

УДК 539.3

УЧЕТ УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ИЗГИБА
ПЛАСТИН МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Азарян Н. А., Геворкян Г. А.

Ключевые слова: конечные элементы, узловые перемещения, квадратичное программирование, пластина, изгиб.

Keywords: finite elements, junction transferences, quadratic programming, plate, bending.

Ն. Ա Ազարյան, Գ. Ա. Գևորգյան

Անընդհատության պայմանների հաշվառումը վերջավոր տարրերի մեթոդով սալերի ծուխ
խնդիրների լուծման ժամանակ

Առաջարկվում է քառանյունաձև վերջավոր տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ, որում տեղափոխությունների, ինչպես նաև նորմալ լարումների անընդհատության հաշվառումով խնդիրների լուծումը հանգեցվում է քառակուսային ծրագրավորման խնդրի:

N. A. Azaryan, G. A. Gevorgyan

Consideration of Uninterrupted Conditions in Solving the Tasks of Plate
Bending by the Finite - Element Method

It is suggested a modification of tetragonal finite - element method, where the tasks of plate bending with taking into accountancy uninterrupted normal efforts or displacements are reduced to quadratic programming ones.

Предлагается модификация метода конечных элементов четырехугольной формы, при которой решения задач изгиба пластин с учетом непрерывности перемещений, а также и нормальных напряжений сводятся к задачам квадратичного программирования.

При использовании метода конечных элементов для решения задач изгиба пластин возникают некоторые “трудности” [2,5].

Первая “трудность” связана с аппроксимацией функции прогиба, которая задается в виде полинома. При изгибе пластин вид этих полиномов не является единственным.

Вторая “трудность” связана с удовлетворением условий непрерывности между элементами. При изгибе пластин непрерывность между элементами кроме функции прогиба, должна быть удовлетворена и для первых ее производных, так чтобы были исключены изломы между элементами. Требование непрерывности углов поворота по всей линии контакта между смежными элементами приводит к значительным математическим трудностям, когда решение задачи реализуется сведением ее к решению линейных систем уравнений. Обзор работ метода конечных элементов, при котором решения задач изгиба пластин сводятся к решению линейных систем уравнений, с достаточной полнотой приведен в работах [2,4].

В работах [1,3] предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, при котором решения задач изгиба пластин сводятся к задачам квадратичного программирования. Данный подход дал возможность

авторам этих работ включить в ограничение квадратичного программирования условия непрерывности углов поворота по всей линии контакта между смежными элементами, а также и условия совместности с разными длинами границ разделов прямоугольных конечных элементов и при использовании метода конечных элементов устранять вторую “трудность”, связанную с удовлетворением условий непрерывности между элементами.

По аналогии работ [1,3] здесь предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, при котором решения задач изгиба пластин с учетом непрерывности перемещений, а также и нормальных напряжений сводятся к задачам квадратичного программирования.

Срединную плоскость пластины представим в виде совокупности $s \in N = \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ конечных элементов прямоугольной формы с узлами в угловых точках. Перемещения точек срединной поверхности элемента аппроксимируем многочленом четвертого порядка

$$w^s(x, y) = \sum_{i=1}^{12} w_i^s \Phi_i(x, y) \quad (1)$$

где $\Phi_i(x, y)$ – функции Эрмита, $w_s = (w_1^s, w_2^s, \dots, w_{12}^s)^T$ – вектор узловых перемещений.

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы [6], для определения искомых векторов $w_s, s \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования [1,3]:

$$\min \left\{ \sum_{s=1}^{\bar{n}} \left(\frac{1}{2} w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s \right) \mid \begin{array}{l} \text{условие совместности деформации,} \\ \text{кинематические краевые условия} \end{array} \right\} \quad (2)$$

где $k_s = \| \| k_{ij}^s \| \|$ – матрица жесткости, $P_s = (P_1^s, P_2^s, \dots, P_{12}^s)^T$ – вектор узловых нагрузок, эквивалентный внешней нагрузке.

Обозначим через $w = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, w_2^1, w_2^2, w_2^3, \dots, w_n^1, w_n^2, w_n^3)^T$ вектор узловых перемещений, $P = (P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_2^1, P_2^2, P_2^3, \dots, P_n^1, P_n^2, P_n^3)^T$ – вектор узловых нагрузок, $K = \frac{D}{ab} \| \| K_{ij} \| \|$ – матрица жесткости для всей пластины, n – общее число

узлов пластины, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E – модуль упругости, h – толщина пластины

(плиты), ν – коэффициент Пуассона.

непрерывности величин (5) в смежном сечении вдоль границы разделов S -го и $(S+1)$ -го конечных элементов в этих точках, имеем

$$\theta^s(a, b/2) = \theta^{s+1}(0, b/2); \quad \omega^s(a/2, b) = \omega^{s+1}(a/2, 0) \quad (6)$$

$$\omega^s(a, b/2) = \omega^{s+1}(0, b/2); \quad \theta^s(a/2, b) = \theta^{s+1}(a/2, 0) \quad (7)$$

С учетом формул (5) для смежных сечений ij (фиг. 1 и 2), легко увидеть, что условия (6) тождественно удовлетворяются, а условия (7) примут вид

$$-w_3^{i-1} + 2w_3^i - w_3^{i+1} + w_3^{j-1} - 2w_3^j + w_3^{j+1} = 0 \quad (8)$$

$$-w_2^{i-1} + 2w_2^i - w_2^{i+1} + w_2^{j-1} - 2w_2^j + w_2^{j+1} = 0 \quad (9)$$

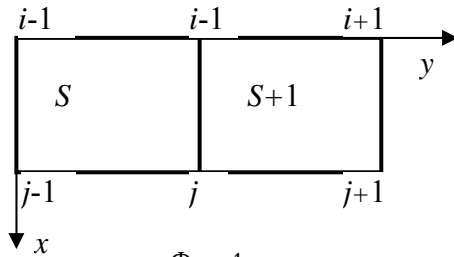
Обозначим через \bar{m} и \tilde{m} , соответственно, количество смежных сечений, параллельных осям x и y . Перепишем условия (8) и (9) в виде системы уравнений

$$Hw = 0 \quad (10)$$

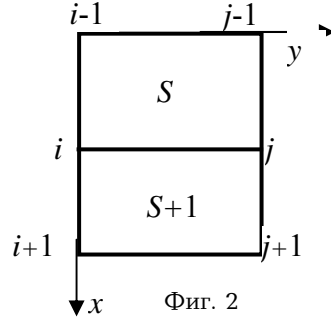
где H – матрица порядка $m \times 3n$, $m = \bar{m} + \tilde{m}$.

С учетом равенств (10) задача (4) примет вид

$$\min\{1/2 w^T Qw + C^T w \mid Aw < 0, Hw = 0, \text{ краевые условия}\} \quad (11)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В смежных сечениях, параллельных осям x и y , соответствующие значения θ^s и ω^s изменяются кубической параболой. Следовательно, для каждого из них, кроме условий (7), необходимо иметь еще и одно условие непрерывности. Запишем эти условия в виде

$$\frac{\partial \theta^s}{\partial x}(\xi, b) = \frac{\partial \theta^{s+1}}{\partial x}(\xi, 0), \quad \frac{\partial \omega^s}{\partial y}(a, \eta) = \frac{\partial \omega^{s+1}}{\partial y}(0, \eta) \quad (12)$$

С учетом формул (5) условия (12) примут вид

$$(6\xi^2 - 6\xi + 1)[w_1^{i-1} - 2w_1^i + w_1^{i+1} - w_1^{j-1} + 2w_1^j - w_1^{j+1} + \\ + a(w_3^{i-1} - 2w_3^i + w_3^{i+1}) + \\ + a(3\xi^2 - 2\xi)(w_3^{i-1} - 2w_3^i + w_3^{i+1} - w_3^{j-1} + 2w_3^j - w_3^{j+1}) = 0$$

$$\begin{aligned}
& (6\eta^2 - 6\eta + 1)[w_1^{i-1} - 2w_1^i + w_1^{i+1} - w_1^{j-1} + 2w_1^j - w_1^{j+1} + \\
& + b(w_2^{i-1} - 2w_2^i + w_2^{i+1}) + \\
& + b(3\eta^2 - 2\eta)(w_2^{i-1} - 2w_2^i + w_2^{i+1} - w_2^{j-1} + 2w_2^j - w_2^{j+1}) = 0
\end{aligned}$$

откуда следует, что тождественно выполняются условия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta^s}{\partial x} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{6}, b \right) &= \frac{\partial \theta^{s+1}}{\partial x} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{6}, 0 \right) \\
\frac{\partial \omega^s}{\partial y} \left(a, \frac{2 + \sqrt{3}}{6} \right) &= \frac{\partial \omega^{s+1}}{\partial y} \left(0, \frac{2 + \sqrt{3}}{6} \right)
\end{aligned}$$

и соотношения (10) являются необходимыми и достаточными условиями непрерывности углов поворота на границах разделов элементов.

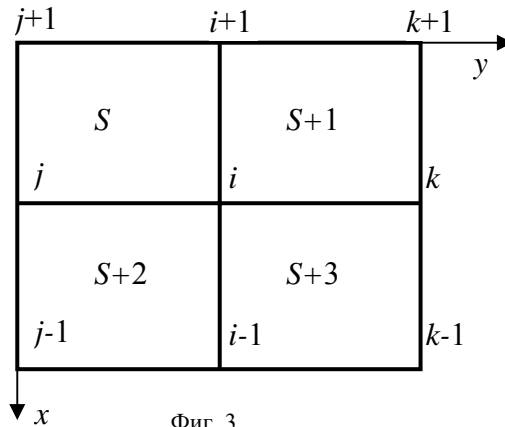
Рассмотрим случай учета непрерывности нормальных напряжений. Как известно, нормальные напряжения от изгиба в элементе пластины определяются формулами [5]

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (13)$$

где z – расстояние до срединной поверхности по толщине.

В общем случае в каждом узле $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ сходятся четыре конечных элемента (фиг. 3). По формулам (13) определим нормальные напряжения в i -ом узле для всех четырех конечных элементов и, приравнявая их, находим узловые условия непрерывности нормальных напряжений. Принимая во внимание формулы (13), легко увидеть, что взамен σ_x и σ_y можно приравнять значения

$$\frac{\partial^2 w^s(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{12} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w^s(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{12} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x, y)}{\partial y^2} \quad (14)$$



Фиг. 3

Условия непрерывности величин $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ в i -ом узле, соответствующей

фиг. 3, задаются соотношениями

$$\frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2}(a, b) = \frac{\partial^2 w^{s+1}}{\partial x^2}(a, 0), \quad \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2}(a, b) = \frac{\partial^2 w^{s+2}}{\partial y^2}(0, b) \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 w^{s+2}}{\partial x^2}(0, b) = \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial x^2}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 w^{s+1}}{\partial y^2}(a, 0) = \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial y^2}(0, 0) \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2}(a, b) = \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial x^2}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2}(a, b) = \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial y^2}(0, 0) \quad (17)$$

Используя формулы (14), находим узловые значения величин $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Подставляя их в условия (15) - (17), получим, что условия (15) и (16) тождественно удовлетворяются, а условия (17) переписутся в виде

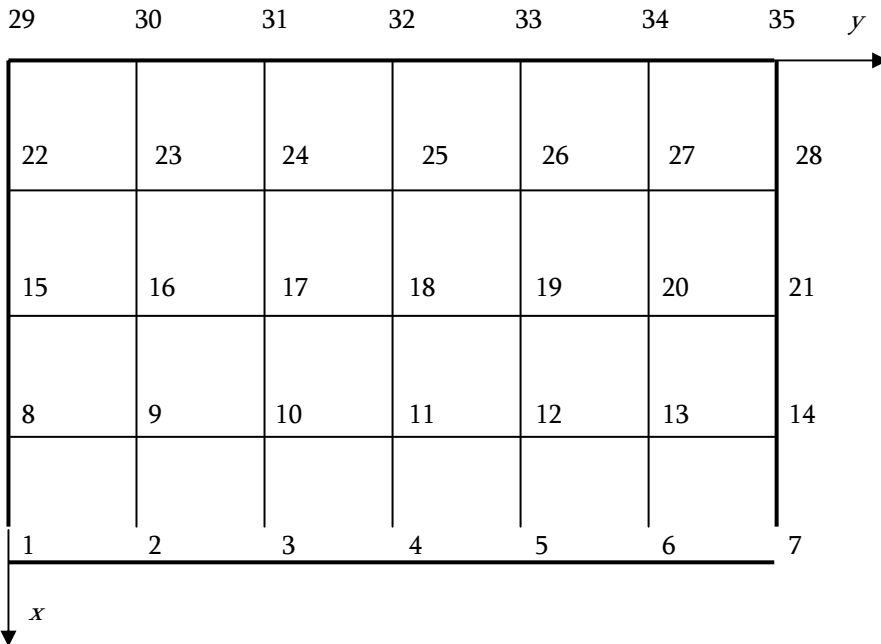
$$3w_1^{i+1} - aw_3^{i+1} - 4aw_3^i - 3w_1^{i-1} - aw_3^{i-1} = 0, \quad i \in N \quad (18)$$

$$3w_1^j + bw_2^j + 4bw_2^i - 3w_1^k + bw_2^k = 0, \quad i \in N \quad (19)$$

Переписем условия (18) и (19) в виде системы уравнений. Имеем

$$\tilde{H}w = 0 \quad (20)$$

где \tilde{H} – матрица порядка $2n \times 3n$.



Фиг. 4

Принимая во внимание соотношения (20), задачу (4) перепишем в виде

$$\min\{1/2 w^T Q w + C^T w \mid A w < 0, \tilde{H} w = 0, \text{ кинематические краевые условия}\} \quad (21)$$

Пример. Прямоугольная пластина, жестко заделанная по всем сторонам (фиг. 4), загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Для решения задачи используем сетку 4×6 , как это показано на фиг. 4. Некоторые результаты расчета при разных подходах для $m = a/b = 1$ приведены в табл. 1 и 2. Учитывая, что значения обобщенных перемещений в узлах 11-15 совпадают соответственно со значениями в узлах 1-5, они здесь не приводятся. Приведенные данные получены в результате расчетов, проведенных по программе, написанной на языке C++.

Сопоставляя данные, приведенные в табл. 1, получим разницу между обобщенными перемещениями w , $\partial w / \partial y$ и $\partial w / \partial x$ при расчете изгиба пластин с несогласующимися элементами и с учетом непрерывности углов поворота вдоль границы разделов элементов. Они соответственно составляют не больше, чем 6,5%, 12,8% и 11,85%.

Таблица 1

Узел	с несогласующимися элементами			с учетом непрерывности углов поворота		
	w	$\partial w / \partial y$	$-\partial w / \partial x$	w	$\partial w / \partial y$	$-\partial w / \partial x$
9	0.181071	0.267764	0.286237	0.169116	0.292291	0.267803
10	0.401756	0.160936	0.619792	0.394069	0.202853	0.536464
11	0.481348	0	0.747625	0.47637	0	0.80724
12	0.401756	-0.160936	0.619792	0.394069	-0.202853	0.536464
13	0.181071	-0.267764	0.286237	0.169116	-0.292291	0.267803
16	0.478413	0.673028	0.287788	0.451446	0.583821	0.298686
17	1.06975	0.436375	0.724764	1.00112	0.40496	0.598119
18	1.29237	0	0.874941	1.26081	0	0.899734
19	1.06975	-0.436375	0.724764	1.00112	-0.40496	0.598119
20	0.478413	-0.673028	0.287788	0.451446	-0.583821	0.298686
Множитель	qb^4 / D	qb^3 / D	qb^3 / D	qb^4 / D	qb^3 / D	qb^3 / D

Таблица 2

Узел	с несогласующимися элементами			с учетом непрерывности нормальных напряжений		
	w	$\partial w / \partial y$	$-\partial w / \partial x$	w	$\partial w / \partial y$	$-\partial w / \partial x$
9	0.181071	0.267764	0.286237	0.181101	0.259643	0.285738
10	0.401756	0.160936	0.619792	0.401671	0.159989	0.619819
11	0.481348	0	0.747625	0.48096	0	0.749272

12	0.401756	-0.160936	0.619792	0.401671	-0.159989	0.619819
13	0.181071	-0.267764	0.286237	0.181101	-0.259643	0.285738
16	0.478413	0.673028	0.287788	0.477711	0.691224	0.2868
17	1.06975	0.436375	0.724764	1.0687	0.43783	0.723453
18	1.29237	0	0.874941	1.291189	0	0.875209
19	1.06975	-0.436375	0.724764	1.0687	-0.43783	0.723453
20	0.478413	-0.673028	0.287788	0.477711	-0.691224	0.2868
Множитель	qb^4/D	qb^3/D	qb^3/D	qb^4/D	qb^3/D	qb^3/D

Как следует из табл. 2, разница между обобщенными перемещениями при расчете изгиба пластин с несогласующимися элементами и с учетом непрерывности нормальных напряжений соответственно составляют не больше, чем 0,1%, 5,7% и 2,8%.

Для квадратной пластины перемещение в точке 18 (максимальный прогиб), вычисленной с несогласующимися элементами для множителя $q(6b)^4/D$, получается 0,00096. В работе [6] приведены соответствующие значения, вычисленные с использованием треугольных элементов. При этом, для размера сетки 2×2 оно равно 0,00094, для размера сетки 4×4 равно 0,00119.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян А. В., Геворкян Г.А. Об одной модификации метода конечных элементов для решения задач изгиба плит. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №1. С. 26-34.
2. Галлагер Р. Г. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир. 1984. 428с.
3. Геворкян Г.А. Об одной модификации метода конечных элементов для решения задач изгиба пластин. // Тезисы докладов XXI международной конференции. Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Санкт-Петербург.: 4-7 октября 2005 г. С. 67-68.
4. Голованов А. И., Бережной Д. В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: ДАС. 2001. 300 с.
5. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение. 1974. 384 с.
6. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940 с.

Ереванский Государственный
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
27.12.2005