-K)\frac{iM(t)}{\pi R^2}e^{i\varphi}-\\
-(I-K)\left[p(t)+q(t)\right]e^{i\varphi}+(I-K)\left[p(t)-q(t)\right]e^{-i\varphi}\end{gathered}\tag{7}$$

Так как напряжения вне L на окружности непрерывны, то $\Omega(\vartheta,t)\equiv 0, \vartheta\in L'$ и из (7) после несложных выкладок придем к ключевому уравнению поставленной задачи:

$$\begin{gathered}\left(W(\vartheta,t)e^{i\vartheta}\right)'_{\vartheta}=i\frac{p(t)+q(t)}{4\mu}R(\kappa-1)e^{i\vartheta}+i\frac{p(t)-q(t)}{2\mu}Re^{-i\vartheta}-\frac{M(t)}{2\pi\mu R}e^{i\vartheta}+\\
+i\frac{T(t)-iP(t)}{\pi\mu(\kappa+1)}e^{2i\vartheta}-\frac{R\kappa}{2\pi\mu(\kappa+1)}\int_L\Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}d\varphi-\\
-\frac{iRe^{i\vartheta}}{2\pi\mu(\kappa+1)}\int_L\Omega(\varphi,t)d\varphi\qquad(-\pi<\vartheta<\pi)\\
\Sigma e^{i\varphi}=\frac{\Sigma_0}{2}+\frac{i(\kappa-1)}{2\pi(\kappa+1)}\int_L\Omega(\vartheta,t)e^{i\vartheta}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\vartheta}{2}d\vartheta-\frac{e^{i\varphi}}{\pi(\kappa+1)}+2\frac{T(t)-iP(t)}{\pi R(\kappa+1)}e^{2i\varphi}+\\
+\frac{iM(t)}{\pi R^2}e^{i\varphi}-\left[p(t)+q(t)\right]e^{i\varphi}+\left[p(t)-q(t)\right]e^{-i\varphi}\end{gathered}\tag{8}$$

2. Решение определяющего интегрального уравнения.

Рассматривая ключевое уравнение (8) на системе включений L, относительно $\Omega(\varphi,t)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\frac{R\kappa}{2\pi\mu(\kappa+1)}\int_L \Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}d\varphi = i\frac{p(t)+q(t)}{4\mu}R(\kappa-1)e^{i\vartheta}+$$
$$+i\frac{p(t)-q(t)}{2\mu}Re^{-i\vartheta}-\frac{M(t)}{2\pi\mu R}e^{i\vartheta}+i\frac{T(t)-iP(t)}{\pi\mu(\kappa+1)}e^{2i\vartheta}-\left(W(\vartheta,t)e^{i\vartheta}\right)'_{\vartheta}- \tag{9}$$
$$-\frac{iRe^{i\vartheta}}{2\pi\mu(\kappa+1)}\int_L \Omega(\varphi,t)d\varphi \qquad (\vartheta\in L)$$

а условия равновесия включений примут вид:

$$\begin{gathered}\int_{\alpha_m}^{\beta_m}\Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}d\varphi=-\frac{P_m(t)+iT_m(t)}{R} \qquad \left(m=\overline{1,n}\right)\\ \operatorname{Im}\int_{\alpha_m}^{\beta_m}\Omega(\varphi,t)d\varphi=\frac{M_m(t)}{R^2} \qquad \left(m=\overline{1,n}\right)\end{gathered} \tag{10}$$

Условия равновесия диска имеют вид

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\Sigma(\varphi,t)-\Omega(\varphi,t)\right]e^{i\varphi}d\varphi=\frac{T(t)+iP(t)}{R}$$

и, следовательно,

$$\Sigma_0=\frac{1}{\pi R}\left\{2\left[T(t)+iP(t)\right]-\sum_{m=1}^{n}\left[P_m(t)+iT_m(t)\right]\right\}$$

Для напряжений будем иметь

$$\begin{gathered}\sigma_+(\varphi,t)=\frac{\operatorname{Re}\Sigma(\varphi,t)+\operatorname{Re}\Omega(\varphi,t)}{2},\ \sigma_-(\varphi,t)=\frac{\operatorname{Re}\Sigma(\varphi,t)-\operatorname{Re}\Omega(\varphi,t)}{2}\\ \tau_+(\varphi,t)=\frac{\operatorname{Im}\Sigma(\varphi,t)+\operatorname{Im}\Omega(\varphi,t)}{2},\ \tau_-(\varphi,t)=\frac{\operatorname{Im}\Sigma(\varphi,t)-\operatorname{Im}\Omega(\varphi,t)}{2}\\ \sigma(\varphi,t)=\frac{\operatorname{Re}\Sigma(\varphi,t)}{2},\quad \tau(\varphi,t)=\frac{\operatorname{Im}\Sigma(\varphi,t)}{2}\end{gathered} \tag{11}$$

Построим решение определяющего интегрального уравнения (9):

$$\int_L \Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}d\varphi=f(\vartheta,t) \qquad (\vartheta\in L)$$

С этой целью перейдем к новым переменным и функциям

$$x=\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2},\ u=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\ a_m=\operatorname{tg}\frac{\alpha_m}{2},\ b_m=\operatorname{tg}\frac{\beta_m}{2}$$
$$\Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}\to\overline{\Omega}(u,t),\ f(\vartheta,t)\to\overline{f}(x,t)$$

тогда

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}d\varphi=2\left(\frac{1}{x-u}+\frac{u}{1+u^2}\right)du$$

$$\int_L \Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}ctg\frac{\vartheta-\varphi}{2}d\varphi = 2\int_{L'}\frac{\overline{\Omega}(u,t)}{x-u}du + 2\int_{L'}\frac{u\overline{\Omega}(u,t)}{1+u^2}du; \quad L' = \bigcup_{m=1}^{n}(a_m,b_m)$$

и, следовательно, придем к уравнению с ядром Коши

$$\int_{L'}\frac{\Omega(u,t)}{u-x}du = -\frac{\overline{f}(x,t)}{2} + c(t); \qquad c(t) = \int_{L'}\frac{u\overline{\Omega}(u,t)}{1+u^2}du$$

решение которого имеет вид

$$\overline{\Omega}(x,t) = \frac{(-1)^{n-l+1}}{\pi\sqrt{\left|\prod_{m=1}^{n}(x-a_m)(x-b_m)\right|}}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-m}\int_{a_m}^{b_m}\sqrt{\left|\prod_{m=1}^{n}(u-a_m)(u-b_m)\right|}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{c(t)-\frac{\overline{f}(u,t)}{2}}{u-x}du + P_{n-1}(x,t)\right] \qquad \left(l=\overline{1,n}\right)$$

$$P_{n-1}(x) = c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}$$

где $c_k = c_k(t)$ $(k = \overline{0,n-1})$ – неизвестные постоянные по переменной x.

Возвращаясь к прежним переменным, будем иметь

$$x-a_m = \frac{\sin\frac{\vartheta-\alpha_m}{2}}{\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\alpha_m}{2}},\ x-b_m = \frac{\sin\frac{\vartheta-\beta_m}{2}}{\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\beta_m}{2}}, \quad \frac{du}{u-x} = \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}d\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}}$$

$$\prod_{m=1}^{n}(x-a_m)(x-b_m) = \frac{\prod_{m=1}^{n}\sin\frac{\vartheta-\alpha_m}{2}\sin\frac{\vartheta-\beta_m}{2}}{\cos^{2n}\frac{\vartheta}{2}\prod_{m=1}^{n}\cos\frac{\alpha_m}{2}\cos\frac{\beta_m}{2}}$$

$$\Omega(\vartheta,t)e^{i\vartheta} = \frac{(-1)^{n-l+1}\cos^n\frac{\vartheta}{2}}{\pi\sqrt{\left|\prod_{m=1}^{n}\sin\frac{\vartheta-a_m}{2}\sin\frac{\vartheta-\beta_m}{2}\right|}}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m}\frac{\left[c(t)-\frac{f(\varphi,t)}{2}\right]}{\cos^n\frac{\varphi}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sqrt{\left|\prod_{m=1}^{n}\sin\frac{\varphi-a_m}{2}\sin\frac{\varphi-\beta_m}{2}\right|}\cos\frac{\vartheta}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}}d\varphi + P_{n-1}\left(\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)\right] \qquad \left(l=\overline{1,n}\right)$$

$$c(t)=\int_L \Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$\Omega(\vartheta,t)e^{i\vartheta}=-\frac{(-1)^{n-l+1}\cos^{n+1}\frac{\vartheta}{2}}{4\pi^2\sqrt{\left|\prod_{m=1}^{n}\sin\frac{\vartheta-\alpha_m}{2}\sin\frac{\vartheta-\beta_m}{2}\right|}}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m}\frac{f(\varphi,t)}{\cos^{n+1}\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}}\times$$

$$\times\sqrt{\left|\prod_{m=1}^{n}\sin\frac{\varphi-\alpha_m}{2}\sin\frac{\varphi-\beta_m}{2}\right|}d\varphi+\frac{(-1)^{n-l+1}\cos^{n}\frac{\vartheta}{2}}{\pi\sqrt{\left|\prod_{m=1}^{n}\sin\frac{\vartheta-\alpha_m}{2}\sin\frac{\vartheta-\beta_m}{2}\right|}}P_{n-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)+$$

$$+\frac{c(t)(-1)^{n-l+1}\cos^{n+1}\frac{\vartheta}{2}}{2\pi^2\sqrt{\left|\prod_{m=1}^{n}\sin\frac{\vartheta-\alpha_m}{2}\sin\frac{\vartheta-\beta_m}{2}\right|}}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m}\frac{\sqrt{\left|\prod_{m=1}^{n}\sin\frac{\varphi-\alpha_m}{2}\sin\frac{\varphi-\beta_m}{2}\right|}}{\cos^{n+1}\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}}d\varphi\quad\left(l=\overline{1,n}\right)$$

3. Частные случаи.

Пусть на окружности $r=R$ имеем только одно включение $L=\{r=R,\ -\alpha<\vartheta<\alpha\}$. Тогда

$$\left(We^{i\vartheta}\right)'_{\vartheta}=-2\gamma R\,e^{i\vartheta}$$

где γ – угол поворота включения. В этом случае определяющее интегральное уравнение (9) примет вид

$$\frac{R\kappa}{2\pi\mu(\kappa+1)}\int_{-\alpha}^{\alpha}\Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}d\varphi=f(\vartheta,t)-\frac{iR\,e^{i\vartheta}\tilde{c}(t)}{2\pi\mu(\kappa+1)}\qquad\left(|\vartheta<\alpha|\right)\quad(12)$$

$$f(\vartheta,t)=i\frac{p(t)+q(t)}{4\mu}R(\kappa-1)e^{i\vartheta}+i\frac{p(t)-q(t)}{2\mu}R\,e^{-i\vartheta}-\frac{M(t)}{2\pi\mu R}e^{i\vartheta}+$$

$$+i\frac{T(t)-iP(t)}{\pi\mu(\kappa+1)}e^{2i\vartheta}+2\gamma R\,e^{i\vartheta},\ \ \tilde{c}(t)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\Omega(\varphi,t)d\varphi$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$\Omega(\varphi,t)e^{i\varphi}=\frac{1}{2}\tilde{c}(t)M(\varphi,t)+\frac{1}{2}N(\varphi,t)+\frac{(cF-G)\sin\frac{\varphi}{2}+B\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\alpha)}}\qquad(13)$$

где

$$F=\frac{i}{2\pi^2\kappa}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{2\left(\cos\varphi-\cos\alpha\right)}}{\cos\frac{\varphi}{2}}e^{i\varphi}d\varphi$$

$$G=\frac{\mu\left(\kappa+1\right)}{\pi R\kappa}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{2\left(\cos\varphi-\cos\alpha\right)}}{\cos\frac{\varphi}{2}}f\left(\varphi,t\right)d\varphi$$

$$M\left(\varphi,t\right)=-\frac{i}{2\pi^2\kappa}\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\left(\cos\varphi-\cos\alpha\right)}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{2\left(\cos\vartheta-\cos\alpha\right)}}{\sin\frac{\vartheta-\varphi}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}}e^{i\vartheta}d\vartheta$$

$$N\left(\varphi,t\right)=\frac{\mu\left(\kappa+1\right)}{\pi R\kappa}\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\left(\cos\varphi-\cos\alpha\right)}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{2\left(\cos\vartheta-\cos\alpha\right)}}{\sin\frac{\vartheta-\varphi}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}}f\left(\vartheta\right)d\vartheta$$

или после простых преобразований

$$F=\frac{2i\cos\frac{\alpha}{2}}{\pi\kappa}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$G=\frac{\kappa+1}{\kappa}\left[2i\left[p\left(t\right)-q\left(t\right)\right]-\frac{2M\left(t\right)}{\pi R^2}+i\left[p\left(t\right)+q\left(t\right)\right]\left(\kappa-1\right)+8\mu\gamma\right]\cos\frac{\alpha}{2}\times$$

$$\times\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)+4i\frac{T\left(t\right)-iP\left(t\right)}{\pi R\kappa}\left(1-\sin^4\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$M\left(\varphi,t\right)=-i\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)+4i\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi\kappa\sqrt{2\left(\cos\varphi-\cos\alpha\right)}}$$

$$N\left(\varphi,t\right)=\frac{\mu\left(\kappa+1\right)}{\pi R\kappa}\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\left(\cos\varphi-\cos\alpha\right)}}\left\langle\left[i\frac{p\left(t\right)-q\left(t\right)}{2\mu}R-\frac{M\left(t\right)}{2\pi\mu R}+i\frac{p\left(t\right)+q\left(t\right)}{4\mu}\times\right.\right.$$

$$\times R(\kappa-1)+2\gamma R\Big]4\pi\sin\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}-2\right)+\Big[-i\frac{p(t)-q(t)}{\mu}R-\frac{M(t)}{\pi\mu R}+4\gamma R+$$

$$+i\frac{p(t)+q(t)}{2\mu}R(\kappa-1)\Big]4\pi i\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}+i\frac{T(t)-iP(t)}{\pi\mu(\kappa+1)}\Bigg\{-\frac{4\pi\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}+$$

$$+16\pi\sin\frac{\varphi}{2}\left[1+\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right]\Bigg\}-\frac{T(t)-iP(t)}{\mu(\kappa+1)}\frac{16}{\cos\frac{\varphi}{2}}\Big\{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\varphi}{2}\times$$

$$\times\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\Big\rangle$$

При помощи (10) найдены постоянные c, B и угол поворота включения γ

$$\operatorname{Im} c=\frac{M_1(t)}{R^2}\quad \operatorname{Re} c=\frac{\kappa\left(U\cos^2\frac{\alpha}{2}-V\right)}{2\left(\kappa-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\operatorname{Re} B=\frac{\left(1-\kappa-2\cos^3\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\alpha}{2}\right)U-V\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\pi\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\kappa\right)}$$

$$\operatorname{Im} B=\frac{\left(1-2\cos^3\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\alpha}{2}\right)Q-K\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\gamma=\frac{1}{8R}\left[\frac{R\kappa\left(K-Q\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\mu\pi(\kappa+1)\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2M(t)}{\pi\mu R}\right]$$

$$K=\frac{2M_1(t)}{R^2}-\frac{2M_1(t)}{\kappa R^2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(2-\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)-$$

$$-4\frac{P(t)}{R\kappa}\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^4\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)-4\frac{P(t)}{R\kappa}\Big[-16-15\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+16\cos\frac{\alpha}{2}-$$

$$-20\sin^6\frac{\alpha}{2}+36\sin^4\frac{\alpha}{2}+24\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}-14\sin^4\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\Big]$$

$$Q=-\frac{2T_1(t)}{R}-\frac{2M_1(t)}{R^2\kappa}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{16P(t)}{R\kappa}\left(-1+\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{8}-\frac{3}{4}\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$U=-\frac{2P_1(t)}{R}-\frac{\kappa+1}{R\kappa}\left\{\pi R\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\left[2\left[p(t)-q(t)\right]-\left[p(t)+q(t)\right](\kappa-1)\right]-\right.$$

$$\left.-16\frac{T(t)}{\kappa+1}\left(-1+\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{8}-\frac{3}{4}\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

$$V=\frac{4T(t)}{R\kappa}\left[\sin^2\frac{\alpha}{2}-21\sin^6\frac{\alpha}{2}-16\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-16+36\sin^4\frac{\alpha}{2}+24\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}-\right.$$

$$\left.-14\sin^4\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]+\frac{\pi(\kappa+1)}{2\kappa}\left\{\left\{2\left[p(t)-q(t)\right]+\left[p(t)+q(t)\right](\kappa-1)\right\}\left[2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-3\sin^4\frac{\alpha}{2}+4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]-\left\{2\left[p(t)-q(t)\right]-\left[p(t)+q(t)\right](\kappa-1)\right\}\left[4-6\sin^2\frac{\alpha}{2}-4\cos^3\frac{\alpha}{2}-3\sin^4\frac{\alpha}{2}\right]\right.$$

а напряжения можно получить при помощи формул (13), (8) и (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука. 1976. 496 с.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка. 1976. 443с.
3. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трешинами. Механика разрушения и прочность материалов. /Спр. Пособие под общей ред. В.В.Панасюка.Т.2. Киев:Наукова думка. 1988. 619с.
4. Грилицкий В.Д., Сулим Г.Т. Периодическая задача для кусочно-однородной плоскости с тонкостенными упругими включениями. // ПМ. 1975. Т. II. N I . С. 74-81.
5. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М.: Наука. 1983. 336 стр.
6. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растующих вязко-упруго-пластических тел. М.: Наука. 1987. 741 с.
7. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат. 1952. 324 с.
8. Торосян Ф.С. Исследование некоторых задач о контактном взаимодействии двух цилиндрических и сферических тел близких радиусов между собой и с тонкостенными элементами. /Кандидатская диссертация. Ереван. 1982. 152 с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
8.11.2006