

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ
ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ С ТРЕМЯ ШАРНИРНО
ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

Гулгазарян Г.Р., Саакян Р.Д.

Ключевые слова: колебания, безмоментная, классическая, цилиндрическая, спектр, характеристики.

Keywords: vibrations, unmoment, classical, cylindrical, spectrum, characteristics.

Գ. Ռ. Դուլգազարյան, Ռ. Դ. Սահակյան

Երեք ծայրերով հողակապրեն ամրակցված, փոփոխական կորության բաց օրթոտրոպ գլանային թաղանթի տատանումները

Հետազոտվում է երեք ծայրերով հողակապրեն ամրակցված, անմոմենտ կամայական ողորկ ուղղորդ կորով բաց օրթոտրոպ գլանային թաղանթի սեփական տատանումները: Սեփական հաճախությունների և մարման գործակիցների անչափողական բնութագրիչների որոշման համար արտածված են դիսպերսիոն և բնութագրիչ հավասարումներ: Պարաբոլական տեսքի տարբեր ուղղորդ կորերով և տարբեր երկարություններով գլանային թաղանթների համար կատարված են թվային հաշվարկներ:

G.R. Ghulghazaryan, R.D. Sahakyan

Vibrations of unmoment non-closed orthotropic cylindrical shell with simple support boundary conditions at three edges

Vibrations of unmoment non-closed orthotropic cylindrical shell with arbitrary plane directing curve and with simple support boundary conditions at three edges are studied. The dispersion and characteristic equations for finding the values of dimensionless characteristics of eigenfrequency and the coefficient of dumping of the corresponding vibration form are obtained. Calculations were carried out for shells with directing curve in the form of parabola with different values of curvature and different length of generator.

Исследуются собственные колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей и тремя шарнирно закрепленными краями. Найдены дисперсионные и характеристические уравнения для нахождения безразмерной характеристики собственных частот и коэффициентов затухания соответствующих форм колебаний. Конкретные вычисления выполнены для ортотропных оболочек с направляющими в виде параболы с различной величиной кривизны и длины образующей.

Введение. Исследуются собственные колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны, у которой две граничные образующие и один край шарнирно закреплены, а другой край свободен. Найдены дисперсионные и характеристические уравнения для нахождения безразмерной характеристики собственных частот и коэффициентов затухания соответствующих форм колебаний. Доказывается асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для круговой цилиндрической оболочки открытого профиля и ортотропной прямоугольной пластинки соответственно.

Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным краем. Для цилиндрических оболочек с длинами $l = 5$, $l = 15$, направляющими

$$y = ba^{-2}(a^2 - x^2), \quad |x| \leq a, \quad a = 2, \quad b = 1; \quad a = 2, \quad b = 0.5 \quad (1)$$

изготовленных из ортотропного материала с параметрами [1].

Стеклопластик: $\rho = 2.4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $E_1 = 6.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9 \text{ Н/М}^2$,

$$E_2 = 1.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9, \quad G = 0.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9, \quad \nu_1 = 0.26, \quad \nu_2 = 0.06 \quad (2)$$

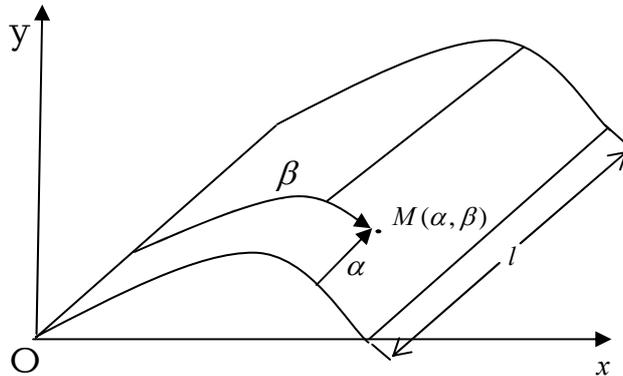
приведены приближенные значения безразмерной характеристики собственных частот и коэффициентов затухания соответствующих форм колебаний. Численный анализ показывает, что с увеличением кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки, также увеличиваются первые частоты собственных колебаний. С увеличением длины образующей все характеристики собственных колебаний стремятся к характеристикам собственных колебаний полубесконечной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки со свободным краем. При уменьшении кривизны направляющей кривой все характеристики собственных колебаний рассматриваемой задачи стремятся к характеристикам планарных колебаний аналогичной задачи для прямоугольной пластинки.

1. Постановка задачи и некоторые математические особенности.

Рассматриваются собственные колебания ортотропной безмоментной незамкнутой конечной цилиндрической оболочки $0 \leq \alpha \leq \ell$ переменной кривизны, у которой две граничные образующие и один край шарнирно закреплены, а другой край свободен. Выбор систем координат и возможные формы оболочки показаны на фиг. 1.

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют классической теории безмоментной ортотропной цилиндрической оболочки и записаны в криволинейных координатах $\alpha(0 \leq \alpha \leq \ell)$, $\beta(0 \leq \beta \leq s)$ [2]

$$\begin{aligned} & -B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + B_{12} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \lambda u_1 \\ & - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial w}{\partial \beta} = \lambda u_2 \\ & - \frac{B_{12}}{R^2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} w = \lambda w, \quad w = \frac{u_3}{R} \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки, $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$ – кривизна направляющей кривой.

$$\lambda = \omega^2 \rho \quad (1.2)$$

где ω – частота собственных колебаний, ρ – плотность материала. B_{ik} – коэффициенты упругости. Граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - w \right) \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - w \right) \right|_{\alpha=\ell} = 0, \quad u_2|_{\alpha=\ell} = 0 \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - w \right|_{\beta=0, s} = 0, \quad u_1|_{\beta=0, s} = 0 \quad (1.5)$$

где соотношения (1.3) являются условиями свободного края при $\alpha = 0$, условия (1.4), (1.5) являются условиями шарнирного закрепления на крае $\alpha = \ell$ и на образующих $\beta = 0, \beta = s$ соответственно [2].

Задача (1.1), (1.3)–(1.5) самосопряженная и имеет участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $[0, \lambda_0]$ – множеством значений функции

$$\Omega(\beta, \theta) = \frac{B_{66}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta}{B_{66}(B_{11}\sin^4\theta + B_{22}\cos^4\theta) + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta} \quad (1.6)$$

$$0 \leq \beta \leq s, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Отметим, что появление этого участка непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1.1) по Дуглису-Ниренбергу. Вне отрезка $[0, \lambda_0]$ для задачи (1.1), (1.3)–(1.5) выполняются условия дополнителности (условия Шапиро-Лопатинского) [3–4], [5]. Поэтому, в силу теоремы о нормальной разрешимости эллиптической краевой задачи приходим к следующему утверждению [5]: *вне множества $[0, \lambda_0]$ спектр задачи (1.1), (1.3)–(1.5) состоит из изолированных собственных значений конечной кратности.*

2. Вывод дисперсионного уравнения задачи (1.1), (1.3)–(1.5). Предположим, что квадрат кривизны направляющей кривой можно представить в виде следующего ряда:

$$R^{-2} = k^2 \left(r_0 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta \right) \quad (2.1)$$

$$0 \leq \beta \leq s, \quad k = \pi / s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty$$

Здесь s – полная длина направляющей кривой между шарнирно закрепленными образующими. Решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.5), ищем в виде

$$u_1 = \exp(k\chi\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{sm} \sin km\beta \right), u_2 = \exp(k\chi\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} V_{cm} \cos km\beta \right) \quad (2.2)$$

$$w = k \exp(k\chi\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} w_{sm} \sin km\beta \right)$$

Подставим выражения (2.2) в систему (1.1). Из первых двух уравнений (1.1), приравнявая соответствующие коэффициенты полученных тригонометрических рядов, получим

$$c_m u_{sm} = \chi a_m w_{sm}, \quad c_m V_{cm} = m b_m w_{sm}$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta, \quad \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}$$

$$b_m = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta$$

$$c_m = \chi^4 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m^4 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} m^2 \chi^2 + \quad (2.3)$$

$$+ \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 - \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 m^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^4, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

Из третьего уравнения системы (1.1), учитывая соотношения (2.3) и правило умножения тригонометрических рядов [6, стр. 592], придем к бесконечной системе уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r_{n-m} - r_{n+m}) A_m w_{sn} - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 w_{sm} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.4)$$

$$A_m = \frac{P_n}{c_n}, \quad P_n = c_n + n^2 b_n - \frac{B_{12}}{B_{22}} \chi^2 a_n, \quad n = \overline{1, +\infty} \quad (2.5)$$

Исходя из правила умножения тригонометрических рядов, условимся, что если $h \in N$, то $r_{-h} = r_h$. Так как в области определения A_n имеет $A_n = O(1/n^2)$, учитывая представление (2.1) и тот факт, что $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$, получим

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |A_n| (|r_{n+m}| + |r_{n-m}|) \leq 3 \left(\sum_{m=1}^{\infty} |r_m| \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \right) < +\infty \quad (2.6)$$

Следовательно, бесконечный определитель системы (2.4) при любых комплексных $\lambda \notin [0, \lambda_0]$ и χ в области определения коэффициентов (2.5) относится к известному классу сходящихся определителей, т. е. к нормальным определителям [7]. Чтобы система (2.4) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = 0 \quad (2.7)$$

Предположим, что χ_1, χ_2 – различные корни уравнения (2.7) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_3 = -\chi_1$ и $\chi_4 = -\chi_2$ также являются различными корнями уравнения (2.7). Пусть $(w_{s0}^j, w_{s1}^j, \dots, w_{sm}^j, \dots)$, $j = \overline{1, 4}$ являются нетривиальными решениями системы

(2.4) при χ_j , $j = \overline{1,4}$ соответственно.

Представим решение задачи (1.1),(1.3)-(1.5) в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^4 u_i^{(j)}, \quad i = \overline{1,2}, \quad w = \sum_{j=1}^4 w^{(j)} \quad (2.8)$$

где $u_i^{(j)}$, $w^{(j)}$, $i = \overline{1,2}, j = \overline{1,4}$ – решения системы (1.1), имеющие вид (2.2) при $\chi = \chi_j$, $j = \overline{1,4}$. Учитывая граничные условия (1.3), (1.4), приходим к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{ij}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_{sm}^{(j)} = 0, \quad i = \overline{1,4}, \quad m = \overline{1,+\infty} \quad (2.9)$$

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} m^2 b_m^j - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)}, \quad R_{2j}^{(m)} = \chi_j (a_m^{(j)} + b_m^{(j)}) \quad (2.10)$$

$$R_{3j} = R_{1j} \exp(k\chi_j \ell), \quad R_{4j} = b_m^{(j)} \exp(k\chi_j \ell), \quad j = \overline{1,4}, \quad m = \overline{1,+\infty}$$

а $a_m^{(j)}$, $b_m^{(j)}$, $c_m^{(j)}$ – значения a_m, b_m, c_m из (2.3) при $\chi = \chi_j$, $j = \overline{1,4}$ соответственно.

Чтобы система (2.9) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\text{Det} \left\| R_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^4 = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \quad (2.11)$$

вне множества $[0, \lambda_0]$ имела λ -решение.

Уравнения (2.11) эквивалентны уравнениям

$$H(\eta_m) = (x_2 - x_1) K_2(\eta_m^2, x_1 x_2) (1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + (x_1 + x_2) \tilde{K}_2(\eta_m^2, x_1 x_2) (\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \quad (2.12)$$

$$K_2(\eta_m^2, x_1 x_2) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4, \quad \eta_m = \eta / m$$

$$\tilde{K}_2(\eta_m^2, x_1 x_2) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 - \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4, \quad x_j = \chi_j / m$$

$$\delta_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad z_j = kmx_j \ell \quad (2.13)$$

$$\delta_2 = -\eta_m^2 \left(\frac{B_{22} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66} - B_{22} B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^2 \right)$$

$$\delta_3 = \frac{B_{12} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} \eta_m^2 (1 - \eta_m^2), \quad \delta_4 = \frac{B_{12} B_{66} (B_{12} + B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^4 (1 - \eta_m^2)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение: если $R^{-2}(\beta)$ можно представить в виде (2.1) и $\lambda \notin [0, \lambda_0]$, то уравнения (2.12) являются дисперсионными уравнениями задачи (1.1),(1.3)-(1.5), где $\chi_1 = mx_1$ и $\chi_2 = mx_2$ – различные корни уравнения (2.7) с неположительными действительными частями.

Замечание 1. Численный анализ уравнения (2.11) или (2.12) показывает, что значения правых частей этих уравнений становятся малыми числами, когда любые

два χ корня уравнения (2.7) становятся близкими друг к другу. Это усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Сделав элементарные действия над столбцами определителя в (2.11), уравнения (2.12) приводятся к эквивалентному виду

$$K_2(\eta_m^2, x_1, x_2)(1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + (m_{11}m_{22} + m_{21}m_{12})(\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) + 2m_{11}m_{21}[z_1, z_2](\exp(z_1) + \exp(z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.14)$$

где $K_2(\eta_m^2, x_1, x_2)$ определяется по формуле (2.13), а

$$\begin{aligned} m_{11} &= \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) x_1^2 + \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 (1 - \eta_m^2) \\ m_{12} &= \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) (x_1 + x_2) \\ m_{21} &= \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} x_1^3 + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2 x_1 \\ m_{22} &= \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2 \\ [z_1, z_2] &= (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1) \cdot km\ell \end{aligned} \quad (2.15)$$

Численный анализ показывает, что применение дисперсионных уравнений (2.14) более эффективно. Заметим, что если $\chi_1 = mx_1$ и $\chi_2 = mx_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $m\ell \rightarrow \infty$ уравнения (2.12) и (2.14) преобразуются к уравнениям

$$K_2(\eta_m^2, x_1, x_2) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.16)$$

которые являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной ортотропной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей со свободным краем, когда граничные образующие шарнирно закреплены.

3. Частные случаи. В общем случае решение уравнения (2.7) представляет собой сложную задачу. Поэтому рассмотрим следующие частные случаи.

Случай а) $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$ ($r_m = 0$, $m = \overline{1, +\infty}$), т. е. имеем круговую ортотропную безмоментную цилиндрическую оболочку открытого профиля. В этом случае система (2.4) принимает вид

$$\left\{ \left(r_0 A_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 \right) w_{sm} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \right. \quad (3.1)$$

Следовательно, уравнение (2.7) распадается на совокупность уравнений

$$r_0 P_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 c_m = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.2)$$

или уравнений

$$\begin{aligned}
& \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) x^4 - \eta_m^2 \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 + \right. \\
& \left. + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + B_{66}B_{22}}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) x^2 + \eta_m^2 (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{r_0}{2m^2} \right) = 0 \\
& x = \chi / m, \quad m = \overline{1, +\infty}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть $\lambda \notin [0, \lambda_0]$, $\chi_1 = mx_1$ и $\chi_2 = mx_2$ являются корнями уравнения (3.3) с неположительными действительными частями.

Так как уравнения (3.3) биквадраты, то однозначно определяются выражения $\chi_1^2 \chi_2^2$, $\chi_1^2 + \chi_2^2$. Подставляя эти выражения в (2.12), приходим к дисперсионным уравнениям для безмоментных ортотропных круговых цилиндрических оболочек открытого профиля, у которых две граничные образующие и один край шарнирно закреплены, а другой край свободен

$$(x_2 - x_1) K_2(\eta_m^2, r_0) (1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + (x_1 + x_2) \tilde{K}_2(\eta_m^2, r_0) (\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
K_2(\eta_m^2, r_0) &= (1 - \eta_m^2) \left[\left(1 + \frac{r_0}{2m^2} \right) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] - \\
&- x_1 x_2 \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) \\
\tilde{K}_2(\eta_m^2, r_0) &= (1 - \eta_m^2) \left[\left(1 + \frac{r_0}{2m^2} \right) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] + \\
&+ x_1 x_2 \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Заметим, что если $\chi_1 = mx_1$ и $\chi_2 = mx_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $m \ell \rightarrow \infty$ уравнения (3.4) преобразуются к уравнениям

$$\begin{aligned}
K_2(\eta_m^2, r_0) &= (1 - \eta_m^2) \left[\left(1 + \frac{r_0}{2m^2} \right) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] - \\
&- x_1 x_2 \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

которые при условии

$$\begin{aligned}
\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} < \frac{\eta^2}{m^2} < \min \left\{ 1, \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{66}(B_{11} + B_{66})} + \right. \\
& \left. + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + B_{22}B_{66}}{B_{66}(B_{11} + B_{66})} \frac{r_0}{2m^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

эквивалентны уравнениям

$$\left(1 - \frac{\eta^2}{m^2}\right) \left[\frac{\eta^2}{m^2} - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \left(1 + \frac{r_0}{2m^2}\right) \right]^2 - \frac{\eta^2}{m^2} \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{\eta^2}{m^2} + \right. \quad (3.8)$$

$$\left. + \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{r_0}{2m^2} \right) \left(\frac{\eta^2}{m^2} - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

Уравнения (3.6) или (3.8) являются дисперсионными уравнениями для безмоментной круговой ортотропной полубесконечной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным краем, когда граничные образующие шарнирно закреплены [8].

При $r_0 / m \rightarrow 0$ уравнения (3.3) преобразуются к уравнениям

$$x^4 - \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) x^2 + \quad (3.9)$$

$$+ (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

которые являются характеристическими уравнениями системы планарного колебания пластинки. Уравнения (3.4) в этом случае преобразуются к уравнениям

$$(x_2 - x_1) K_2(\eta_m^2) (1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + (x_1 + x_2) \tilde{K}_2(\eta_m^2) (\exp(2z_2) - \exp(2z_1)), \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.10)$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения (3.9) с неположительными действительными частями и

$$K_2(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 x_1 x_2 \quad (3.11)$$

$$\tilde{K}_2(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) + \eta_m^2 x_1 x_2$$

Уравнения (3.10) являются дисперсионными уравнениями пластинки, три стороны которой шарнирно закреплены, а четвертая сторона является свободной. Заметим, что в этом случае уравнения (2.14) преобразуются к виду

$$K_2(\eta_m^2) (1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + \frac{B_{11}(n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21})}{B_{12} + B_{66}} (\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) + \quad (3.12)$$

$$+ \frac{2B_{11}n_{11}n_{21}}{B_{12} + B_{66}} [z_1 z_2] (\exp(z_1) + \exp(z_2)) = 0 \quad m = \overline{1, +\infty}$$

$$n_{11} = x_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2), \quad n_{21} = x_1^3 + \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) x_1 \quad (3.13)$$

$$n_{12} = x_1 + x_2, \quad n_{22} = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2, \quad z_j = kmx_j \ell, \quad j = 1, 2$$

Заметим, что если x_1 и x_2 – корни уравнения (3.9) с отрицательными действительными частями, то при $m \ell \rightarrow \infty$ уравнения (3.10) или (3.12) преобразуются к уравнениям Рэлея для полубесконечной ортотропной пластинки-полосы

$$K(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.14)$$

Уравнения (3.14) при условии

$$0 < \frac{\eta^2}{m^2} < \min \left\{ 1, \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{66}(B_{11} + B_{66})} \right\}, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

эквивалентны уравнениям

$$\left(1 - \frac{\eta^2}{m^2} \right) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{\eta^2}{m^2} \right)^2 - \frac{\eta^4}{m^4} \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{\eta^2}{m^2} \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.15)$$

которые являются уравнениями Рэлея для полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным краем.

Случай б). $R^{-2} = k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$ ($r_m = 0$, $m = \overline{2, +\infty}$).

В этом случае система уравнений (2.4) принимает вид

$$\{r_1 P_{m-1} \omega_{sm-1} + r_{mm} \omega_{sm} + r_1 P_{m+1} \omega_{sm+1} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.16)$$

$$\omega_{sn} = w_{sn}/c_n, \quad r_{mn} = r_0 P_n - 2B_{66}/B_{22} \eta^2 c_n, \quad n = \overline{1, +\infty} \quad (3.17)$$

Так как определитель системы (3.16) относится к нормальному типу, то для нахождения ненулевого решения приравняем к нулю ее определитель:

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1) = 0 \quad (3.18)$$

Справедливо следующее утверждение [9]: при фиксированном $m \geq 2$ и при $\lambda \notin [0, \lambda_0]$ уравнение (3.18) имеет χ^2 -формальные решения вида

$$\chi_j^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_j^{(m)} r_1^4 + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (3.19)$$

где $\chi_j^{(m)}$, $j = 1, 2$, – корни уравнения (3.3) или $r_{mm} = 0$ и

$$\alpha_j^{(m)} = \frac{P_m (P_{m-1} r_{m+1m+1} + P_{m+1} r_{m-1m-1})}{r_{m-1m-1} r_{m+1m+1} r'_{mm}} \Big|_{\chi = \chi_j^{(m)}}, \quad j = 1, 2 \quad (3.20)$$

Здесь r'_{mm} – производная по χ^2 . Таким образом, в этом случае, для нахождения коэффициентов затухания $k\chi_j$, $j = 1, 2$ можно использовать приближенные формулы

$$\chi_j \approx - \left((\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 \right)^{1/2}, \quad j = 1, 2 \quad (3.21)$$

а для нахождения соответствующих характеристик собственных частот η/m – уравнения (2.12) или (2.14). Заметим, что в случае изотропной цилиндрической оболочки имеем

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1 - \sigma^2}, \quad B_{12} = \frac{\sigma E}{1 - \sigma^2}, \quad B_{66} = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (3.22)$$

где E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона [2].

В табл. 1-4, используя дисперсионные уравнения (2.14), (3.12), характеристические уравнения (3.3),(3.9) и приближенные формулы

$$\chi_j / m = -\left(\left(\chi_j^{(m)} / m\right)^2 + \alpha_j^m r_1^2 / m^2\right)^{1/2}, \quad j=1, 2 \quad (3.23)$$

приведены безразмерные характеристики собственных значений η/m и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм в зависимости от m, a, b для оболочек с направляющими (1). В качестве коэффициентов затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0 / m = \max\{k \operatorname{Re} \chi_1 / m, k \operatorname{Re} \chi_2 / m\} \quad (3.24)$$

В табл. 1,2,3,4 представлены результаты для ортотропных цилиндрических оболочек, изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами (2) и с геометрическими параметрами: $a=2, b=1, l=15, s=4.59117, r_0=0.13706, r_1=-0.05507$; $a=2, b=1, l=5, s=4.59117, r_0=0.13706, r_1=-0.05507$; $a=2, b=0.5, l=15, s=4.16092, r_0=0.04399, r_1=-0.0059$; $a=2, b=0.5, l=5, s=4.16092, r_0=0.04399, r_1=-0.0059$ соответственно.

Заключение. В статье показано, что у свободного края ортотропной незамкнутой цилиндрической оболочки, у которой две граничные образующие и один край шарнирно закреплены, и квадрат кривизны которой можно представить в виде (2.1), могут существовать локализованные колебания, затухающие от свободного края вдоль ее образующих. Частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки переменной кривизны определяются совокупностью уравнений (2.14). Следовательно, частоты собственных колебаний для круговой цилиндрической оболочки открытого профиля определяются уравнениями (2.14) или (3.4), а для прямоугольной пластинки – уравнениями (3.12). Численный анализ показывает, что у свободного края безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки, у которой две граничные образующие и один край шарнирно закреплены – могут существовать бесконечное число затухающих и незатухающих собственных колебаний. При больших m или при малой кривизне все характеристики собственных колебаний цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных колебаний прямоугольной пластинки. С увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки или длины цилиндрической оболочки первые частоты увеличиваются, а процесс затухания ослабевает.

Таблица 1

M	$R^{-2} = 0$	$R^{-2} = k^2 r_0 / 2$	$R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$
	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$
1	-0.0585 0.9563	-0.4990 0.9678	-0.0497 0.9680
2	-0.0447 0.9748	-0.0424 0.9772	-0.0424 0.9773
3	-0.0403 0.9796	-0.0393 0.9805	-0.0393 0.9806
4	-0.0386 0.9813	-0.0381 0.9817	-0.0381 0.9817
5	-0.0380 0.9818	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821
10	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9822
100	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821

Таблица 2

M	$R^{-2} = 0$	$R^{-2} = k^2 r_0 / 2$	$R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$
	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$
1	-0.1012 0.8615	-0.0805 0.9135	-0.0799 0.9147
2	-0.0708 0.9351	-0.0637 0.9476	-0.0658 0.9478
3	-0.0585 0.9563	-0.0546 0.9619	-0.0546 0.9620
4	-0.0517 0.9660	-0.0493 0.9691	-0.0492 0.9690
5	-0.0475 0.9714	-0.0458 0.9735	-0.0458 0.9740
10	-0.0395 0.9803	-0.0392 0.9810	-0.0391 0.9807
11	-0.0390 0.9809	-0.0387 0.9811	-0.0387 0.9811
12	-0.0386 0.9813	-0.0384 0.9814	-0.0384 0.9814
15	-0.0380 0.9818	-0.0379 0.9819	-0.0379 0.9819
100	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821

Таблица 3

M	$R^{-2} = 0$	$R^{-2} = k^2 r_0 / 2$	$R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$
	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$
1	-0.0618 0.9600	-0.0568 0.9661	-0.0568 0.9662
2	-0.0478 0.9763	-0.0464 0.9776	-0.0464 0.9777
3	-0.0437 0.9800	-0.0431 0.9808	-0.0431 0.9808
4	-0.0423 0.9815	-0.0420 0.9817	-0.0420 0.9818
5	-0.0418 0.9820	-0.0417 0.9821	-0.0417 0.9821
10	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821
100	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821

Таблица 4

M	$R^{-2} = 0$	$R^{-2} = k^2 r_0 / 2$	$R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$
	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$
1	-0.1060 0.8763	-0.9090 0.9103	-0.0905 0.9112
2	-0.0745 0.9412	-0.0685 0.9500	-0.0684 0.9507
3	-0.0618 0.9600	-0.0584 0.9640	-0.0584 0.9644
4	-0.0549 0.9686	-0.0528 0.9710	-0.0527 0.9711
5	-0.0507 0.9734	-0.0492 0.9749	-0.0491 0.9750
10	-0.0430 0.9809	-0.0423 0.9810	-0.0428 0.9811
11	-0.0426 0.9813	-0.0424 0.9815	-0.0424 0.9815
12	-0.0423 0.9816	-0.0421 0.9817	-0.0421 0.9817
15	-0.0418 0.9820	-0.0418 0.9820	-0.0418 0.9820
100	-0.0430 0.9821	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулгазрян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот цилиндрической оболочки с произвольной направляющей. // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. 12. С.161-163.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
3. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглисса-Л. Ниренберга // Изв. АН СССР. Математика. 1964. Т.28. 13. С. 665-706.
4. Солонников В.А. О матрицах Грина для эллиптических краевых задач // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1970. Т.110. 16. С. 107-145.
5. Гулгазрян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И. Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // Сибирский математич. ж., 1973. Т.4. 15. С. 978-986.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.3. М.: Физматгиз, 1963. 656с.
7. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 695с.
8. Гулгазрян Г.Р. Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободными краями // В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван, "Гитутюн", 2005. С. 173-179.
9. Гулгазрян Г.Р., Гулгазрян Л.Г. Колебания в консольной ортотропной гофрированной безмоментной цилиндрической оболочке// Математика в Высшей Школе, научно-методический сборник. Ереван. 2004. Вып. 3(9). С. 46-66.

Институт механики НАН Армении
Армпедуниверситет им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
7.06.2006