

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ ПО ФОРМЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК НА ЛИЦЕВЫХ
ПОВЕРХНОСТЯХ

Белубекян М.В., Мартиросян К.Л.

Ключевые слова: изгиб, плоскость, упругость, пластина, перемещение
Key words: bending, plane, elasticity, plate, displacement

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Զ.Լ. Մարտիրոսյան

Դիմային հարթությունների վրա շոշափող բեռի առկայության դեպքում սալի զանազան ծոման մասին

Աշխատանքում դիտարկված է դիմային հարթությունների վրա շոշափող բեռի դեպքում սալի ծոման խնդիրը: Խնդիրը լուծված է ինչպես առաձգականության տեսության ճշգրիտ հավասարումների հիման վրա, այնպես էլ մոտավոր հավասարումների հիման վրա, հաշվի առնելով ընդլայնական սահքերը: Կատարված է համեմատություն տեղափոխությունների միջև:

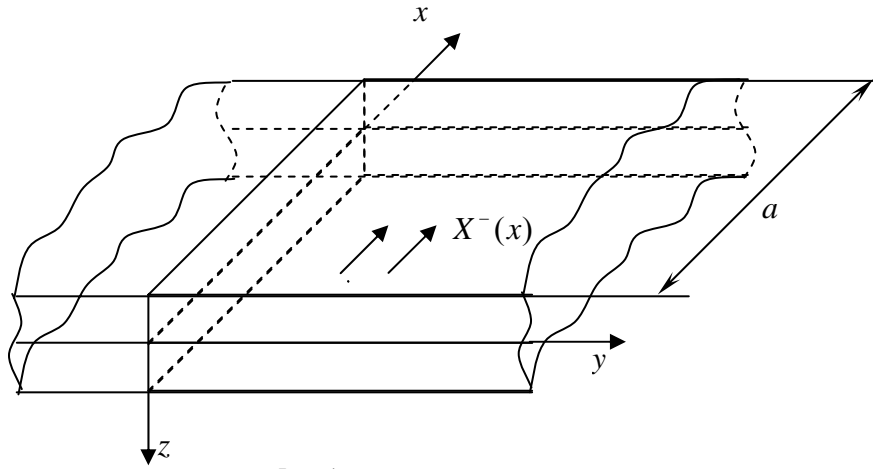
M.V. Belubekyan, Ch.L. Martirosyan

**On the problem of plate bending in the shape of cylindrical surface under the
action of tangential loads on the face planes**

In this work the problem of shell bending under the action of face planes tangential loads is considered. The problem is solved by using exact equations of theory of elasticity and approximate methods, taking into account the transversal shears. The comparison between displacements has done.

Цель статьи – на основе точного решения задачи плоской деформации для прямоугольной области при определённых граничных условиях частного вида на кромках и лицевых плоскостях пластинки получить характеристики области применимости гипотезы Киргофа и уточнённой теории.

1. В 1957 году Б.Ф. Власовым было получено точное решение пространственной задачи изгиба прямоугольной плиты, на четырёх кромках которого даны граничные условия типа Навье, при действии постоянной поперечной нагрузки [1]. Были приведены сравнения с результатами решения этой же задачи на основе теории Кирхгофа. В дальнейшем были получены и другие точные решения для пластин и оболочек. Обзор этих работ приводится в [2].



Фиг. 1

Пусть пластинка-полоса занимает область $0 \leq x \leq a$, $-\infty < y < \infty$, $-h \leq z \leq h$.

Уравнения равновесия в перемещениях в случае плоской деформации имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь U, W – перемещения, соответственно по направлениям x, z ; λ, μ – коэффициенты Ламе (фиг.1).

Предполагается, что на краях пластины заданы условия скользящего контакта

$$U = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad x = 0, a \quad (1.2)$$

а на лицевых поверхностях приложены только касательные нагрузки

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{zx}|_h = X^+(x) \quad \tau_{zx}|_{-h} = -X^-(x) \quad (1.3)$$

Решение системы уравнений вида

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(z) \sin \mu_m x, \quad W = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(z) \cos \mu_m x, \quad \mu_m = \frac{m\pi}{a} \quad (1.4)$$

удовлетворяет граничным условиям (1.2). Подстановка (1.4) в (1.1) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \mu f_m'' - (\lambda + 2\mu) \mu_m^2 f_m - (\lambda + \mu) \mu_m g_m' &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) g_m'' - \mu \mu_m^2 g_m + (\lambda + \mu) \mu_m f_m' &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Характеристическое уравнение системы (1.5) имеет кратные корни. Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} f_m &= A_{1m} e^{\mu_m z} + A_{2m} z e^{\mu_m z} + A_{3m} e^{-\mu_m z} + A_{4m} z e^{-\mu_m z} \\ g_m &= B_{1m} e^{\mu_m z} + B_{2m} z e^{\mu_m z} + B_{3m} e^{-\mu_m z} + B_{4m} z e^{-\mu_m z} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где произвольные постоянные B_{im} определяются через A_{im} следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{1m} &= -A_{1m} + k \mu_m^{-1} A_{2m}, \quad B_{2m} = -A_{2m} \\ B_{3m} &= A_{3m} + k \mu_m^{-1} A_{4m}, \quad B_{4m} = A_{4m} \end{aligned} \quad (1.7)$$

В (1.7) использовано обозначение

$$k = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu) \quad (k = 3 - 4\nu) \quad (1.8)$$

С помощью закона Гука и представлений граничные условия на лицевых плоскостях приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu)g_m' + \lambda\mu_m f_m &= 0 \\ f_m' - \mu_m g_m &= \pm \mu^{-1} \tau_m^\pm \end{aligned} \right\} \text{при } z = \pm h \quad (1.9)$$

где τ_m^\pm – коэффициенты ряда Фурье касательных нагрузок

$$X^\pm = \pm \sum_{m=1}^{\infty} \tau_m^\pm \sin \mu_m x \quad (1.10)$$

Требование, чтобы общее решение (1.6) удовлетворяло граничным условиям (1.9), приводит после некоторых преобразований к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_i :

$$\begin{aligned} &[-A_{1m} + \mu_m^{-1}(1 + \beta_2)A_{2m}]e^{\mu_m h} - [A_{3m} + \mu_m^{-1}(1 + \beta_1)A_{4m}]e^{-\mu_m h} = 0 \\ &[A_{1m} - \mu_m^{-1}\beta_2 A_{2m}]e^{\mu_m h} - [A_{3m} + \mu_m^{-1}\beta_1 A_{4m}]e^{-\mu_m h} = \frac{\tau_m^+}{2\mu\mu_m} \\ &[-A_{1m} + \mu_m^{-1}(1 + \beta_1)A_{2m}]e^{-\mu_m h} - [A_{3m} + \mu_m^{-1}(1 + \beta_2)A_{4m}]e^{\mu_m h} = 0 \\ &[A_{1m} - \mu_m^{-1}\beta_1 A_{2m}]e^{-\mu_m h} - [A_{3m} + \mu_m^{-1}\beta_2 A_{4m}]e^{\mu_m h} = -\frac{\tau_m^-}{2\mu\mu_m} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\beta_1 = \alpha + \mu_m h, \quad \beta_2 = \alpha - \mu_m h, \quad \alpha = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1 - 2\nu \quad (1.12)$$

Произвольные постоянные A_{im} из системы (1.1) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_{1m} &= \frac{L_1(\zeta_m)\tau_m^+ + L_2(\zeta_m)\tau_m^-}{4\mu\mu_m L(\zeta_m)} \quad \zeta_m = \mu_m h \\
A_{2m} &= \frac{L_3(\zeta_m)\tau_m^+ + L_4(\zeta_m)\tau_m^-}{4\mu L(\zeta_m)} \\
A_{3m} &= \frac{L_2(\zeta_m)\tau_m^+ + L_1(\zeta_m)\tau_m^-}{4\mu\mu_m L(\zeta_m)} \\
A_{4m} &= \frac{-L_4(\zeta_m)\tau_m^+ + L_3(\zeta_m)\tau_m^-}{4\mu L(\zeta_m)}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

В (1.13) операторы $L_i(\zeta_m)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
L(\zeta_m) &= e^{\zeta_m} (\text{sh}^2 2\zeta_m - 4\zeta_m^2) \\
L_1(\zeta_m) &= e^{2\zeta_m} (\text{sh} 2\zeta_m + \beta_2 \text{ch} 2\zeta_m) - \beta_1 (1 + 2\zeta_m) \\
L_2(\zeta_m) &= \text{sh} 2\zeta_m - \beta_1 \text{ch} 2\zeta_m + \beta_2 e^{2\zeta_m} (1 - 2\zeta_m) \\
L_3(\zeta_m) &= e^{2\zeta_m} \text{sh} 2\zeta_m - 2\zeta_m \\
L_4(\zeta_m) &= \text{sh} 2\zeta_m - 2\zeta_m e^{2\zeta_m}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

2. С учётом (1.4), (1.6), (1.13), (1.14), кроме перемещений U, W можно также определить осредненные по толщине напряжения σ_{xx} и усилие и момент в каждой точке x пластинки. Для сравнения с результатами приближённых теорий – теории Кирхгофа для тонких пластин и теорий, учитывающих поперечные сдвиги [3], – необходимо представить полученное решение в виде разложения по параметру относительной толщины $\zeta_m = \mu_m h$.

Оказывается, что для получения решения с точностью $o(\zeta_m^3)$ ($1 + \mu_m^3 h^3 \approx 1$), разложения функций $L_i(\zeta_m)$ необходимо брать с точностью $o(\zeta_m^7)$. Указанные разложения имеют вид

$$\begin{aligned}
L(\zeta_m) &= \frac{16}{3}\zeta_m^4 \left[1 + \zeta_m + \frac{31}{30}\zeta_m^2 \right] + o(\zeta_m^7) \\
L_1(\zeta_m) &= 4\zeta_m^2 \left[\alpha + \frac{1+4\alpha}{3}\zeta_m + \frac{4\alpha}{3}\zeta_m^2 - \frac{4}{15}(1-4\alpha)\zeta_m^3 - \frac{16}{45}(1-2\alpha)\zeta_m^4 \right] + o(\zeta_m^7) \\
L_2(\zeta_m) &= 4\zeta_m^2 \left[-\alpha + \frac{1-2\alpha}{3}\zeta_m + \frac{2}{3}(1-\alpha)\zeta_m^2 + \frac{2}{5}(1-\frac{2\alpha}{3})\zeta_m^3 + \frac{4}{15}(1-\frac{\alpha}{2})\zeta_m^4 \right] + o(\zeta_m^7) \\
L_3(\zeta_m) &= 4\zeta_m^2 \left[1 + \frac{4}{3}\zeta_m + \frac{4}{3}\zeta_m^2 + \frac{16}{15}\zeta_m^3 + \frac{32}{45}\zeta_m^4 \right] + o(\zeta_m^7) \\
L_4(\zeta_m) &= -4\zeta_m^2 \left[1 + \frac{2}{3}\zeta_m + \frac{2}{3}\zeta_m^2 + \frac{4}{15}\zeta_m^3 + \frac{2}{15}\zeta_m^4 \right] + o(\zeta_m^7)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть на лицевой поверхности пластинки $z = h$ задана касательная нагрузка $X^+(x)$ вида (1.10), а при $z = -h$ $X^-(x) \equiv 0$ ($\tau_m^- = 0$).

Тогда, согласно (1.4), перемещения U, W определяются величинами $f_m(0)$ и $g_m(0)$, которые из (1.6), (1.7) и (1.13) представляются в виде

$$\begin{aligned} f_m(0) &= A_{1m} + A_{3m} = \frac{L_1(\xi_m) + L_2(\xi_m)}{4\mu\mu_m L(\xi_m)} \tau_m^+ \\ g_m(0) &= B_{1m} + B_{3m} = -A_{1m} + A_{3m} + k\mu_m^{-1}(A_{2m} + A_{4m}) = \\ &= \frac{-L_1(\xi_m) + L_2(\xi_m) + k(L_3(\xi_m) - L_4(\xi_m))}{4\mu\mu_m L(\xi_m)} \tau_m^+ \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подстановка (2.1) в (2.2) приводит к приближенным формулам (с точностью $o(\zeta_m^3)$)

$$\begin{aligned} f_m(0) &= \frac{(1-\nu)\tau_m^+}{4\mu h \mu_m^2} \left[1 - \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \zeta_m^2\right] \\ g_m(0) &= \frac{\tau_m^+ h}{\mu_m^3 D} \left[1 - \frac{26-31\nu}{30(1-\nu)} \zeta_m^2\right], \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Приведенная задача рассматривается также на основе модели, учитывающей поперечные сдвиги в статье [4]. Уравнения, определяющие перемещения U_0, W_0 пластинки, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_0}{dx^2} + \frac{X^+}{C} + \frac{h}{12\mu} \frac{d^2 X^+}{dx^2} &= 0, \quad C = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \\ D \frac{d^4 W_0}{dx^4} &= h \frac{dX^+}{dx} + \frac{2h^3}{3(1-\nu)} \frac{d^3 X^+}{dx^3} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Граничные условия скользящего контакта (1.2) по модели работы [4] приводятся к виду

$$U_0 = -\frac{hX^+}{6\mu}, \quad \frac{dW_0}{dx} = \frac{X^+}{2\mu}, \quad \frac{d^3 W_0}{dx^3} - \frac{1}{2\mu} \frac{d^2 X^+}{dx^2} = \frac{hX^+}{D} \quad (2.5)$$

Решение уравнений (2.4), удовлетворяющих граничным условиям (2.5), с учётом (1.10) представляются следующим образом:

$$U_0 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^0 \sin \mu_m x, \quad W_0 = \sum_{m=1}^{\infty} g_m^0 \cos \mu_m x \quad (2.6)$$

После подстановки (2.6) в (2.4) величины, характеризующие перемещения точек пластины U_0, W_0 , определяются по формулам

$$f_m^0 = \frac{(1-\nu)\tau_m^+}{4\mu h\mu_m^2} \left(1 - \frac{\zeta_m^2}{3}\right), \quad g_m^0 = \frac{\tau_m^+ h}{\mu_m^3 D} \left[1 - \frac{2\zeta_m^2}{3(1-\nu)}\right] \quad (2.7)$$

Выражения (2.3) и (2.7), полученные на основе точного решения и приближенной модели с точностью $\zeta_m^2 \ll 1$, совпадают. Одновременно из (2.7) следует, что как в (2.3), учет поперечного сдвига приводит к уменьшению как продольного перемещения $U(U_0)$, так и прогиба $W(W_0)$.

3. В общем случае величины $f_m(0)$, $g_m(0)$, характеризующие перемещения точек пластины, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} f_m(0) &= \frac{L_1(\zeta_m) + L_2(\zeta_m)}{4\mu\mu_m L(\zeta_m)} (\tau_m^+ + \tau_m^-) \\ g_m(0) &= \frac{L_2(\zeta_m) - L_1(\zeta_m) + k[L_3(\zeta_m) - L_4(\zeta_m)]}{4\mu\mu_m L(\zeta_m)} (\tau_m^+ - \tau_m^-) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Отсюда, в частности, следует, что если нагрузки на лицевых поверхностях удовлетворяют условию

$$X^+ = X^- \quad (\tau_m^+ = -\tau_m^-) \quad (3.2)$$

то $f_m(0) = 0$. То есть продольные перемещения срединной поверхности пластинки отсутствуют ($U = 0$). Изгиб пластинки будет определяться величинами $g_m(0)$, которые с точностью $o(\zeta_m^3)$,

$$g_m(0) = \frac{\tau_m^+ h}{\mu_m^3 D} \left[1 - \frac{26 - 31\nu}{30(1-\nu)} \zeta_m^2\right] \quad (3.3)$$

Аналогично, в случае

$$X^- = -X^+ \quad (\tau_m^- = \tau_m^+) \quad (3.4)$$

срединная поверхность пластинки не будет изгибаться, а продольное перемещение с точностью $o(\zeta_m^3)$ будет определяться по формуле

$$f_m(0) = \frac{(1-\nu)\tau_m^+}{4\mu h\mu_m^2} \left[1 - \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \zeta_m^2\right] \quad (3.5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты. // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. 1957. N2. С. 25-34.
2. Soldatos K.P. Review of three dimensional dynamic analyses of circular cylinders and cylindrical shells. // Appl. Mech. Rev. 1994. Vol. 47. N10. P. 501.

3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М. : Наука, 1987. 360 с.
4. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Тонкая пластинка при действии поверхностной касательной нагрузки. // Изв. НАН Армении и Гос. инж. универс., серия технических наук. 1999. Т. 52. N3. С. 273-278.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.08.2006