

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНЫЙ УПРАВЛЯЕМЫЙ ПОИСК
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ МАНИПУЛЯТОРОМ ПРИ
МИНИМАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ЭНЕРГОЗАТРАТАХ

Аветисян В.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: гарантированный поиск, оптимальное управление

Keywords: guaranteed search, optimal control

Վ.Վ. Ավետիսյան, Ս.Ր. Մարտիրոսյան
Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորով օպտիմալ ըստ նվազագույն լուսային
էներգածախսերի ղեկավարումով փնտրում

Դիտարկվում է էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի կողմից որոնելի անշարժ օբյեկտը փնտրելու ղեկավարման խնդիրը: Աշխատանքում, ի տարբերություն [1-5]-ի, որպես օպտիմալության ցուցանիշ դիտարկվել է մանիպուլյատորի բռնիչում տեղադրված լույսի աղբյուրի էներգածախսերն արտահայտող ֆունկցիոնալը: Որոնելի օբյեկտը համարվում է հայտնաբերված, եթե այն ընկնում է տրված լուսավորությամբ շրջանային տիրույթի մեջ: Մշակվել են բռնիչի շարժման ղեկավարման մի ալգորիթմ և լուսային աղբյուրի շղթայով անցնող էլեկտրական հոսանքի փոփոխման այնպիսի օրենք, որոնց դեպքում համապատասխան հետազոծով շարժվելիս ապահովվում է անշարժ օբյեկտի փնտրումն իրականացնել երաշխավորված ժամանակում՝ նվազագույն լուսային էներգածախսերով:

V.V. Avetisyan, S.R. Martirosyan

**The optimal controlling search of electromechanical manipulator under the
minimum energy of light**

The problem of optimal warranted control is considered by the manipulator with the purpose of searching the fixed plant. In the capacity of an optimization, as against [1-5], the functional which is taking into account power inputs of a light source, located on the square the manipulator is considered. The required plant is considered detected at hit in a light circle with the given illumination intensity. The algorithm of build-up of a traffic control scheme, and also the law of a modification of an electric current in a chain of a light source at which driving on the relevant search trajectory ensures detection of required plant for warranted time at minimum light power inputs during searching designed.

Рассматривается задача оптимального гарантированного управления манипулятором с целью поиска неподвижного объекта. В качестве критерия оптимальности, в отличие от [1-5], рассматривается функционал, учитывающий энергозатраты источника света, расположенного на схвате манипулятора. Искомый объект считается обнаруженным при попадании в световой круг с заданной освещенностью. Разработан алгоритм построения управления движением схвата, а также закон изменения электрического тока в цепи источника света, при которых движение по соответствующей поисковой траектории обеспечивает обнаружение искомого объекта за гарантированное время при минимальных световых энергозатратах в процессе поиска.

1. Расчетная модель поисковой системы и постановка задачи. Пусть имеется трехзвенный электромеханический манипулятор, звенья которого перемещаются друг относительно друга в трех взаимно перпендикулярных направлениях Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 [4]. Управление движением манипулятора осуществляется с помощью электроприводов, состоящих из электродвигателей постоянного тока с

независимым возбуждением и редукторов. При определенных допущениях [6] уравнения движения имеют следующий простой вид [4]:

$$n_i k_i \dot{x}_i = u_i, \quad |u_i| \leq U_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

В (1.1) u_i – управляющее напряжение i -го электродвигателя, U_i , k_i – заданные электрические постоянные, n_i – размерное передаточное отношение ($\omega_i = n_i \dot{x}_i$).

В соответствии с конструкцией рассматриваемого манипулятора рабочее пространство манипулирования схвата представляет собой параллелепипед

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_i \leq c, \quad i = 1, 2, 3\} \quad (1.2)$$

Пусть на основании $\bar{D}(a_1, a_2) = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq a_i, \quad a_i \leq c, \quad i = 1, 2\}$ рабочего пространства (1.2) манипулятора имеется некоторый точечный неподвижный объект Y , координаты $y(t_0) = y^0$ которого управляемой стороне неизвестны. Будем полагать, что на схвате X манипулятора расположено сенсорное устройство – изотропный точечный источник света, при помощи которого на основании \bar{D} образуется подвижная и изменяющаяся круговая информационная область чувствительности – световой круг

$$G(x(t)) = \left\{ \bar{\xi} \in R^2 : |\bar{\xi} - \bar{x}| \leq r = C_1 x_3, \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \bar{D}, \quad 0 < x_3 \leq c, \quad C_1 > 0 \right\} \quad (1.3)$$

который можно перемещать в “темной” области $\bar{D} \subset R^2$ с целью обнаружения (освещения) искомого объекта Y при попадании последнего в эту область – $y \in G(x(t))$.

Область (1.3) – круг с центром в точке $\bar{x}(t) = (x_1, x_2) \in \bar{D}$ и с радиусом $r = C_1 x_3$, $C_1 = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ [4], где x_3 – расстояние схвата манипулятора до основания \bar{D} , а C_1, a_1, a_2 – такие числа, для которых имеет место неравенство

$$r_{\max} = C_1 \max_{0 < x_3 \leq c} x_3 = C_1 x_3^0 < \sqrt{2} \max(a_1, a_2) / 2 \leq \sqrt{2} c / 2 \quad (1.4)$$

Такой выбор параметров a_1, a_2, c и C_1 (угла α , $0 < \alpha < \pi$) (1.4) позволяет обходить тривиальный случай $G \supset \bar{D}$.

Искомый объект может быть обнаружен или распознан при попадании его в световой круг (1.3) только при достаточной освещенности E , которая определяется по формуле [7]

$$E = kQ / (\Omega x_3^2), \quad E \geq E_0 \quad (1.5)$$

Здесь E_0 – освещенность, характеризующая пороговое значение видимости искомого объекта, Ω – телесный угол конуса направлений световых лучей; x_3 – расстояние от источника света до плоскости освещения; k – коэффициент пропорциональности; Q – мощность световой энергии.

Функционал, характеризующий энергозатраты в процессе поиска световым устройством при постоянных $E, \Omega = \operatorname{const}$, определится выражением

$$J = \int_{t_0}^T Q dt = \frac{E\Omega}{k} \int_{t_0}^T x_3^2 dt \quad (1.6)$$

Согласно (1.1) функционал (1.6) является также функцией от u_3 . В соответствии с законом Джоуля–Ленца (1.6) перепишем в виде

$$J = \int_{t_0}^T Q dt = \int_{t_0}^T i^2 R dt, \quad Q = i^2 R, \quad 0 \leq i(t) \leq i_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.7)$$

где i – действующее значение тока, проходящего через источник света, i_0 – максимально допустимое действующее значение тока, а R – активное сопротивление в цепи источника света.

Приравнявая значения функционалов (1.7) и (1.8), имеем

$$i(t) = \sqrt{\frac{E\Omega}{kR}} x_3(t), \quad x_3(t) > 0, \quad 0 \leq i(t) \leq i_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.8)$$

которое с учетом третьего уравнения (1.1) определяет связь между функциями $u_3 = u_3(t)$ и $i = i(t)$.

В соответствии с вышеизложенным будем считать, что поисковая система (1.1) обнаруживает точечный объект Y в том и только в том случае, когда в некоторый момент времени $t \geq t_0$ выполняется условие обнаружения

$$\begin{aligned} |y - \bar{x}(t)| &\leq r(t) \text{sign}(i(t)), \quad 0 \leq i(t) \leq i_0, \quad t \geq t_0 \\ r(t) &= C_1 x_3(t), \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \bar{D}, \quad 0 < x_3 \leq c, \quad C_1 > 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

В случае, когда в течение некоторого интервала времени источник света отключен, т.е. $i(t) \equiv 0$, то согласно (1.9) $E = 0$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

Задача 1. Для манипулятора (1.1) с заданным начальным положением схвата $x^0 \in D$ и заданным телесным углом Ω найти управляющую функцию $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ и закон изменения электрического тока в цепи источника света $i = i(t)$, которые обеспечивают заданную освещенность $E = \text{const}$ и при этом в гарантированный момент времени поиска $t = T$ минимизируют функционал

$$J = \frac{E\Omega}{k} \int_0^T x_3^2 dt \quad (1.10)$$

2. Допустимые управления и траектории. В следующих безразмерных переменных и обозначениях (с дальнейшим опусканием штрихов)

$$\begin{aligned} t' &= t/\gamma, \quad x'_i = x_i/c, \quad \xi'_i = \xi_i/c, \quad a'_i = a_i/c, \quad i = 1, 2, 3; \quad r' = r/c, \quad c' = 1 \\ u'_1 &= u_1\gamma/cn_1k_1, \quad u'_2 = u_2\gamma/cn_2k_2, \quad u'_3 = u_3/U_3, \quad U'_1 = U_1\gamma/cn_1k_1 \\ U'_2 &= U_2\gamma/cn_2k_2, \quad U'_3 = 1, \quad \bar{U}' = \min(U'_1, U'_2), \quad E' = E/E_0, \quad E'_0 = 1 \\ i' &= i/i_0, \quad i'_0 = 1, \quad Q' = Q/\xi, \quad \xi = E\Omega c^2/k, \quad R' = R/\mu \\ \mu &= E\Omega c^2/i_0^2k, \quad J' = J/\lambda, \quad \lambda = E\Omega c^2\gamma/k, \quad \gamma = n_3k_3/cU_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

плоское и вертикальное движения схвата манипулятора описываются, соответственно, первым, вторым и третьим уравнениями следующей системы:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq \bar{U}, \quad |u_3| \leq 1 \quad (2.2)$$

При этом функционал (1.10) запишется в виде

$$J = \int_0^T x_3^2 dt \quad (2.3)$$

а область $D(a_1, a_2, a_3)$ – в виде

$$D(a_1, a_2, 1) = \{(x_1, x_2, x_3): 0 \leq x_i \leq a_i; \quad i = 1, 2; \quad 0 \leq x_3 \leq 1\} \quad (2.4)$$

Так как уравнения (2.2) независимы, то задача определения управления u_3 , переводящего систему, описываемую уравнением

$$\dot{x}_3 = u_3, \quad 0 \leq x_3 \leq x_3^0, \quad |u_3| \leq 1 \quad (2.5)$$

за время T из точки $x_3(0) = x_3^0$ в точку $x_3(T) = 0$ и доставляющего минимум функционалу (2.3), решается отдельно.

Решение этой задачи известно [7]. Оптимальное управление и координата определяются следующим образом:

$$u_3(t, \bar{t}_*, T) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq \bar{t}_* \\ 0, & \bar{t}_* \leq t \leq T \end{cases}, \quad x_3(t, \bar{t}_*, T) = \begin{cases} x_3^0 - U_3 t, & 0 \leq t \leq \bar{t}_* \\ 0, & \bar{t}_* \leq t \leq T \end{cases}, \quad \bar{t}_* = x_3^0 / U_3 \quad (2.6)$$

Любые другие, в частности, управление и соответствующая координата вида

$$u_3(t, t_*, T) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq t_* \\ 0, & t_* \leq t \leq T \end{cases}, \quad x_3(t, t_*, T) = \begin{cases} x_3^0 - U_3 t, & 0 \leq t \leq t_* \\ x_3^0 - U_3 t_* = x_3^*, & t_* \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.7)$$

с параметром t_* , $0 \leq t_* < \bar{t}_* \leq T$ неоптимальны. Более того, управление (2.7) при $t_* = 0$: $u_3(t, t_*, T)|_{t_*=0} \equiv 0$, $0 \leq t \leq T$ доставляет максимальное значение функционалу (2.3) – $J(u_3(t, 0, T)) = \max_{0 \leq t_* \leq \bar{t}_*} J(u_3(t, t_*, T))$.

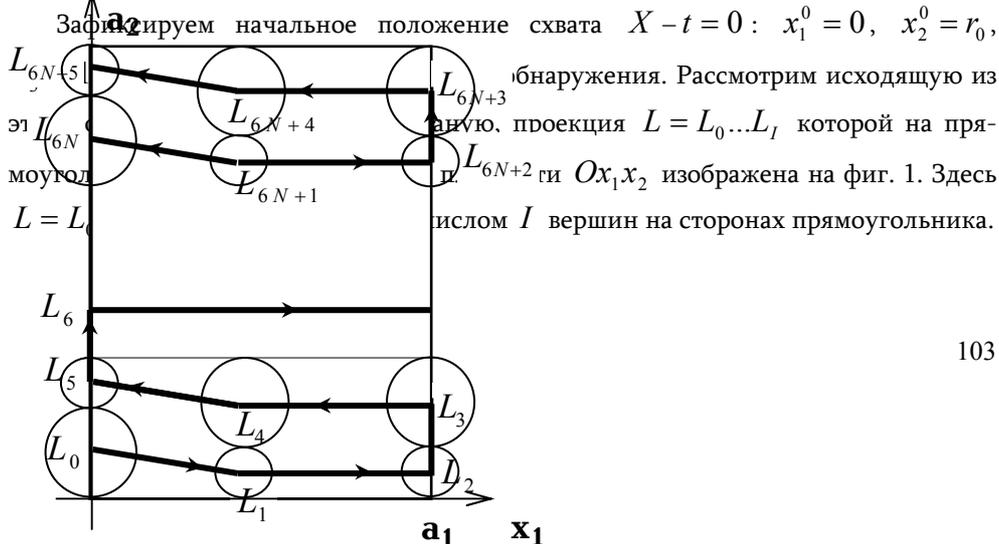
Согласно (1.8) законы изменения электрических токов $i = i(t)$, соответствующих (2.6), (2.7), запишутся, соответственно, в виде

$$i(t, \bar{t}_*, T) = \sqrt{\frac{E\Omega}{kR}} x_3(t, \bar{t}_*, T), \quad i(t, t_*, T) = \sqrt{\frac{E\Omega}{kR}} x_3(t, t_*, T), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что на интервале времени $\bar{t}_* \leq t \leq T$ $i = i(t, \bar{t}_*, T) \equiv 0$, т.е. источник света отключен.

Опишем сначала предлагаемый способ управления, а затем определим условия на входящие в него параметры, при которых решается задача 1.

Зафиксируем начальное положение схвата $X - t = 0$: $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = r_0$, обнаружения. Рассмотрим исходящую из точку, проекция $L = L_0 \dots L_I$ которой на прямую $Ox_1 x_2$ изображена на фиг. 1. Здесь числом I вершин на сторонах прямоугольника.



Фиг. 1

Как видно из фиг. 1, начальный участок траектории $L_0 \dots L_5$ повторяется с каждой шестой вершины со сдвигом на величину $|L_5 L_6|$. Вершины $L_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$, $j = 0, 1, \dots, 6$ ломаной $L_0 \dots L_5$ определяются таким образом:

$$\begin{aligned} L_0 &= (0, r_0), \quad L_1 = (\xi_*, r_*) \\ L_2 &= (a_1, r_*), \\ L_3 &= (a_1, 2r_* + r_0) \quad (2.9) \\ L_4 &= (\xi_*, 2r_* + r_0) \quad L_5 = (0, 2r_0 + r_*) \quad L_6 = (0, 3r_0 + r_*) \\ x_2^{(1)} &= r_*, \quad x_1^{(1)} = \xi_* \end{aligned}$$

При заданных исходных параметрах задачи a_1, a_2, r_0 структура как начального участка $L_{0,5} = L_0 \dots L_5$, так и всей ломаной $L_{0,l} = L_0 \dots L_l$ зависит от значений координат промежуточной вершины $L_1(\xi_*, r_*)$; $x_1^{(1)} = \xi_*$, $0 \leq \xi_* \leq a_1$ и $x_2^{(1)} = r_*$, $0 \leq r_* \leq r_0$. Пусть стороны прямоугольного основания \bar{D} удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} a_2 / (2r_0) &= [a_2 / (2r_0)] = p_1, \quad a_2 / (4r_0) = [a_2 / (4r_0)] = p_0 \\ a_2 &= \max(a_1, a_2), \quad 0 \leq p_0 < p_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь $[\cdot]$ означает целую часть действительного числа.

Для заданных исходных параметров задачи a_1, a_2, r_0 (2.10) рассмотрим следующую функцию от переменной r_* , $0 \leq r_* \leq r_0$:

$$N(r_*) = [a_2 / 2(r_0 + r_*)] = \begin{cases} r_{k+1} < r_* \leq r_k, & k = 0, 1, 2, \dots, p_1 - p_0 \\ p_0 + k, & r_k = a_2 / (2(p_0 + k)) - r_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p_1 - p_0 \\ [a_2 / (2r_0)] = p_1, & [a_2 / (4r_0)] = p_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

представляющую монотонно убывающую ступенчатую функцию от переменной r_* , претерпевающей разрыв первого рода справа в точках r_k , $0 \leq r_k \leq r_0$, $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$.

Пусть $r_* = r_k$ при некотором $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$, т.е.

$$\begin{aligned} N(r_*) \Big|_{r_* = r_k} &= N(r_k) = \frac{a_2}{2(r_0 + r_k)} = \left[\frac{a_2}{2(r_0 + r_k)} \right] = N_k \\ p_0 &\leq N_k \leq p_1, \quad k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

тогда ломаная $L^{(k)} = L(\xi_*, r_k)$ состоит из N_k целое число раз повторяющихся начальных ломаных $L_{0,5}^{(k)} = L_0^{(k)} \dots L_5^{(k)}$ со сдвигом на величину $|L_0^{(k)} L_5^{(k)}|$ по стороне $x_1 = 0$. Семейство ломаных $L^{(k)} = L(\xi_*, r_k)$ обозначим через

$$\{L\}_k = \{L^{(k)} : L^{(k)} = L(\xi_*, r_k); \quad k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0\} \quad (2.13)$$

В соответствии с (2.6) и (2.7), управление $u = u(t)$, при котором проекция \bar{X} схвата манипулятора движется по ломаной $L_{0,5}^{(k)}$, а также закон изменения электрического тока в цепи источника света $i = i(t)$ зададим, соответственно, следующим образом:

$$u^{(k)}(t) = \begin{cases} \{u_1^{(k)}(t) = \sqrt{\bar{U}^2 - C_1^2 U_3^2}, u_2^{(k)}(t) = -C_1 U_3, u_3^{(k)}(t) \equiv -U_3\}, & 0 \leq t \leq t_1^{(k)} \\ \{u_1^{(k)}(t) = \bar{U}, u_2^{(k)}(t) = 0, u_3^{(k)}(t) = 0\}, & t_1^{(k)} \leq t \leq t_2^{(k)} \\ \{u_1^{(k)}(t) = 0, u_2^{(k)}(t) = \bar{U}, u_3^{(k)}(t) = C_1^{-1} U_3 (r_0 - r_k)(r_0 + r_k)^{-1}\}, & t_2^{(k)} \leq t \leq t_3^{(k)} \\ \{u_1^{(k)}(t) = -\bar{U}, u_2^{(k)}(t) = 0, u_3^{(k)}(t) = 0\}, & t_3^{(k)} \leq t \leq t_4^{(k)} \\ \{u_1^{(k)}(t) = -\sqrt{\bar{U}^2 - C_1^2 U_3^2}, u_2^{(k)}(t) = C_1 U_3, u_3^{(k)}(t) = U_3\}, & t_4^{(k)} \leq t \leq t_5^{(k)} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$t_1^{(k)} \leq \bar{t}_* = x_3^0 / U_3$$

$$i^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E \Omega}{kR}} x_3(t); \quad x_3(t) = x_3^0 - U_3 t, & 0 \leq t \leq t_1^{(k)} \\ x_3(t_1^{(k)}) = x_3^0 - U_3 t_1^{(k)} = \text{const}, & t_1^{(k)} \leq t \leq t_2^{(k)} \\ 0, & t_2^{(k)} \leq t \leq t_3^{(k)} \\ \sqrt{\frac{E \Omega}{kR}} x_3^0, & t_3^{(k)} \leq t \leq t_4^{(k)} \\ \sqrt{\frac{E \Omega}{kR}} x_3(t); \quad x_3(t) = x_3^0 - U_3 t, & t_4^{(k)} \leq t \leq t_5^{(k)} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$t_1^{(k)} \leq \bar{t}_* = x_3^0 / U_3$$

В (2.14), (2.15) моменты времени $t_1^{(k)}, \dots, t_5^{(k)}$ определяются из уравнения движения (2.2) подстановкой управления (2.14) в эти уравнения и интегрированием последних при краевых условиях, представляющих координаты вершин ломаной $L_0^{(k)} \dots L_5^{(k)}$.

Используя (2.14), (2.15), вычислим функционал (2.3), характеризующий световые энергозатраты на промежутках времени $0 \leq t \leq t_2^{(k)}$ и $t_3^{(k)} \leq t \leq t_5^{(k)}$:

$$J_1^{(1)}(r_k) = C^{-1} \left\{ \int_0^{t_1^{(k)}} r^2(t) dt + \int_{t_1^{(k)}}^{t_2^{(k)}} r^2(t) dt \right\} = A_1 r_k^3 + B_1 r_k^2 + D_1 \quad (2.16)$$

$$J_1^{(2)}(r_k) = C_1^{-1} \left\{ \int_{t_3^{(k)}}^{t_4^{(k)}} r^2(t) dt + \int_{t_4^{(k)}}^{t_5^{(k)}} r^2(t) dt \right\} = A_2 r_k^3 + C_2 r_k + D_2 \quad (2.17)$$

$$r(t) = C_1 x_3(t), \quad A_1 = -1/3 C_1 U_3 + (\sqrt{(\bar{U} / C_1 U_3)^2 - 1}) / \bar{U}$$

$$B_1 = (a_1 - r_0) \sqrt{(\bar{U} / C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}, \quad D_1 = r_0^3 / 3 C_1 U_3, \quad A_2 = -1/3 C_1 U_3$$

$$C_2 = r_0^2 \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U},$$

$$D_2 = r_0^3 / (3C_1 U_3) + r_0^3 (a_1 - r_0) \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}$$

Сумма интегралов (2.16) и (2.17) определяет величину энергозатрат на промежутке времени $0 \leq t \leq t_5^{(k)}$ при прохождении проекции схвата по начальной ломаной $L_{0,5}^{(k)} = L_0^{(k)} \dots L_5^{(k)}$:

$$J_1(r_k) = J_1^{(1)}(r_k) + J_1^{(2)}(r_k) = A r_k^3 + B r_k^3 + C r_k + D \quad (2.18)$$

$$A = A_1 + A_2 = -2/3 C_1 U_3 + (\sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1}) / \bar{U} \quad (2.19)$$

$$B = B_1 = (a_1 - r_0) \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}, \quad C = C_2 = r_0^2 \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}$$

$$D = D_1 + D_2 = 2r_0^3 / 3C_1 U_3 + r_0^2 (a_1 - r_0) \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}$$

Отметим, что при вычислении (2.18) учитывалось, что на интервале времени $[t_2^{(k)}, t_3^{(k)}]$ проекция схвата перемещается из точки $L_2^{(k)} = (a_1, r_k)$ в точку $L_3^{(k)} = (a_1, 2r_k + r_0)$ по отрезку $L_2^{(k)} L_3^{(k)}$, $|L_2^{(k)} L_3^{(k)}| = r_0 + r_k$ при выключенном свете ($i(t) = 0$ в (1.8)).

Полное значение функционала энергозатрат в процессе управления при прохождении проекции схвата X по траектории $L^{(k)}(r_k) \in \{L\}_k$ (2.13) имеет вид

$$J(r_k) = N_k(r_k) \cdot J_1(r_k) \quad (2.20)$$

где J_1 определяется по формуле (2.18), а N_k – по формуле (2.12).

Как следует из (2.20), функционал $J(r_k)$ определен на конечном множестве дискретных точек r_k , $0 \leq r_k \leq r_0$; $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$:

$$R_k = \{r_k : 0 \leq r_k \leq r_0, \quad r_k = a_2 / (2(p_0 + k)) - r_0; \quad k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0\} \quad (2.21)$$

Таким образом, функционал (2.20) зависит от параметра $r_k \in R_k$, от которого зависит структура траектории $L^{(k)} = L^{(k)}(r_k) \in \{L\}_k$ (2.14) и, следовательно, вид управлений $u^{(k)} = u^{(k)}(t)$ и $i^{(k)} = i^{(k)}(t)$.

Решение задачи 1 равносильно решению следующих задач:

$$J_{\min} = \min_{L^{(k)} \in \{L\}_k} J \quad \text{или} \quad J_{\min} = \min_{r_k \in R_k} J(r_k) \quad (2.22)$$

вторая из которых формулируется следующим образом.

Задача 2. Найти целые числа k и N_k , при которых имеет место

$$J_{\min} = \min_{r_k \in R_k} J(r_k) = \min_{k \in \{0, 1, \dots, p_1 - p_0\}} N_k \cdot J_1(r_k) \quad (2.23)$$

где N_k и $J_1(r_k)$ определяются выражениями (2.12), (2.18) соответственно.

3. Алгоритм решения. Будем решать задачу 2 при следующих основных допущениях.

$$1) \quad \bar{U} > 3C_1 U_3 / \sqrt{5}, \quad U_3 = 1 \Leftrightarrow A > 0, \quad C > 0 \quad (3.1)$$

$$2) \quad r_0 / (C_1 U_3) < a / \bar{U} \Leftrightarrow B > 0, \quad D > 0 \quad (3.2)$$

Условие (3.2) гарантирует существование управлений (траекторий) (2.6) и (2.7) и, следовательно, рассмотрение семейства траекторий фиг. 1 становится возможным и обоснованным.

В соответствии с (2.12), (2.18) соотношение (2.20) перепишем в виде

$$J(r_k) = N_k J_1(r_k) = [a_2 / (r_0 + r_k)] (Ar_k^3 + Br_k^3 + Cr_k + D) \quad (3.3)$$

где, согласно (2.12),

$$[a_2 / (r_0 + r_k)] = a_2 / (r_0 + r_k)$$

Для решения (2.23) рассмотрим функцию (3.3), определенную на отрезке $0 \leq r_* \leq r_0$ без операции взятия целой части, т.е.

$$F(r_*) = (a_2 / (r_0 + r_*)) (Ar_*^3 + Br_*^2 + Cr_* + D), \quad 0 \leq r_* \leq r_0 \quad (3.4)$$

где A, B, C, D определяются выражениями (2.19).

Значения функции F (3.4), согласно (2.11), (2.12), (2.18), совпадают со значениями функций (3.3) в точках r_k , $0 \leq r_k \leq r_0$; $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$, т.е.

$$J(r_k) = F(r_*) \Big|_{r_*=r_k}, \quad k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0 \quad (3.5)$$

Найдем

$$\min_{0 \leq r_* \leq r_0} F(r_*) = F(r_*^{opt}) \quad (3.6)$$

Исследование показало, что функция $F(r_*)$ (3.4) имеет единственный минимум r_*^{opt} на отрезке $[0, r_0]$

$$\min_{0 \leq r_* \leq r_0} F(r_*) = F(r_*^{opt}) = F_*$$

Значение r_*^{opt} можно легко найти по формуле Кардано. Если

$$r_*^{opt} = r_k \quad (3.7)$$

при некотором $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$, то r_*^{opt} является также решением задачи (2.23)

$$J_{\min} = \min_{k \in \{0, 1, \dots, p_1 - p_0\}} N(r_k) J_1(r_k) = N(r_*^{opt}) J_1(r_*^{opt}) \quad (3.8)$$

$$N(r_*^{opt}) = a_2 / (2(r_0 + r_*)) \Big|_{r_*=r_*^{opt}}$$

Пусть r_*^{opt} при некотором k , $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$ удовлетворяет неравенству

$$r_{k+1} < r_*^{opt} < r_k \quad (3.9)$$

$$r_k = a_2 / (2(p_0 + k)) - r_0, \quad r_{k+1} = a_2 / (2(p_0 + k + 1)) - r_0 \quad (3.10)$$

Из соотношений (3.9), (3.10) имеем

$$W < k < W + 1, \quad W = a_2 / (2(r_*^{opt} + r_0)) - p_0 - 1 \quad (3.11)$$

Поскольку $r_*^{opt} \in (r_k, r_{k+1})$, то из (2.12) следует, что W не является целочисленным. А так как k – целое число, то значение k найдем по формуле

$$k = [W + 1] \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.10), получим

$$r_k = a_2 / (2(p_0 + [W + 1])) - r_0, \quad r_{k+1} = a_2 / (2(p_0 + [W + 1])) - r_0 \quad (3.13)$$

Далее, последовательно подставляя (3.13) в (2.12), (2.16)-(2.18), определяем значения N_k, N_{k+1} и функционалов $J_1(r_k), J_1(r_{k+1})$.

Оптимальное значение \bar{r}_*^{opt} и минимальное значение J_{\min} в задаче (2.23) определяются следующим образом:

$$\bar{r}_*^{opt} = \begin{cases} r_{k+1} & \text{при } J(r_{k+1}) = N_{k+1} \cdot J_1(r_{k+1}) = \\ & = \min \{ N_{k+1} \cdot J_1(r_{k+1}), N_k \cdot J_1(r_k) \} \\ r_k & \text{при } J(r_k) = N_k \cdot J_1(r_k) = \\ & = \min \{ N_{k+1} \cdot J_1(r_{k+1}), N_k \cdot J_1(r_k) \} \\ r_{k+1}, r_k & \text{при } J(r_{k+1}) = J(r_k) \end{cases} \quad (3.14)$$

$$J_{\min} = \begin{cases} J(r_{k+1}) = N_{k+1} \cdot J_1(r_{k+1}) & \text{при } \bar{r}_*^{opt} = r_{k+1} \\ J(r_k) = N_k \cdot J_1(r_k) & \text{при } \bar{r}_*^{opt} = r_k \\ J(r_{k+1}) = J(r_k) & \text{при } \bar{r}_*^{opt} = r_{k+1} = r_k \end{cases} \quad (3.15)$$

Таким образом, для заданных параметров $a_1, a_2, r_0, C_1, \bar{U}, U_3$, удовлетворяющих (3.1), (3.2), определяются числа p_0, p_1 (2.10) и подсчитывается значение r_*^{opt} по формуле Кардано. Затем, в случае (3.9), с помощью (3.11)-(3.13);(2.13);(2.16)-(2.18);(2.20) находятся $k, r_k, N_k, J_1(r_k), J(r_k)$ соответственно, определяются \bar{r}_*^{opt} (3.14), J_{\min} (3.15), а в конце – оптимальные управления (2.14), (2.15). В случае (3.7) построение управлений (2.14) и (2.15) осуществляется аналогичным образом.

Численные расчеты, приведенные для манипулятора с конкретными параметрами [4,5], показали, что оптимальный выбор параметров управлений (2.16) и (2.17) приводит к значительному выигрышу световых энергозатрат – 23% по сравнению с управлением при $k = 0$ и 16% по сравнению с управлением при $k = 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск недвижимого объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. ¹ 1. С. 62-69.
2. Avetisyan V.V. The problem of optimal guaranteed search and capture of immobile object in rectangular domain // 10-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. St. Petersburg, Russia. AZ. Proceedings. 2002, vol. 1, pp. 65-68.
3. Avetisyan V.V. Controlled search with subsequent catch of immobile object by the robot-manipulator // 11-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. Tucson, USA. AZ. Proceedings. 2004, vol. 1, p.24-29.
4. Аветисян В.В., Барсегян А.Р. Оптимизация управления захватом целевого объекта роботом-манипулятором при неполной информации // Изв. НАН РА. Механика. 2004. Т. 57. ¹ 2. С. 58-68.
5. Аветисян В.В. Управление поиском неподвижного объекта с целью захвата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. ¹ 6. С. 160-168.

6. Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л. Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. ¹1. С. 189-238.
7. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 3. М.: Наука. 1970. С. 512.
8. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Ч. II // Изв. АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1959. Т. ¹ 11. С. 1441-1458.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
13.10.2005