

УДК 539.3.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Азатян Г.Л.

Ключевые слова: вязкое сопротивление, вынужденные колебания, упругость, анизотропия, резонанс, амплитуда, асимптотический метод.

Keywords: viscous resistance, forced vibrations, elasticity, anisotropic, resonance, asymptotic method, amplitude.

Գ. Լ. Ազատյան

Օրթոտրոպ սալի հարկադրական տատանումները մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է օրթոտրոպ սալի հարկադրական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ սալում առկա է մածուցիկ դիմադրություն: Դիմալին նիստերից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուս նիստի վրա ազդում է ժամանակի ընթացքում հարմոնիկ ձևով փոփոխվող բեռ: Հաստատված է լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկական, կառուցված է իտերացիոն պրոցես անհայտ մեծությունները որոշելու համար: Որոշված են տատանման ամպլիտուդները, մասնավոր դասի խնդիրների համար ստացված են փակ լուծումներ: Նշված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները:

G.L. Azatyan

The Forced Vibrations of Orthotropic Plate in the Presence of Viscous Resistance

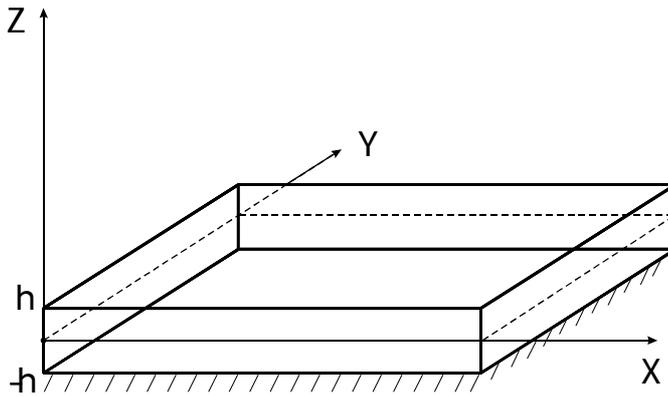
The three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on forced vibrations of orthotropic plate in the presence of viscous resistance was solved. The asymptotic form of the stress tensor components and displacement vector are found. An iterative process for determination of sought quantities is developed. The resonance arising conditions are determined. The closed solution for particular type of problems is found.

Решена трехмерная динамическая задача теории упругости о вынужденных колебаниях ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления. Нижняя грань пластинки жестко закреплена, а на верхней приложены гармонически изменяющиеся напряжения. Найдены асимптотики для компонент тензора напряжений и вектора перемещения. Построен итерационный процесс для определения искоемых величин. Установлены условия возникновения резонанса. Для частного типа задач получено замкнутое решение.

1. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел в последние десятилетия широко используется асимптотический метод. Статические краевые задачи изотропных и анизотропных тонких тел асимптотическим методом рассмотрены в [1,2]. Для решения неклассических краевых задач этот метод оказался особенно эффективным [2]. Асимптотический метод также эффективен для решения динамических задач, в частности, для определения решений о собственных и вынужденных колебаниях балок и пластин

[3-9]. Собственные колебания однослойной, двухслойной и трёхслойной ортотропных пластинок рассмотрены в [6-8].

В работе рассматривается задача о вынужденных колебаниях ортотропной пластинки $D = \{(x, y, z): (x, y) \in D_0, -h \leq z \leq h, h \ll l\}$ при наличии вязкого сопротивления (фиг.1).



Фиг. 1

D_0 – срединная поверхность пластинки, l – ее характерный тангенциальный размер.

Имеем следующие граничные условия:

$$u = v = w = 0 \text{ при } z = -h \quad (1.1)$$

$$\sigma_{xz}(z = h) = \tau_{xz}^+(\xi, \eta) \sin \Omega t$$

$$\sigma_{yz}(z = h) = \tau_{yz}^+(\xi, \eta) \sin \Omega t \quad (1.2)$$

$$\sigma_{zz}(z = h) = \tau_{zz}^+(\xi, \eta) \sin \Omega t$$

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l$$

Требуется найти ненулевое решение системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела для ортотропных сред:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - k_1 \frac{\partial u}{\partial t} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x, y, z; u, v, w) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11} \sigma_{xx} + a_{12} \sigma_{yy} + a_{13} \sigma_{zz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66} \sigma_{xy} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12} \sigma_{xx} + a_{22} \sigma_{yy} + a_{23} \sigma_{zz}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{55} \sigma_{xz} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= a_{13} \sigma_{xx} + a_{23} \sigma_{yy} + a_{33} \sigma_{zz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (1.3)$$

при граничных условиях (1.1),(1.2), где $\vec{R} = -k_1 \vec{V}$ – вязкое сопротивление.

Для этого класса задач граничными условиями на боковой поверхности обусловлено появление динамического пограничного слоя. Эти условия не влияют на решение внутренней задачи [3,5], поэтому их конкретизировать не будем.

2. Решение системы уравнений (1.3) при граничных условиях (1.1) и (1.2) будем искать в виде:

$$Q(x, y, z, t) = Q_I(x, y, z) \sin \Omega t + Q_{II}(x, y, z) \cos \Omega t \quad (2.1)$$

где Q – любое из напряжений и перемещений, Ω – частота вынуждающего воздействия.

Затем перейдем к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\begin{aligned} \xi &= x/l, & \eta &= y/l, & \zeta &= z/h \\ U_I &= u_I/l, & V_I &= v_I/l, & W_I &= w_I/l \quad (\text{I, II}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставив (2.1) в преобразованные уравнения (1.3), получим следующую сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xxI}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xyI}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xzI}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 U_I + 2K \varepsilon^{-2} \Omega_* U_{II} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xxII}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xyII}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xzII}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 U_{II} - 2K \varepsilon^{-2} \Omega_* U_I &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xyI}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yyI}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yzI}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 V_I + 2K \varepsilon^{-2} \Omega_* V_{II} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xyII}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yyII}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yzII}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 V_{II} - 2K \varepsilon^{-2} \Omega_* V_I &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xzI}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yzI}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zzI}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 W_I + 2K \varepsilon^{-2} \Omega_* W_{II} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xzII}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yzII}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zzII}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 W_{II} - 2K \varepsilon^{-2} \Omega_* W_I &= 0 \\ \frac{\partial U_I}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{xxI} + a_{12} \sigma_{yyI} + a_{13} \sigma_{zzI}, \quad \frac{\partial U_I}{\partial \eta} + \frac{\partial V_I}{\partial \xi} = a_{66} \sigma_{xyI} \\ \frac{\partial V_I}{\partial \eta} &= a_{12} \sigma_{xxI} + a_{22} \sigma_{yyI} + a_{23} \sigma_{zzI}, \quad \frac{\partial W_I}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_I}{\partial \zeta} = a_{55} \sigma_{xzI}, \quad (\text{I, II}) \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial W_I}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{xxI} + a_{23} \sigma_{yyI} + a_{33} \sigma_{zzI}, \quad \frac{\partial W_I}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_I}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{yzI} \\ \Omega_*^2 &= \rho h^2 \Omega^2, \quad 2K = \frac{k_1 h}{\sqrt{\rho}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение этой сингулярно-возмущенной системы будем искать в виде следующего асимптотического разложения:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta j} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{\alpha\beta j}^{(s)}, \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad s = \overline{0, N} \\ (U_j, V_j, W_j) &= \varepsilon^s (U_j^{(s)}, V_j^{(s)}, W_j^{(s)}), \quad j = I, II\end{aligned}\quad (2.4)$$

Обозначение $s = \overline{0, N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование от 0 до числа приближений N .

Подставив (2.4) в (2.3), получим рекуррентную систему для определения $\sigma_{\alpha\beta j}$, U_j, V_j, W_j . В этой системе все $\sigma_{\alpha\beta j}^{(s)}$ можно выразить через $U_j^{(s)}, V_j^{(s)}, W_j^{(s)}$ по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_{xj}^{(s)} &= -A_{23} \frac{\partial W_j^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{22} \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12} \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \\ \sigma_{yj}^{(s)} &= -A_{13} \frac{\partial W_j^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33} \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \\ \sigma_{zj}^{(s)} &= A_{11} \frac{\partial W_j^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13} \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \\ \sigma_{xyj}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left[\frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad \sigma_{xzj}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[\frac{\partial U_j^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_j^{(s-1)}}{\partial \xi} \right] \\ \sigma_{yzj}^{(s)} &= \frac{1}{a_{44}} \left[\frac{\partial V_j^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad j = I, II\end{aligned}\quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned}A_{11} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta}, \quad A_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{\Delta}, \quad A_{33} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{\Delta} \\ A_{12} &= \frac{a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23}}{\Delta}, \quad A_{13} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{\Delta}, \quad A_{23} = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{\Delta} \\ \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{22}a_{13}^2 - a_{11}a_{23}^2 - a_{33}a_{12}^2\end{aligned}$$

Для определения функций $U_I^{(s)}, V_I^{(s)}, W_I^{(s)}$, (I, II) получаются уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \left((\Omega_*)^2 U_I^{(s)} + 2K\Omega_* U_{II}^{(s)} \right) &= R_{U_I}^{(s)} \\ \frac{\partial^2 U_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \left((\Omega_*)^2 U_{II}^{(s)} - 2K\Omega_* U_I^{(s)} \right) &= R_{U_{II}}^{(s)} \\ \frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \left((\Omega_*)^2 V_I^{(s)} + 2K\Omega_* V_{II}^{(s)} \right) &= R_{V_I}^{(s)} \\ \frac{\partial^2 V_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \left((\Omega_*)^2 V_{II}^{(s)} - 2K\Omega_* V_I^{(s)} \right) &= R_{V_{II}}^{(s)}\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 W_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + (\Omega_*)^2 W_1^{(s)} + 2K\Omega_* W_{II}^{(s)} = R_{W1}^{(s)}$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 W_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + (\Omega_*)^2 W_{II}^{(s)} - 2K\Omega_* W_1^{(s)} = R_{WII}^{(s)}$$

где

$$R_{U_j}^{(s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55} \left[\frac{\partial \sigma_{xj}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xyj}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right]$$

$$R_{V_j}^{(s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44} \left[\frac{\partial \sigma_{xyj}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yzj}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right] \quad (2.7)$$

$$R_{W_j}^{(s)} = A_{23} \frac{\partial^2 U_j^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13} \frac{\partial^2 V_j^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{xzj}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{yzj}^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad j = I, II$$

Очевидно, что $R_{U1}^{(0)} = R_{V1}^{(0)} = R_{W1}^{(0)} = 0; (I, II)$.

Из (2.6) следуют

$$U_{II}^{(s)} = -\frac{1}{2K\Omega_* a_{55}} \left(\frac{\partial^2 U_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\Omega_*)^2 U_1^{(s)} - R_{U1}^{(s)} \right)$$

$$V_{II}^{(s)} = -\frac{1}{2K\Omega_* a_{44}} \left(\frac{\partial^2 V_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} (\Omega_*)^2 V_1^{(s)} - R_{V1}^{(s)} \right) \quad (2.8)$$

$$W_{II}^{(s)} = -\frac{1}{2K\Omega_*} \left(A_{11} \frac{\partial^2 W_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + (\Omega_*)^2 W_1^{(s)} - R_{W1}^{(s)} \right)$$

а также уравнения

$$\frac{\partial^4 U_1^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{55} (\Omega_*)^2 \frac{\partial^2 U_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^2 ((\Omega_*)^2 + 4K^2) (\Omega_*)^2 U_1^{(s)} =$$

$$= \frac{\partial^2 R_{U1}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\Omega_*)^2 R_{U1}^{(s)} - 2Ka_{55} \Omega_* R_{U11}^{(s)}$$

$$\frac{\partial^4 V_1^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{44} (\Omega_*)^2 \frac{\partial^2 V_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^2 ((\Omega_*)^2 + 4K^2) (\Omega_*)^2 V_1^{(s)} =$$

$$= \frac{\partial^2 R_{V1}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} (\Omega_*)^2 R_{V1}^{(s)} - 2Ka_{44} \Omega_* R_{V11}^{(s)} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^4 W_1^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2 \frac{(\Omega_*)^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 W_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{A_{11}^2} ((\Omega_*)^2 + 4K^2) (\Omega_*)^2 W_1^{(s)} =$$

$$= \frac{1}{A_{11}} \frac{\partial^2 R_{W1}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{(\Omega_*)^2}{A_{11}^2} R_{W1}^{(s)} - \frac{2K\Omega_*}{A_{11}^2} R_{W11}^{(s)}$$

Решениями уравнений (2.9) являются:

$$U_I^{(s)} = U_{I_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_{I_y}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (U, V, W) \quad (2.10)$$

где величины с индексом "o" – решения однородных, а с индексом "y" – частные решения неоднородных уравнений (2.9).

Решениями однородных уравнений являются:

$$\begin{aligned} U_{I_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) &= C_{U_1}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{1U} + C_{U_2}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{2U} + C_{U_3}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{3U} + C_{U_4}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{4U} \\ V_{I_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) &= C_{V_1}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{1V} + C_{V_2}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{2V} + C_{V_3}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{3V} + C_{V_4}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{4V} \\ W_{I_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) &= C_{W_1}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{1W} + C_{W_2}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{2W} + C_{W_3}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{3W} + C_{W_4}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{4W} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{1U} &= \operatorname{ch} \gamma_U \zeta \cos \delta_U \zeta, \quad \varphi_{2U} = \operatorname{sh} \gamma_U \zeta \sin \delta_U \zeta \\ \varphi_{3U} &= \operatorname{ch} \gamma_U \zeta \sin \delta_U \zeta, \quad \varphi_{4U} = \operatorname{sh} \gamma_U \zeta \cos \delta_U \zeta \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\gamma_U = \sqrt{\frac{a_{55}\Omega_*}{2} \left(\sqrt{(\Omega_*)^2 + 4K^2} - \Omega_* \right)}, \quad \delta_U = \sqrt{\frac{a_{55}\Omega_*}{2} \left(\sqrt{(\Omega_*)^2 + 4K^2} + \Omega_* \right)}$$

$$(U, V, W, a_{55}, a_{44}, 1/A_{11})$$

Одновременно имеем

$$U_{II}^{(s)} = U_{II_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_{II_y}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (U, V, W) \quad (2.13)$$

$$U_{II_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = -C_{U_1}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{2U} + C_{U_2}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{1U} + C_{U_3}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{4U} - C_{U_4}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{3U} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xzI}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left[C_{U_1}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + C_{U_2}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + \right. \\ &\quad \left. + C_{U_3}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) + C_{U_4}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) \right] + \sigma_{xzIy}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xzII}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left[-C_{U_1}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + C_{U_2}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + \right. \\ &\quad \left. + C_{U_3}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) - C_{U_4}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) \right] + \sigma_{xzIIy}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ &\quad (x, y, z, U, V, W, a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}) \end{aligned}$$

где

$$U_{II_y}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2K\Omega_*a_{55}} \left(\frac{\partial^2 U_{Iy}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}(\Omega_*)^2 U_{Iy}^{(s)} - R_{U1}^{(s)} \right) \quad (2.16)$$

$$\sigma_{xzIy}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[\frac{\partial U_{Iy}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_1^{(s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad (I, II)$$

3. Удовлетворив граничным условиям (1.1) и (1.2), получим три алгебраические системы относительно неизвестных функций

$C_{U_i}^{(s)}(\xi, \eta)$, $C_{V_i}^{(s)}(\xi, \eta)$, $C_{W_i}^{(s)}(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} C_{U_1}^{(s)}\varphi_{1U}(\zeta=-1) + C_{U_2}^{(s)}\varphi_{2U}(\zeta=-1) + C_{U_3}^{(s)}\varphi_{3U}(\zeta=-1) + C_{U_4}^{(s)}\varphi_{4U}(\zeta=-1) &= -U_{Iy}^{(s)}(\zeta=-1) \\ -C_{U_1}^{(s)}\varphi_{2U}(\zeta=-1) + C_{U_2}^{(s)}\varphi_{1U}(\zeta=-1) + C_{U_3}^{(s)}\varphi_{4U}(\zeta=-1) - C_{U_4}^{(s)}\varphi_{3U}(\zeta=-1) &= -U_{IIy}^{(s)}(\zeta=-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) + \right. \\
& \quad \left. + C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) \right] (\zeta = 1) = a_{55} \left[\sigma_{xz1}^{+(s)} - \sigma_{xz4l}^{(s)} (\zeta = 1) \right] \\
& \left[-C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) - \right. \\
& \quad \left. - C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) \right] (\zeta = 1) = -a_{55} \sigma_{xz4l}^{(s)} (\zeta = 1) \\
& \quad (U, V, W; x, y, z)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz1}^{+(0)} &= \varepsilon \tau_{xz}^+, \quad \sigma_{yz1}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{yz}^+, \quad \sigma_{zz1}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{zz}^+ \\
\sigma_{xz1}^{+(s)} &= 0, \quad \sigma_{yz1}^{+(s)} = 0, \quad \sigma_{zz1}^{+(s)} = 0, \quad s > 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Решив систему (3.1) и подставив значения $C_{Ui}^{(s)}(\xi, \eta)$, $C_{Vi}^{(s)}(\xi, \eta)$, $C_{Wi}^{(s)}(\xi, \eta)$ в (2.13), получим:

$$\begin{aligned}
U_I^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_U} \left[f_{U1}^{(s)} \varphi_{1U} + f_{U2}^{(s)} \varphi_{2U} + f_{U3}^{(s)} \varphi_{3U} + f_{U4}^{(s)} \varphi_{4U} \right] + U_{I4}^{(k,s)} \\
U_{II}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_U} \left[f_{U2}^{(s)} \varphi_{1U} - f_{U1}^{(s)} \varphi_{2U} - f_{U4}^{(s)} \varphi_{3U} + f_{U3}^{(s)} \varphi_{4U} \right] + U_{II4}^{(k,s)} \\
& (U, V, W)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $f_{Ui}^{(s)}(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, 3, 4$ получаются из определителя Δ_U системы (3.1) заменой соответственных столбцов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_U = -\frac{1}{2} (\gamma_U^2 + \delta_U^2) (\text{ch}[4\gamma_U] + \cos[4\delta_U]), \quad (U, V, W) \tag{3.4}$$

Решения (3.3) будут конечными, если

$$\Delta_U \neq 0, \quad \Delta_V \neq 0, \quad \Delta_W \neq 0 \tag{3.5}$$

Условия (3.5) будут выполнены, если Ω не является частотой собственных колебаний [4], в противном случае будет возникать резонанс. Можно определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной асимптотической точностью.

4. Рассмотрим частный случай, пусть:

$$\tau_{xz}^+(\xi, \eta) = \text{const}, \quad \tau_{yz}^+(\xi, \eta) = \text{const}, \quad \tau_{zz}^+(\xi, \eta) = \text{const} \tag{4.1}$$

При $s=0$ будем иметь:

$$\begin{aligned}
U_I^{(0)} &= \frac{1}{\Delta_U} \left[f_{U1}^{(0)} \varphi_{1U} + f_{U2}^{(0)} \varphi_{2U} + f_{U3}^{(0)} \varphi_{3U} + f_{U4}^{(0)} \varphi_{4U} \right] \\
U_{II}^{(0)} &= \frac{1}{\Delta_U} \left[f_{U2}^{(0)} \varphi_{1U} - f_{U1}^{(0)} \varphi_{2U} - f_{U4}^{(0)} \varphi_{3U} + f_{U3}^{(0)} \varphi_{4U} \right] \\
\sigma_{xz1}^{(0)} &= \frac{1}{a_{55} \Delta_U} \left[f_{U1}^{(0)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + f_{U2}^{(0)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + \right. \\
& \quad \left. + f_{U3}^{(0)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) + f_{U4}^{(0)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xzII}^{(0)} = & \frac{1}{a_{55}\Delta_U} \left[-f_{U1}^{(0)} (\gamma_U \Phi_{3U} + \delta_U \Phi_{4U}) + f_{U2}^{(0)} (\gamma_U \Phi_{4U} - \delta_U \Phi_{3U}) + \right. \\ & \left. + f_{U3}^{(0)} (\gamma_U \Phi_{1U} - \delta_U \Phi_{2U}) - f_{U4}^{(0)} (\gamma_U \Phi_{2U} + \delta_U \Phi_{1U}) \right] \\ & (U, V, W; \sigma_{xz}^{(0)}, \sigma_{yz}^{(0)}, \sigma_{zz}^{(0)}; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xxI}^{(0)} = & -\frac{A_{23}}{\Delta_W} \left[f_{W1}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{4W} - \delta_W \Phi_{3W}) + f_{W2}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{3W} + \delta_W \Phi_{4W}) + \right. \\ & \left. + f_{W3}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{2W} + \delta_W \Phi_{1W}) + f_{W4}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{1W} - \delta_W \Phi_{2W}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xxII}^{(0)} = & -\frac{A_{23}}{\Delta_W} \left[f_{W1}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{3W} - \delta_W \Phi_{4W}) + f_{W2}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{4W} - \delta_W \Phi_{3W}) + \right. \\ & \left. + f_{W3}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{1W} + \delta_W \Phi_{2W}) - f_{W4}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{2W} - \delta_W \Phi_{1W}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yyI}^{(0)} = & -\frac{A_{13}}{\Delta_W} \left[f_{W1}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{4W} - \delta_W \Phi_{3W}) + f_{W2}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{3W} + \delta_W \Phi_{4W}) + \right. \\ & \left. + f_{W3}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{2W} + \delta_W \Phi_{1W}) + f_{W4}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{1W} - \delta_W \Phi_{2W}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yyII}^{(0)} = & -\frac{A_{13}}{\Delta_W} \left[-f_{W1}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{3W} + \delta_W \Phi_{4W}) + f_{W2}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{4W} - \delta_W \Phi_{3W}) + \right. \\ & \left. + f_{W3}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{1W} - \delta_W \Phi_{2W}) - f_{W4}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{2W} + \delta_W \Phi_{1W}) \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_{xyI}^{(0)} = \sigma_{xyII}^{(0)} = 0$$

где

$$f_{U1}^{(0)} = \frac{a_{55}\sigma_{xzI}^{+(0)}}{2} (\delta_U \operatorname{ch} 3\gamma_U \sin \delta_U - \delta_U \operatorname{ch} \gamma_U \sin 3\delta_U + \gamma_U \operatorname{sh} \gamma_U \cos 3\delta_U - \gamma_U \operatorname{sh} 3\gamma_U \cos \delta_U)$$

$$f_{U2}^{(0)} = \frac{a_{55}\sigma_{xzI}^{+(0)}}{2} (-\gamma_U \operatorname{ch} 3\gamma_U \sin \delta_U + \gamma_U \operatorname{ch} \gamma_U \sin 3\delta_U + \delta_U \operatorname{sh} \gamma_U \cos 3\delta_U - \delta_U \operatorname{sh} 3\gamma_U \cos \delta_U)$$

$$f_{U3}^{(0)} = -\frac{a_{55}\sigma_{xzI}^{+(0)}}{2} (\delta_U \operatorname{ch} \gamma_U \cos 3\delta_U + \delta_U \operatorname{ch} 3\gamma_U \cos \delta_U + \gamma_U \operatorname{sh} \gamma_U \sin 3\delta_U + \gamma_U \operatorname{sh} 3\gamma_U \sin \delta_U)$$

$$f_{U4}^{(0)} = \frac{a_{55}\sigma_{xzI}^{+(0)}}{2} (-\gamma_U \operatorname{ch} \gamma_U \cos 3\delta_U - \gamma_U \operatorname{ch} 3\gamma_U \cos \delta_U + \delta_U \operatorname{sh} \gamma_U \sin 3\delta_U + \delta_U \operatorname{sh} 3\gamma_U \sin \delta_U)$$

$$(U, V, W; \sigma_{xzI}^{+(0)}, \sigma_{yzI}^{+(0)}, \sigma_{zzI}^{+(0)}; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}) \quad (4.3)$$

$$\sigma_{xzI}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{xz}^+, \quad \sigma_{yzI}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{yz}^+, \quad \sigma_{zzI}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{zz}^+$$

Несложно убедиться, что при $s > 0$

$$U_I^{(s)} = V_I^{(s)} = W_I^{(s)} = 0 \quad (4.4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta I}^{(s)} = 0, \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad (I, II)$$

поэтому приближению $s = 0$ соответствует точное решение

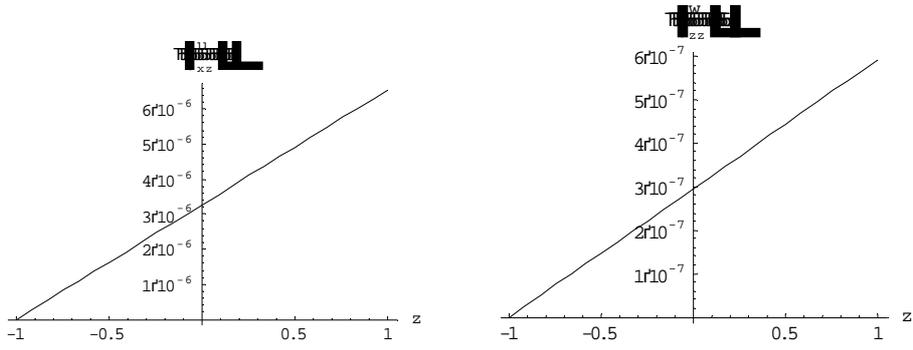
$$u = l(U_I^{(0)} \sin \Omega t + U_{II}^{(0)} \cos \Omega t)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-1} \left(\sigma_{\alpha\beta I}^{(0)} \sin \Omega t + \sigma_{\alpha\beta II}^{(0)} \cos \Omega t \right) \quad (4.5)$$

$$(u, v, w; U, V, W), \alpha, \beta = x, y, z;$$

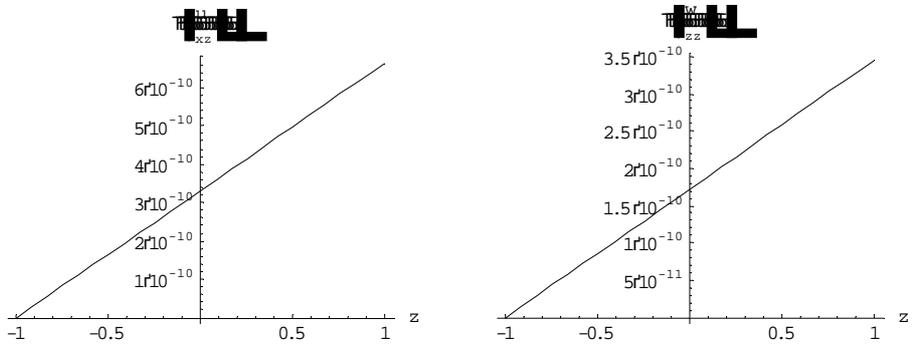
В качестве иллюстрации приведем некоторые численные и графические результаты. Рассмотрим пластинку, состоящую из резины ($E=6.96410^5$ Па, $G=2.4410^5$ Па, $\rho=1100$ кг/м³), стеклопластика АСТТ и СВМ, характеристики упругости которых приведены в [2] или бетона ($E=3.0262410^{10}$ Па, $G=1.0435410^{10}$ Па, $\rho=2300$ кг/м³) с толщиной $h=1$ м. Графики амплитуд колебаний по толщине пластинки соответственно приведены на фиг. 2-5.

Резина



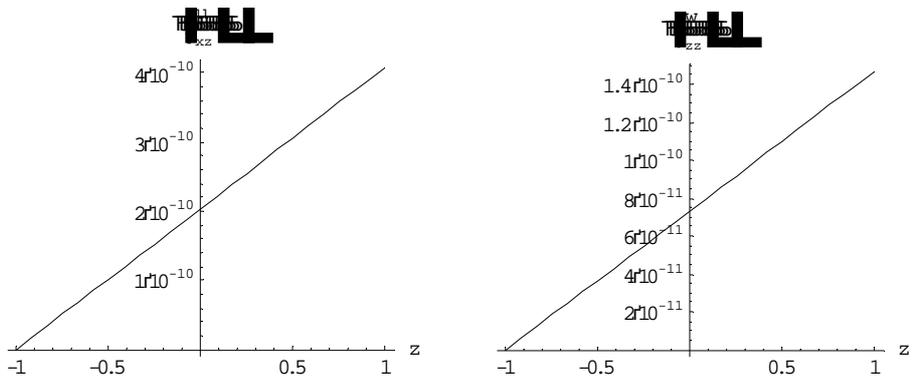
Фиг.2.

АСТТ



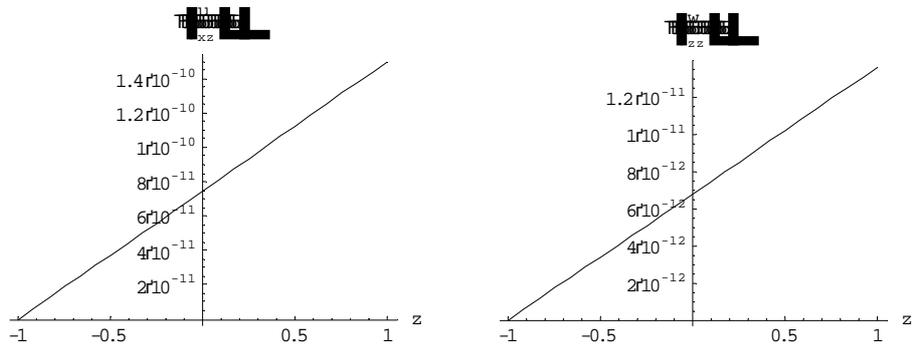
Фиг.3.

СВАМ



Фиг.4.

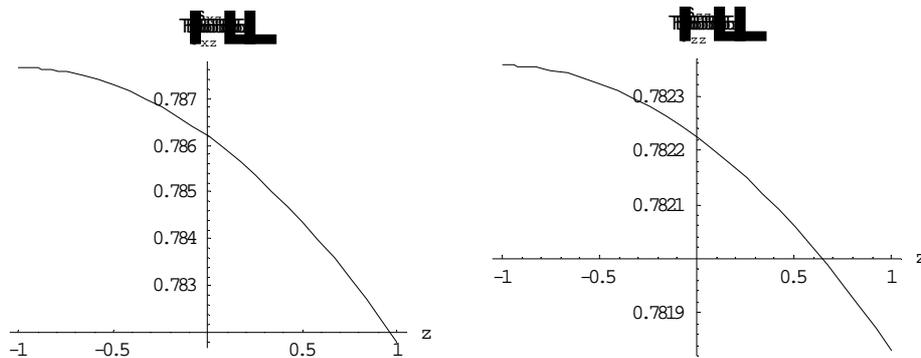
Бетон



Фиг.5.

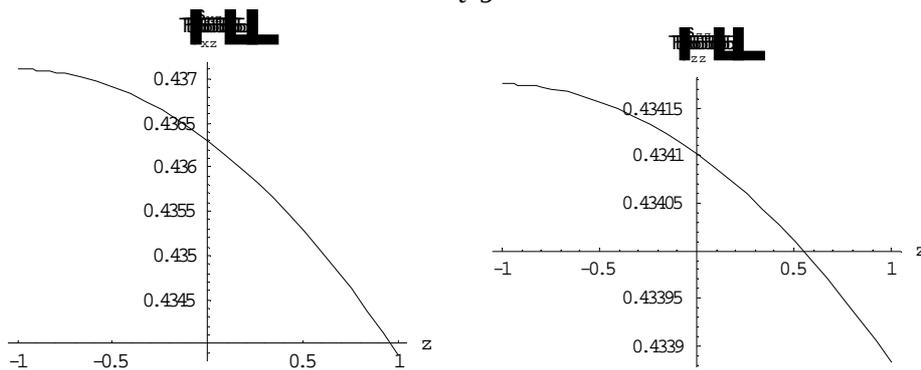
Приведем графики напряжений при разных значениях времени ($t=1,3,5,7$ сек.), когда пластинка состоит из резины. Этому будут соответствовать фиг.6-9.

$t=1$

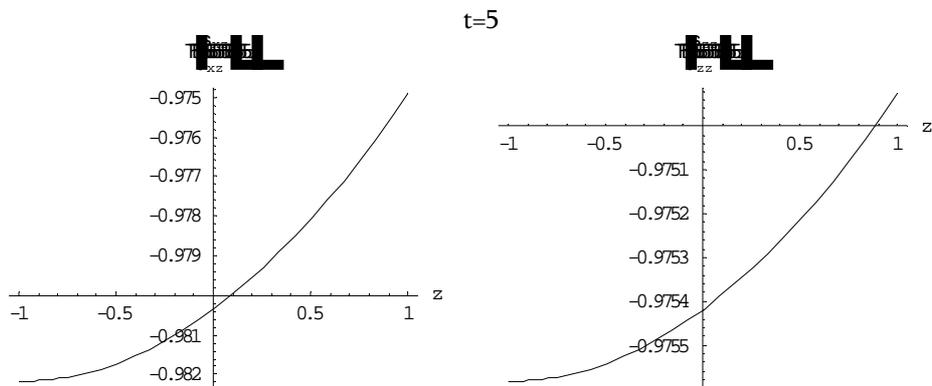


Фиг.6.

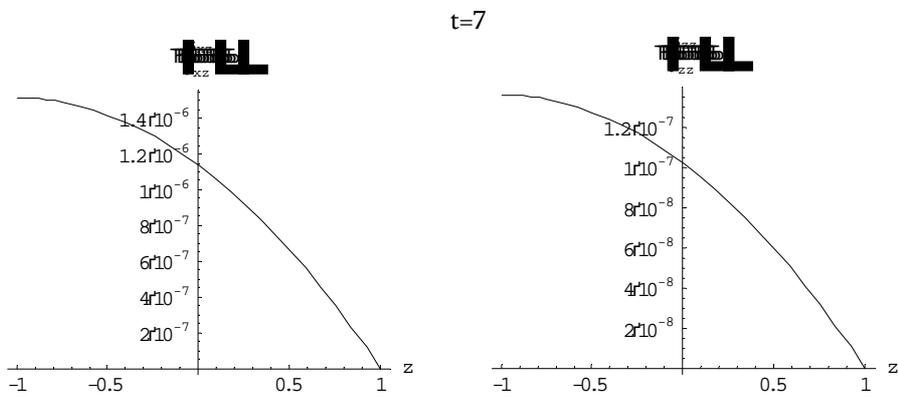
$t=3$



Фиг.7.



Фиг.8.



Фиг.9.

Из приведённых графиков видно, что амплитуды колебаний уменьшаются при удалении от верхней грани и в итоге затухают, достигая нижней грани пластинки. Когда пластинка состоит из более мягкого материала (например, резины), амплитуды колебаний по сравнению с колебаниями пластины из более жесткого материала увеличиваются. Из графиков видно также, что напряжения затухают с течением времени. Наличие вязкого сопротивления приводит к уменьшению амплитуд колебаний по сравнению с амплитудами без учета сопротивления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
3. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Международн. научн. журнал Прикл. механика. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
4. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2002. С. 9-19.
5. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления, прочности и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С.132-135.
6. Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т 56. №4. С. 18-28.
7. Оганесян Р. Ж. Собственные колебания двухслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. // Изв. НАН РА. Механика. 2005. Т 58. №4. С.33-44.
8. Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж. Асимптотика собственных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. // V Международная конференция "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред." Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2005. С. 14-22.
9. Агаловян Л. А., Погосян А. М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Изв. НАН РА. Механика. 2005. Т 58. №3. С. 36-47.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.02.2006