ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №2, 2007 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ БЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Восканян А.Р., Григорян Э.Х.

Ключевые слова: метод интегрирования Фурье, асимптотические формулы, слой, поверхностные волны, включение, функциональные уравнения, дифракция, уравнение Винера-Хопфа
Keywords: method integrated Fourier, asymprotic formulas, layer, surface waves, inclusion, functional equations, difraction, Winer-Hopff equation

Ա.Ռ.Ոսկանյան,Է.Խ.Գրիգորյան

Սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական ներդիրով առաձգական տարածությունում

Աշխատաքում հետազոտված է անվերջ առաձգական ներդիրին անվերջությունից որոշակի անկյան տակ ընկնող հարթ ալիքի դիֆրակցիան: Անվերջ ներդիրը բաղկացած է երկու կիսաանվերջ,տարբեր նյութերից պատրաստված ներդիրներից: Խնդրի լուծումը ներկայացվում է զույգ և կետ խնդիրների գումարի տեսքով:

Դիտարկելով երկար ալիքների դեպքը, այդ խնդիրները (զույգ և կենտ) մոդելավորվում են համապատասխան ձևով, որից հետո նրանցից յուրաքանչյուրը բերվում է Վիներ-Հոպֆի ֆուն-կցիոնալ հավասարման լուծմանը: Ստացվում է ասիմպտոտական բանաձևեր տեղափոխության համար հեռու կետերում:

В работе рассматривается дифракция сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности под некоторым углом на бесконечное включение. Бесконечное включение состоит из двух полубесконечных частей с различными материалами. Решение задачи представляется в виде суммы своей четной и нечетной задачи. Рассматривая случай длинных волн, эти задачи (четная и нечетная) моделируются соответствующим образом, после чего каждая из них сводится к решению функционального уравнения Винера-Хопфа. Получены асимптотические формулы для амплитуды перемещения и контактных напряжений в дальней зоне. Получены также поведения контактных напряжений в окрестности линии соединения полубесконечных частей включения.

A. R. Voskanyan, E. Kh. Grigoryan

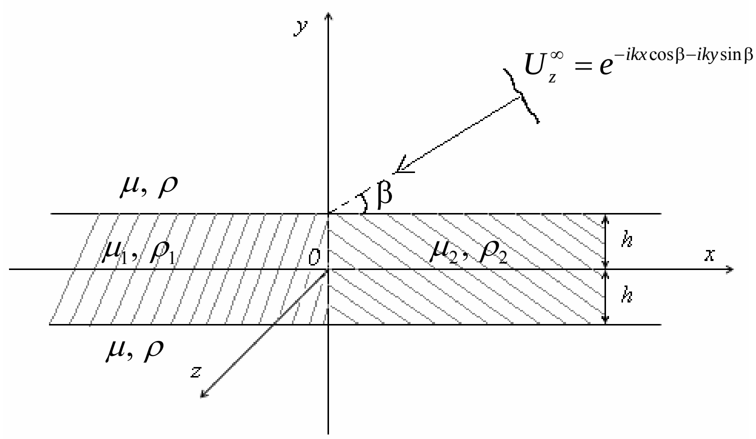
Diffraction of a Shear Plane Wave in Elastic Medium with Piecewise Homogeneous Infinite Inclusion

Diffraction of shear plane wave incident from infinity at arbitrary angle on infinite inclusion is considered. The infinite inclusion consists of two semi-infinite parts made of different materials. The problem's solution is presented in the form of sum of its even and odd problems. The case of long waves is considered and these problems (the even and odd ones) are modeled in a corresponding way after which each of them is reduced to the solution of Wiener-Hopf functional equation. Asymptotic formulas are obtained for displacement's amplitude and contacts stresses in the far field. The behaviors of contact stresses in the neighborhood of the bonding line of the semi-infinite parts of the inclusion are also obtained.

Рассмотрим упругое пространство, отнесенное к декартовой системе координат $oxyz$, содержащее кусочно-однородное упругое бесконечное включение в виде занимающих области $\Omega_1\left(-\infty < x \le 0, |y| < h, |z| < \infty\right)$ и $\Omega_2\left(0 \le x < \infty, |y| < h, |z| < \infty\right)$ полубесконечных слоев с малой толщиной $2h$ (фиг.1).

Пусть из бесконечности под углом β падает плоская сдвиговая волна (гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и в дальнейшем опускается, т.е. задача решается в амплитудах, t – параметр времени, ω – частота колебаний) с амплитудой

$$U_z^{\infty}\left(x, y\right) = e^{-ikx\cos\beta - iky\sin\beta} \tag{1}$$



Фиг. 1

где $k = \omega / C$ – волновое число, $C = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны, μ, ρ – модуль сдвига и плотность упругого пространства соответственно, $0 < \beta < \pi / 2$.

Среда находится в условиях антиплоской деформации. Ставится задача определить дифрагированное волновое поле, как на участке контакта, так и во всем пространстве.

Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве, содержащем полубесконечное упругое включение, рассмотрена в работе [1].

В работе [2] рассматривается дифракция магнитоупругой волны Лява на границе двух различных идеально проводящих полубесконечных тонких слоев, прикрепленных к граничной поверхности идеально проводящего упругого полупространства.

Для решения поставленной задачи представим $U_z^{\infty}(x,y)$ в виде суммы своей четной

$$U_{z_1}^{\infty}=\frac{1}{2}\left(e^{-ikx\cos\beta-iky\sin\beta}+e^{-ikx\cos\beta+iky\sin\beta}\right) \tag{2}$$

и нечетной

$$U_{z_2}^{\infty}=\frac{1}{2}\left(e^{-ikx\cos\beta-iky\sin\beta}-e^{-ikx\cos\beta+iky\sin\beta}\right) \tag{3}$$

частей.

В дальнейшем будут использованы следующие обозначения:

$W_1(x,y)$, $W_2(x,y)$–амплитуды перемещения пространства в четной и нечетной задачах, соответственно. $U_1^{(1)}(x,y)$, $U_2^{(1)}(x,y)$–амплитуды перемещения левого слоя в четной и нечетной задачах, соответственно. $U_1^{(2)}(x,y)$, $U_2^{(2)}(x,y)$ – амплитуды перемещения правого слоя в четной и нечетной задачах, соответственно.

Исходя из вышесказанного, следует

$$\begin{aligned}
&U_z^{\infty}(x,y)=U_{z_1}^{\infty}(x,y)+U_{z_2}^{\infty}(x,y)\\
&U_z(x,y)=W_1(x,y)+W_2(x,y)\\
&U^{(1)}(x,y)=U_1^{(1)}(x,y)+U_2^{(1)}(x,y)\\
&U^{(2)}(x,y)=U_1^{(2)}(x,y)+U_2^{(2)}(x,y)
\end{aligned} \tag{4}$$

где $U^{(1)}(x,y)$, $U^{(2)}(x,y)$– амплитуды перемещения точек в левом и правом слоях соответственно, $U_z(x,y)$ – амплитуда перемещения в пространстве.

Теперь рассмотрим четную и нечетную задачи отдельно.

1. Четная задача

В четной задаче для пространства и слоев имеем следующие волновые уравнения соответственно:

$$\Delta W_1(x,y)+k^2W_1(x,y)=0 \quad \Omega\left(|y|>h,-\infty<x<\infty,-\infty<z<\infty\right) \tag{1.1}$$

$$\Delta U_1^{(1)}(x,y)+k_1^2U_1^{(1)}(x,y)=0 \quad \Omega_1\left(|y|<h,-\infty<x<0,-\infty<z<\infty\right) \tag{1.2}$$

$$\Delta U_1^{(2)}(x,y)+k_2^2U_1^{(2)}(x,y)=0 \quad \Omega_2\left(|y|<h,0<x<\infty,-\infty<z<\infty\right) \tag{1.3}$$

со следующими контактными условиями:

$$\mu\left.\frac{\partial W_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\pm h}=\mu_1\left.\frac{\partial U_1^{(1)}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\pm h} \quad -\infty<x\le 0$$

$$\mu\left.\frac{\partial W_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\pm h}=\mu_2\left.\frac{\partial U_1^{(2)}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\pm h} \quad 0\le x<\infty \tag{1.4}$$

$$W_1(x,\pm h) = U_1^{(1)}(x,\pm h) \quad -\infty < x \le 0$$
$$W_1(x,\pm h) = U_1^{(2)}(x,\pm h) \quad 0 \le x < \infty \tag{1.5}$$
$$U_1^{(1)}(-0,y) = U_1^{(2)}(+0,y)$$

$$\mu_1 \frac{\partial U_1^{(1)}(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=-0} = \mu_2 \frac{\partial U_1^{(2)}(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=+0} \tag{1.6}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $k_1^2 = \omega^2 / C_1^2$, $k_2^2 = \omega^2 / C_2^2$ – волновые числа слоев, $C_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\rho_1}}$, $C_2 = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\rho_2}}$ – соответственно скорости распространения сдвиговых волн в левом и правом слоях, $\mu_1, \rho_1, \mu_2, \rho_2$ – модули сдвига и плотности материала в левом и правом слоях, соответственно.

Считая толщину включения достаточно малой, т.е. $hk_1 << 1$, $hk_2 << 1$, усредним перемещение $U_1^{(1)}(x,y)$, $U_1^{(2)}(x,y)$ по толщине. Тогда из (1.2) и (1.3) получим

$$\frac{d^2 V_1^{(1)}(x)}{dx^2} + k_1^2 V_1^{(1)}(x) + \frac{1}{h\mu_1} q_1^{(1)}(x) = 0 \quad -\infty < x \le 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{d^2 V_1^{(2)}(x)}{dx^2} + k_2^2 V_1^{(2)}(x) + \frac{1}{h\mu_2} q_1^{(2)}(x) = 0 \quad 0 \le x < \infty \tag{1.8}$$

где

$$V_1^{(1)}(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} U_1^{(1)}(x,y)dy \tag{1.9}$$

$$q_1^{(1)}(x) = \mu_1 \frac{\partial U_1^{(1)}(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=h} = \tau_{yz}^{(1)}(x,h) = -\tau_{yz}^{(1)}(x,-h) = -\mu_1 \frac{\partial U_1^{(1)}(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=-h}$$

$$V_1^{(2)}(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} U_1^{(2)}(x,y)dy \tag{1.10}$$

$$q_1^{(2)}(x) = \mu_2 \frac{\partial U_1^{(2)}(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=h} = \tau_{yz}^{(2)}(x,h) = -\tau_{yz}^{(2)}(x,-h) = -\mu_2 \frac{\partial U_1^{(2)}(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=-h}$$

где $q_1^{(1)}(x)$, $q_1^{(2)}(x)$–амплитуды интенсивностей контактных напряжений, действующих на контактных участках слоев и пространства соответственно левой и правой частей.

Усредним также (1.6) контактные условия

$$V_1^{(1)}(-0) = V_1^{(2)}(+0) = V(0)$$

$$\mu_1 \frac{dV_1^{(1)}(x)}{dx}\bigg|_{x=-0} = \mu_2 \frac{dV_1^{(2)}(x)}{dx}\bigg|_{x=+0} = X \tag{1.11}$$

где $V(0),\ X$ – постоянные, подлежащие определению.

Введем функции

$$f^{+}(x) = \theta(x) f(x),\ \ f^{-}(x) = \theta(-x) f(x) \tag{1.12}$$

где $\theta(x)$ – известная функцию Хевисайда.

Учитывая (1.11) и (1.12), (1.7) и (1.8), после преобразования Фурье запишутся следующим образом:

$$\overline{V}_1^{(1)-}(\sigma) = \frac{i\sigma V(0)}{k_1^2 - \sigma^2} - \frac{X}{\mu_1\left(k_1^2 - \sigma^2\right)} - \frac{\overline{q}_1^{(1)-}(\sigma)}{h\mu_1\left(k_1^2 - \sigma^2\right)} \tag{1.13}$$

$$-\infty < \sigma < \infty$$

$$\overline{V}_1^{(2)+}(\sigma) = -\frac{i\sigma V(0)}{k_1^2 - \sigma^2} + \frac{X}{\mu_2\left(k_2^2 - \sigma^2\right)} - \frac{\overline{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{h\mu_2\left(k_2^2 - \sigma^2\right)} \tag{1.14}$$

$$-\infty < \sigma < \infty$$

где $\overline{V}_1^{(1)-}(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V_1^{(1)-}(x) e^{i\sigma x} dx$; $\overline{V}_1^{(2)+}(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V_1^{(2)+}(x) e^{i\sigma x} dx$

$$\overline{q}_1^{(1)^-}(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_1^{(1)^-}(x) e^{i\sigma x} dx ; \overline{q}_1^{(2)^+}(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_1^{(2)^+}(x) e^{i\sigma x} dx$$

Выше имелось в виду, что действительная ось обходит точки $-k_1, -k_2$ сверху, а точки k_1, k_2 – снизу.

Теперь под условиями контакта подразумеваются условия

$$\frac{\partial W_1(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=+h} - \frac{\partial W_1(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=-h} = \frac{2}{\mu}\left(q_1^{(1)^-}(x) + q_1^{(2)^+}(x)\right) \tag{1.15}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$W_1(x, \pm h) = V_1^{(1)^-}(x) + V_1^{(2)^+}(x) \quad -\infty < x < \infty \tag{1.16}$$

Приступив к решению задачи, введем функцию $W_1'(x,y)$

$$W_1'(x,y) = W_1(x,y) - U_{z_1}^{\infty}(x,y) \tag{1.17}$$

Очевидно, что $W_1'(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1). После преобразования Фурье из (1.1) получим

$$\frac{d^2 \overline{W}_1'(\sigma, y)}{dy^2} - \gamma^2 \overline{W}_1'(\sigma, y) = 0 \quad \gamma^2 = \sigma^2 - k^2 \tag{1.18}$$

Выберем то решение уравнения (1.18), которое представляет уходящую волну

$$\overline{W}_1'(\sigma, y) = C_1 e^{-\gamma|y|} \tag{1.19}$$

Предполагается, что $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \to |\sigma|$ при $|\sigma| \to \infty$,

$\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, т.е. решение уравнения в виде формулы (1.19) представляет уходящую волну. Для выбора такой ветви двузначной функции $\sqrt{\alpha^2-k^2}$ следует провести в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ разрезы до бесконечности от точек $\sigma=k$ в верхней плоскости, и $\sigma=-k$ – в нижней плоскости, т.е. действительная ось обходит точку ветвления $-k$ сверху, а k – снизу [3].

Применив преобразование Фурье к контактным условиям, из (1.15) имея в виду (1.19), получим

$$\begin{gathered}C_1(\sigma)=-\frac{\overline{q}_1^{(1)-}(\sigma)|+\overline{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}}e^{\gamma h}+\\+\frac{2\pi k\sin\beta\sin(kh\sin\beta)\delta(\sigma-k\cos\beta)}{\sqrt{\sigma^2-k^2}}e^{\gamma h}\end{gathered}\tag{1.20}$$

а из (1.16), (1.13), (1.14) – следующее функциональное уравнение Винера-Хопфа относительно $\overline{q}_1^{(1)-}(\sigma)$ и $\overline{q}_1^{(2)+}(\sigma)$:

$$\begin{gathered}\overline{q}_1^{(2)+}(\sigma)+\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{k_2^2-\sigma^2}{k_1^2-\sigma^2}\frac{L_1(\sigma)}{L_2(\sigma)}\overline{q}_1^{(1)-}(\sigma)=\frac{h\mu\mu_2\left(k_2^2-\sigma^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}}{L_2(\sigma)}\times\\\times\left(i\sigma\left(\frac{1}{k_1^2-\sigma^2}-\frac{1}{k_2^2-\sigma^2}\right)V(0)+\left(\frac{1}{\mu_2\left(k_2^2-\sigma^2\right)}-\frac{1}{\mu_1\left(k_1^2-\sigma^2\right)}\right)X\right)-\\-2\pi\frac{ih\mu\mu_2k\sin\beta\left(k_2^2-k^2\cos^2\beta\right)}{i\mu k\sin\beta+h\mu_2\left(k_2^2-k^2\cos^2\beta\right)}e^{ikh\sin\beta}\delta(\sigma-k\cos\beta)\end{gathered}\tag{1.21}$$

где

$$\begin{aligned}L_1(\sigma)&=\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}-h\mu_1\left(k_1^2-\sigma^2\right)\\L_2(\sigma)&=\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}-h\mu_2\left(k_2^2-\sigma^2\right)\end{aligned}\tag{1.22}$$

В дальнейшем, в основном, будет рассматриваться случай, когда $k_1>k$, $k_2>k$. Тогда $L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$ будут иметь простые корни $\pm\sigma_1$, $\pm\sigma_2$, где

$$\sigma_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2k_1^2+\lambda_1^2-\lambda_1\sqrt{\lambda_1^2+4\left(k_1^2-k^2\right)}}\,;k<\sigma_1<k_1;\ \lambda_1=\frac{\mu}{\mu_1h}$$

$$\sigma_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2k_2^2+\lambda_2^2-\lambda_2\sqrt{\lambda_2^2+4\left(k_2^2-k^2\right)}}\,;k<\sigma_2<k_2;\ \lambda_2=\frac{\mu}{\mu_2h}$$

Чтобы в дальнейшем удовлетворялись условия уходящей волны, надо полагать, что действительная ось обходит точки $-\sigma_1,-\sigma_2$ сверху, а точки σ_1,σ_2 снизу, Для определенности допустим, что $k<k_2<k_1$. В этом случае легко видеть, что $\sigma_1>\sigma_2$.

Обозначим $$\bar{K}(\sigma)=\frac{k_2^2-\sigma^2}{k_1^2-\sigma^2}\bar{K}_1(\sigma) \tag{1.23}$$

где $$\bar{K}_1(\sigma)=\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{L_1(\sigma)}{L_2(\sigma)} \tag{1.24}$$

Для дальнейшего решения функционального уравнения надо факторизировать $\bar{K}(\sigma)$.

Сначала факторизуем $\bar{K}_1(\sigma)$, представив ее в виде

$$\bar{K}_1(\sigma)=\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{L_1(\sigma)}{L_2(\sigma)}=\bar{K}_1^+(\sigma)\bar{K}_1^-(\sigma)$$

где $\bar{K}_1^+(\sigma)=e^{\bar{R}^+(\sigma)}$; $\bar{K}_1^-(\sigma)=e^{\bar{R}^-(\sigma)}$

$$\bar{R}^+(\sigma)=\int_0^\infty R(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx;\ \bar{R}^-(\sigma)=\int_{-\infty}^0 R(x)e^{ix(\sigma-i0)}dx \tag{1.25}$$

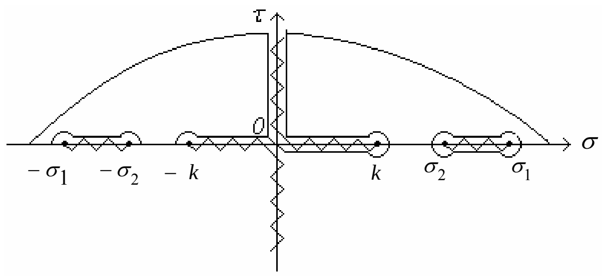
$$R(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{L_1(\sigma)}{L_2(\sigma)}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Надо отметить, что $\bar{K}_1^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha)>0$, а $\bar{K}_1^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha)<0$, $\alpha=\sigma+i\tau$ [3].

Поскольку $\bar{R}(\sigma)=\mathrm{O}\left(|\sigma|^{-1}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$, то

$$\bar{R}^-(\sigma)=\mathrm{O}\left((\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0)\right);\ \bar{R}^+(\sigma)=\mathrm{O}\left((\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0)\right),$$

откуда следует, что $\bar{K}^\pm(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$.



Фиг.2

Вычислив $\bar{R}^-(\sigma)$ с помощью метода контурного интегрирования в комплексной плоскости с разрезами, указанными на фиг.2, получим

$$\bar{R}^-(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varphi(\tau)}{\tau+i(\sigma-io)}d\tau-\frac{1}{\pi}\int_0^K\frac{\psi(S)}{S-(\sigma-io)}dS+\ln\frac{\sigma-io-\sigma_1}{\sigma-io-\sigma_2} \tag{1.26}$$

$$\bar{R}^+(\sigma)=\bar{R}^-(-\sigma) \tag{1.27}$$

$$\varphi(\tau)=\operatorname{arctg}\frac{h\mu\sqrt{k^2+\tau^2}\left[\mu_2\left(k_2^2+\tau^2\right)-\mu_2\left(k_1^2+\tau^2\right)\right]}{\mu^2\left(k^2+\tau^2\right)+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+\tau^2\right)\left(k_2^2+\tau^2\right)}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\mu\sqrt{k^2+\tau^2}}{h\mu_1\left(k_1^2+\tau^2\right)}-\operatorname{arctg}\frac{\mu\sqrt{k^2+\tau^2}}{h\mu_2\left(k_2^2+\tau^2\right)}$$

$$\psi(S)=\operatorname{arctg}\frac{h\mu\sqrt{k^2-S^2}\left[\mu_2\left(k_2^2-S^2\right)-\mu_1\left(k_1^2-S^2\right)\right]}{\mu^2\left(k^2-S^2\right)+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2-S^2\right)\left(k_2^2-S^2\right)}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\mu\sqrt{k^2-S^2}}{h\mu_1\left(k_1^2-S^2\right)}-\operatorname{arctg}\frac{\mu\sqrt{k^2-S^2}}{h\mu_2\left(k_2^2-S^2\right)}$$

Отметим, что имеет место формула

$$\frac{1}{S-(\sigma-i0)}=\frac{1}{S-\sigma}-i\pi\delta(S-\sigma)$$

Имея (1.26), можно записать

$$\bar{K}^+(\sigma)=\frac{k_2+\sigma}{k_1+\sigma}\bar{K}_1^+(\sigma);\quad \bar{K}^-(\sigma)=\frac{k_2-\sigma}{k_1-\sigma}\bar{K}_1^-(\sigma) \tag{1.28}$$

С учетом (1.31), (1.23) можно записать

$$\frac{\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{\bar{K}^+(\sigma)}+\bar{K}^-(\sigma)\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma)=\bar{F}(\sigma)-$$

$$-\frac{2\pi}{\bar{K}^+(k\cos\beta)}\frac{h\mu\mu_2 ik\sin\beta\left(k_2^2-k^2\cos^2\beta\right)}{i\mu k\sin\beta+h\mu_2\left(k_2^2-k^2\cos^2\beta\right)}\delta(\sigma-k\cos\beta)e^{ikh\sin\beta} \tag{1.29}$$

где

$$\bar{F}(\sigma)=\bar{F}_1(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_1}\right)+\bar{F}_2(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_2}\right) \tag{1.30}$$

$$\bar{F}_1(\sigma)=\frac{h\mu\mu_2\sqrt{\sigma^2-k^2}}{\bar{K}^+(\sigma)L_2(\sigma)}\frac{k_2^2-\sigma^2}{k_1^2-\sigma^2} \tag{1.31}$$

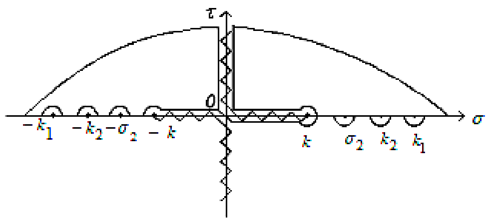
$$\bar{F}_2(\sigma)=-\frac{h\mu\mu_2\sqrt{\sigma^2-k^2}}{\bar{K}^+(\sigma)L_2(\sigma)} \tag{1.32}$$

Очевидно, что

$$F_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h\mu\mu_2\sqrt{\sigma^2-k^2}}{\bar{K}^+(\sigma)L_2(\sigma)}\frac{k_2^2-\sigma^2}{k_1^2-\sigma^2}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{1.33}$$

$$\bar{F}_1^-(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{0}F_1(x)e^{i(\sigma-i0)x}dx \tag{1.34}$$

$$\bar{F}_1^{+}(\sigma)=\int_0^{\infty}F_1(x)e^{i(\sigma+i0)x}dx \tag{1.35}$$



Фиг.3

$F_1(x)$ тоже определяется с помощью контурного интегрирования, после которого из (1.34) можно определить $\bar{F}_1^{-}(\sigma)$

$$\bar{F}_1^{-}(\sigma)=$$

$$=\frac{h^2\mu\mu_2^2}{\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{\bar{K}^{+}(i\tau)}\frac{\left(k_2^2+\tau^2\right)^2d\tau}{\left(k_1^2+\tau^2\right)\left(\mu^2\left(k^2+\tau^2\right)+h^2\mu_2^2\left(k_2^2+\tau^2\right)^2\right)\left(\tau+i(\sigma-io)\right)}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{k}\frac{\sqrt{k^2-S^2}}{\bar{K}^{+}(S)}\frac{\left(k_2^2-S^2\right)^2}{\left(k_1^2-S^2\right)\left(\mu^2\left(k^2-S^2\right)+h^2\mu_2^2\left(k_2^2-S^2\right)^2\right)}\frac{dS}{S-(\sigma-io)}\right)+$$

$$+\frac{A_{-1}}{\sigma-(k_1+i0)}+\frac{B_{-1}}{\sigma-(\sigma_2+i0)} \tag{1.36}$$

$$\bar{F}_1^{+}(\sigma)=\bar{F}_1(\sigma)-\bar{F}_1^{-}(\sigma) \tag{1.37}$$

Подобным образом определяется $\bar{F}_2^{+}(\sigma)$ и $\bar{F}_2^{-}(\sigma)$.

$$\bar{F}_2^{-}(\sigma)=$$

$$=-\frac{h^2\mu\mu_2^2}{\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{\bar{K}^{+}(i\tau)}\frac{k_2^2+\tau^2}{\left(\mu^2\left(k^2+\tau^2\right)+h^2\mu_2^2\left(k_2^2+\tau^2\right)^2\right)}\frac{d\tau}{\tau+i(\sigma-io)}-\right. \tag{1.38}$$

$$\left.-\int_0^{k}\frac{\sqrt{k^2-S^2}}{\bar{K}^{+}(S)}\frac{k_2^2-S^2}{\left(\mu^2\left(k^2-S^2\right)+h^2\mu_2^2\left(k_2^2-S^2\right)^2\right)}\frac{dS}{S-(\sigma-io)}\right)-\frac{D_{-1}}{\sigma-(\sigma_2+io)}$$

где

$$D_{-1}=-\frac{h\mu\mu_2\left(\sigma_2^2-k^2\right)}{\bar{K}^{+}(\sigma_2)\sigma_2\left(\mu+2h\mu_2\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\right)} \tag{1.39}$$

$$\bar{F}_2^{+}(\sigma)=\bar{F}_2(\sigma)-\bar{F}_2^{-}(\sigma) \tag{1.40}$$

Имея (1.36), (1.37) и (1.38), (1.39) с (1.30), можем (1.29) записать в следующем виде, учитывая, что

$$2\pi i\delta(\sigma-k\cos\beta)=\frac{1}{\sigma-k\cos\beta-i0}-\frac{1}{\sigma-k\cos\beta+i0} \quad (1.41)$$

$$\bar{M}^{-}(\sigma)=\bar{K}^{-}(\sigma)\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma)-\bar{F}^{-}(\sigma)+\frac{A_0}{\sigma-k\cos\beta-i0}=$$

$$=\frac{\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{\bar{K}^{+}(\sigma)}+\bar{F}^{+}(\sigma)+\frac{A_0}{\sigma-k\cos\beta+i0}=\bar{M}^{+}(\sigma) \quad (1.42)$$

где $A_0=\dfrac{h\mu\mu_2 k\sin\beta\left(k_2^2-k^2\cos\beta\right)}{i\mu k\sin\beta+h\mu_2\left(k_2^2-k^2\cos^2\beta\right)}\dfrac{e^{ikh\sin\beta}}{\bar{K}^{+}(k\cos\beta)}$ (1.43)

$$\bar{F}^{+}(\sigma)=\bar{F}_1^{+}(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_1}\right)+\bar{F}_2^{+}(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_2}\right) \quad (1.44)$$

$$\bar{F}^{-}(\sigma)=\bar{F}_1^{-}(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_1}\right)+\bar{F}_2^{-}(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_2}\right) \quad (1.45)$$

Дальнейший ход рассуждений проводится, как в работе [4].

Для решения уравнения (1.42) применим к нему обратное преобразование Фурье. В итоге получим

$$M^{+}(x)=M^{-}(x) \quad -\infty<x<\infty \quad (1.46)$$

которое может иметь место только если [5, 6]

$$M^{+}(x)=M^{-}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta^{k}(x) \quad (1.47)$$

где $\delta^{(k)}(\sigma)-k$ -ая производная функции $\delta(x)$, $\delta^{(0)}(x)=\delta(x)$. Применив к (1.47) преобразование Фурье, получим

$$\bar{M}^{+}(\sigma)=\bar{M}^{-}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}(-i)^k a_k\sigma^k \quad (1.48)$$

Как мы видели выше, $\bar{K}^{\pm}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$.

Как показано в [4], $q_1^{(1)-}(x)+q_1^{(2)+}(x)=O(\ln|x|)$ при $|x|\to 0$, откуда следует, что

$$\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma)=O\left((\sigma-io)^{-1}\ln(\sigma-io)\right);\quad \bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)=O\left((\sigma+io)^{-1}\ln(\sigma+io)\right)$$

Поскольку $\bar{F}(\sigma)=O\left(|\sigma|^{-1}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$, то

$$\bar{F}^{+}(\sigma)=O\left((\sigma+io)^{-1}\ln(\sigma+io)\right);\qquad \bar{F}^{-}(\sigma)=O\left((\sigma-io)^{-1}\ln(\sigma-io)\right)$$

при $|\sigma|\to\infty$, тогда из вышесказанного следует, что $\bar{M}^{+}(\sigma)\to 0$, $\bar{M}^{-}(\sigma)\to 0$ при $|\sigma|\to\infty$, следовательно, из (1.48) следует, что $a_k=0$, $k=\overline{0,n}$, которое означает, что

$$\bar{M}^{+}(\sigma)\equiv 0;\ \bar{M}^{-}(\sigma)\equiv 0\ -\infty<\sigma<\infty \tag{1.49}$$

Из (1.51) $\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma)$, $\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)$ определяются в виде

$$\bar{q}_1^{(1)^-}(\sigma)=\frac{\bar{F}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)}-\frac{A_0}{\bar{K}^-(\sigma)(\sigma-k\cos\beta-io)} \tag{1.50}$$

$$\bar{q}_1^{(2)^+}(\sigma)=\bar{K}^+(\sigma)\bar{F}^+(\sigma)-\frac{A_0}{(\sigma-k\cos\beta+io)}\bar{K}^+(\sigma) \tag{1.51}$$

Постоянные $X, V(o)$ определяются из условий

$$X+i\mu_1k_1V(o)=-\frac{\bar{q}_1^{(1)^-}(-k_1)}{h}\quad X-i\mu_2k_2V(o)=\frac{\bar{q}_1^{(2)^+}(k_2)}{h}$$

Имея (1.50), (1.51) для $\bar{W}_1(\sigma,y)$ с помощью (1.24) с (1.17), получим

$$\bar{W}_1(\sigma,y)=-\frac{\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma)+\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}}e^{-\gamma(y-h)}+ \tag{1.52}$$

$$+2\pi i\sin(kh\sin\beta)e^{ik\sin\beta(y-h)}\delta(\sigma-k\cos\beta)+2\pi\cos(ky\sin\beta)\delta(\sigma-k\cos\beta)$$

Применим к (1.52) обратное преобразование Фурье, с помощью контурного интегрирования определим $W_1(x,y)$ при $x<0$, $x>0$. Имея в виду четность функции $W_1(x,y)$ по y рассмотрим случай $y>0$

$$W_1(x,y)=-\frac{1}{\mu\pi}\left[\int_0^\infty\frac{\bar{q}_1^{(2)+}(i\tau)\cos\sqrt{\tau^2+k^2}\,y_1}{\sqrt{\tau^2+k^2}}e^{\tau x}d\tau+i\int_0^k\frac{\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\sqrt{k^2-\sigma^2}}e^{-i\sigma x}d\sigma\right]+$$

$$+\frac{1}{\mu_2\pi}\left[\int_0^\infty\frac{h\left(\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)V(o)i\tau-X(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)\tau^2)\right)}{(k_2^2+\tau^2)\left(\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2+\tau^2)^2\right)}\times\right.$$

$$\times\left(\mu\sqrt{k^2+\tau^2}\cos\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1-\mu_1h\left(k_1^2+\tau^2\right)\sin\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1\right)e^{-\tau x}d\tau-$$

$$-\int_0^k\frac{h\left(\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)V(o)i\sigma-X(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma^2)\right)}{(k_2^2-\sigma^2)\left(\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2-^2\sigma)^2\right)}\times$$

$$\times\left(\mu\sqrt{k^2-\sigma^2}\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1-\mu_1h\left(k_1^2-\sigma^2\right)\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1\right)e^{-i\sigma x}d\sigma+$$

$$+\frac{\mu_1}{\mu\mu_2\pi}\left[\int_0^\infty\frac{\bar{F}^+(i\tau)\bar{K}^+(i\tau)\left(\mu_1k^2+h^2\mu_1\mu_2k_1^2k_2^2+\left(\mu^2+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+k_2^2\right)\right)\tau^2+h^2\mu_1\mu_2\tau^4\right)}{\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2+\tau^2)^2}\times\right.$$

$$\times\frac{k_1^2+\tau^2}{k_2^2+\tau^2}\frac{\cos\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1}{\sqrt{k^2+\tau^2}}e^{\tau x}d\tau-$$

$$-\int_0^k\frac{\bar{F}^+(\sigma)\bar{K}^+(\sigma)\left(\mu_2k^2+h^2\mu_1\mu_2k_1^2k_2^2-\left(\mu^2+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+k_2^2\right)\right)\sigma^2+h^2\mu_1\mu_2\sigma^4\right)}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2-\sigma^2)^2}\times$$

$$\times\frac{k_1^2-\sigma^2}{k_2^2-\sigma^2}\frac{\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\sqrt{k^2-\sigma^2}}e^{-i\sigma x}d\sigma\Bigg]+$$

$$+\frac{\mu_1 h}{\mu_2\pi}\Bigg[\int_0^\infty\frac{\bar{F}^+(i\tau)\bar{K}^+(i\tau)\left(\mu_2k_2^2+\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)\tau^2\right)\sin\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1}{\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2+\tau^2)^2}\frac{k_1^2+\tau^2}{k_2^2+\tau^2}e^{\tau x}d\tau-$$

$$-\int_0^k\frac{\bar{F}^+(\sigma)\bar{K}^+(\sigma)\left(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma^2\right)\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2-\sigma^2)^2}\frac{k_1^2-\sigma^2}{k_2^2-\sigma^2}e^{-i\sigma x}d\sigma\Bigg]+$$

$$+\frac{\mu_1A_0}{\mu\mu_2\pi}\Bigg[\int_0^\infty\frac{h\sqrt{k^2+\tau^2}\left(\mu_1k_1^2-\mu_2k_2^2+(\mu_1-\mu_2)\tau^2\right)\sin\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1}{\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2+\tau^2)^2}-$$

$$-\frac{\left[\mu^2k^2+h^2\mu_1\mu_2k_1^2k_2^2-\left(\mu^2+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+k_2^2\right)\right)\tau^2+h^2\mu_1\mu_2\tau^4\right]\cos\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1}{\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2+\tau^2)^2}\times$$

$$\times\frac{\bar{K}^+(i\tau)}{i\tau-k\cos\beta+i0}\frac{k_1^2+\tau^2}{k_2^2+\tau^2}\frac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}}e^{\tau x}d\tau-$$

$$-i\int_0^k\frac{h\sqrt{k^2-\sigma^2}\left(\mu_1k_1^2-\mu_2k_2^2-(\mu_1-\mu_2)\sigma^2\right)\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2-\sigma^2)^2}-$$

$$-\frac{\left[\mu^2k^2+h^2\mu_1\mu_2k_1^2k_2^2-\left(\mu^2+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+k_2^2\right)\right)\sigma^2+h^2\mu_1\mu_2\sigma^4\right]\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_1^2h^2(k_1^2-\sigma^2)^2}\times$$

$$\times\frac{\bar{K}^+(\sigma)}{\sigma-k\cos\beta+io}\frac{k_1^2-\sigma^2}{k_2^2-\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{k_2^2-\sigma^2}}e^{-i\sigma x}d\sigma-$$

$$-\left(\sin(kh\sin\beta)-\frac{A_0}{\mu\bar{K}^-(k\cos\beta)k\sin\beta}\right)e^{ikR_1(\sin\beta\sin\theta+\cos\beta|\cos\theta|)}+$$

при $x<0$

$$+\cos(kR\sin\beta\sin\theta)e^{ikR\cos\beta\cos\theta}+i(B_2+B_3)e^{-i\sigma_1x}e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,y_1}$$

где $R_1\sin\theta=y$; $R_1\cos\theta=x$; $R_1^2=x^2+y^2$; $y_1=y-h$

$$B_2=h\mu\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\left(\frac{(i\sigma_1\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)V(o)-X\left(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma_1^2\right)}{\mu_2\sigma_1(k_2^2-\sigma_1^2)\left(\mu+2h\mu_1\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\overline{F}^+(\sigma_1)\bar{K}^+(\sigma_1)\mu_1(k_1^2-\sigma_1^2)(i\mu\sqrt{\sigma_1^2-k_1^2}-h\mu_2(k_2^2-\sigma_1^2)}{\mu_2\sigma_1(k_2^2-\sigma_1^2)\left(\mu+2h\mu_1\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\right)}\right)$$

$$B_3=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{k_1^2-\sigma_1^2}{k_2^2-\sigma_1^2}\frac{\mu\sqrt{\sigma_1^2-k_1^2}-h\mu_2\left(k_2^2-\sigma_1^2\right)}{\sigma_1\left(\mu+2h\mu_1\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\right)}\frac{A_0\bar{K}^+\left(\sigma_1\right)}{\sigma_1-k\cos\beta+io}$$

$$W_1\left(x,y\right)=-\frac{1}{\mu\pi}\left[\int_0^\infty\frac{\bar{q}_1^{(1)+}\left(-i\tau\right)\cos\sqrt{\tau^2+k^2}\,y_1}{\sqrt{\tau^2+k^2}}e^{-\tau x}d\tau+i\int_0^k\frac{\bar{q}_1^{(1)+}\left(-\sigma\right)\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\sqrt{k^2-\sigma^2}}e^{i\sigma x}d\sigma\right]+$$

$$+\frac{1}{\mu_2\pi}\left[\int_0^\infty\frac{h\left(\mu_1\mu_2(k_1^2-k_2^2)V(o)\tau+X(\mu_1k_1^2-\mu_2k_2^2-(\mu_2-\mu_1)\tau^2)\right)}{(k_1^2+\tau^2)\left(\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2+\tau^2)^2\right)}\times\right.$$

$$\times\left(i\mu\sqrt{k^2+\tau^2}\cos\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1-i\mu_2h\left(k_2^2+\tau^2\right)\sin\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1\right)e^{-\tau x}d\tau-$$

$$-i\int_0^k\frac{h\left(-\mu_1\mu_2(k_1^2-k_2^2)V(o)i\sigma-X(\mu_1k_1^2-\mu_2k_2^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma^2)\right)}{(k_1^2-\sigma^2)\left(\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2-\sigma^2)^2\right)}\times$$

$$\left.\times\left(i\mu\sqrt{k^2-\sigma^2}\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1-i\mu_2h\left(k_1^2-\sigma^2\right)\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1\right)e^{i\sigma x}d\sigma\right]$$

$$+\frac{\mu_1}{\mu\mu_2\pi}\left[\int_0^\infty\frac{\bar{P}^-\left(-i\tau\right)\left(\mu^2k^2+h^2\mu_1\mu_2k_1^2k_2^2+\left(\mu^2+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+k_2^2\right)\right)\tau^2+h^2\mu_1\mu_2\tau^4\right)}{\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2+\tau^2)^2}\times\right.$$

$$\times\frac{k_2^2+\tau^2}{k_1^2+\tau^2}\frac{\cos\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1}{\sqrt{k^2+\tau^2}}e^{-\tau x}d\tau-$$

$$-\int_0^k\frac{\bar{P}^-\left(-\sigma\right)\left(\mu^2k^2+h^2\mu_1\mu_2k_1^2k_2^2-\left(\mu^2+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+k_2^2\right)\right)\sigma^2+h^2\mu_1\mu_2\sigma^4\right)}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2-\sigma^2)^2}\times$$

$$\left.\times\frac{k_2^2-\sigma^2}{k_1^2-\sigma^2}\frac{\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\sqrt{k^2-\sigma^2}}e^{i\sigma x}d\sigma\right]+$$

$$+\frac{\mu_2}{\mu_1\pi}\left[\int_0^\infty\frac{\bar{P}^-\left(-i\tau\right)\left(\mu_1k_1^2-\mu_2k_2^2-\left(\mu_2-\mu_1\right)\tau^2\right)\sin\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1}{\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2+\tau^2)^2}\frac{k_2^2+\tau^2}{k_1^2+\tau^2}e^{-\tau x}d\tau-\right.$$

$$\left.-i\int_0^k\frac{\bar{P}^-\left(-\sigma\right)\left(\mu_1k_1^2-\mu_2k_2^2+\left(\mu_2-\mu_1\right)\sigma^2\right)\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2-\sigma^2)^2}\frac{k_2^2-\sigma^2}{k_1^2-\sigma^2}e^{i\sigma x}d\sigma\right]+$$

$$+\frac{A_0\mu_2}{\mu\mu_1\pi}\left[\int_0^\infty\left(\frac{h\sqrt{k^2+\tau^2}\left(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-\left(\mu_2-\mu_1\right)\tau^2\right)\sin\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1}{\left(\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2+\tau^2)^2\right)\bar{K}^-\left(-i\tau\right)\left(-i\tau-k\cos\beta+i0\right)}+\right.\right.$$

$$+\frac{\mu^2k^2+h^2\mu_1\mu_2k_1^2k_2^2-\left(\mu^2+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+k_2^2\right)\right)\tau^2+h^2\mu_1\mu_2\tau^4}{\left(\mu^2(k^2+\tau^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2+\tau^2)^2\right)\overline{K}^-\left(-i\tau\right)\left(-i\tau-k\cos\beta+i0\right)}\cos\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1\Bigg)\times$$

$$\times\frac{k_2^2+\tau^2}{k_1^2+\tau^2}e^{-\tau x}d\tau+$$

$$+i\int_0^k\left(\frac{h\sqrt{k^2-\sigma^2}\left(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+\left(\mu_2-\mu_1\right)\sigma^2\right)\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2-\sigma^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\mu^2k^2+h^2\mu_1\mu_2k_1^2k_2^2-\left(\mu^2+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+k_2^2\right)\right)\sigma^2+h^2\mu_1\mu_2\sigma^4\right)\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+\mu_2^2h^2(k_2^2-\sigma^2)^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\overline{K}^-\left(-\sigma\right)\left(-\sigma-k\cos\beta-i0\right)}\frac{k_2^2-\sigma^2}{k_1^2-\sigma^2}e^{i\sigma x}d\sigma-$$

$$-\left(\sin\left(kh\sin\beta\right)-A_0\overline{K}^+\left(k\cos\beta\right)\right)e^{ikR_1\left(\sin\beta\sin\theta+\cos\beta\cos\theta\right)}+$$

$$+\cos(kR\sin\beta\sin\theta)e^{ikR\cos\beta\cos\theta}-i(B_2'+B_3')e^{i\sigma_2x}e^{-\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\,y_1} \qquad (1.53)$$

при $x>0$

где
$$\overline{P}^-\left(\sigma\right)=\frac{\overline{F}^-\left(\sigma\right)}{\overline{K}^-\left(\sigma\right)}$$

$$B_3'=\frac{\mu_2}{\mu\mu_1}\frac{k_2^2-\sigma_2^2}{k_1^2-\sigma_2^2}\frac{i\mu\sqrt{\sigma_2^2-k^2}-h\mu_1\left(k_1^2-\sigma_2^2\right)}{\overline{K}^-\left(-\sigma_2\right)\left(-\sigma_2-k\cos\beta-io\right)}A_0$$

$$B_2'=h\mu\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\left[\frac{(-i\sigma_2\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)V(o)-X(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma_2^2)}{-\mu_2\sigma_2(k_2^2-\sigma_2^2)\left(\mu+2h\mu_2\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\overline{P}^-(-\sigma_2)\mu_2(k_2^2-\sigma_2^2)(i\mu\sqrt{\sigma_2^2-k^2}-h\mu_1(k_1^2-\sigma_2^2))}{-\mu_2\sigma_2(k_2^2-\sigma_2^2)\left(\mu+2h\mu_2\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\right)}\right]$$

Слагаемое, характеризующееся волновыми числами σ_1,σ_2, проявляет поверхностный характер (поверхностная волна Лява). Из значений множителей B_2,B_3,B_2',B_3' видно, что их значение экспоненциально убывает по y при $y>h$; $R_1\to\infty$.

Переходя к переменным $\lambda_1=-\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta+\sigma\left|\cos\theta\right|$; $\lambda_2=\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta+\sigma\left|\cos\theta\right|$, определяются асимптотические формулы для

$W_1(x,y)$ при $x>0$; $x<0$; $R_1 \to \infty$

$$W_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^{-ikh\sin\beta - ikR_1\cos(\theta-\beta)} + e^{ikh\sin\beta - ikR_1\cos(\theta+\beta)}\right) -$$

$$-\left(\sin(kh\sin\beta) + \frac{A_0\bar{K}^+(k\cos\beta)}{\mu k\sin\theta}\right)e^{ikR_1\cos(\theta-\beta)} - \tag{1.54}$$

$$-i\sqrt{\frac{k}{\pi}}\left(A_1'' + A_2'' + A_3''\right)e^{i\left(kR_1 - \frac{\pi}{4}\right)}(kR_1)^{-\frac{1}{2}} + O\left((kR_1)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

при $x>0$; $R_1 \to \infty$

где $A_1'' = \dfrac{\bar{q}_1^{(1)}(-k\cos\theta)}{\sqrt{2k}}$

$$A_2'' = \frac{ih\mu k\sin\theta\left(ik\cos\theta\mu_1\mu_2\left(k_1^2-k_2^2\right)V(0) + X\left(\mu_2 k_2^2 - \mu_1^2 k_1^2 + (\mu_1-\mu_2)k^2\cos^2\theta\right)\right)}{\sqrt{2k}\,\mu_1\left(i\mu k\sin\theta + h\mu_2\left(k_2^2 - k^2\cos^2\theta\right)\right)\left(k_1^2 - k^2\cos^2\theta\right)} -$$

$$-\frac{\bar{P}^-(-k\cos\theta)\mu_2\left(k_1^2 - k^2\cos^2\theta\right)\left(i\mu k\sin\theta + h\mu_1\left(k_1^2 - k^2\cos^2\theta\right)\right)}{\sqrt{2k}\,\mu_1\left(i\mu k\sin\theta + h\mu_2\left(k_2^2 - k^2\cos^2\theta\right)\right)\left(k_2^2 - k^2\cos^2\theta\right)}$$

$$A_3'' = \frac{\mu_2}{\sqrt{2k}\,\mu_1}\frac{A_0}{\bar{K}^-(-k\cos\theta)\left(k(\cos\theta+\cos\beta) - i0\right)} \times$$

$$\times\frac{k_2^2 - k^2\cos^2\theta}{k_1^2 - k^2\cos^2\theta}\frac{\mu k\sin\theta + h\mu_1\left(k_1^2 - k^2\cos^2\theta\right)}{\mu k\sin\theta + h\mu_2\left(k_2^2 - k^2\cos^2\theta\right)}$$

$$W_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^{-ikh\sin\beta - ikR_1\cos(\theta-\beta)} + e^{ikh\sin\beta - ikR_1\cos(\theta+\beta)}\right)$$

$$-\left(\sin(kh\sin\beta) + \frac{A_0}{\bar{K}^-(k\cos\beta)\,\mu k\sin\beta}\right)e^{ikR_1(\sin\beta\sin\theta + \cos\beta|\cos\theta|)} - \tag{1.55}$$

$$-i\sqrt{\frac{k}{\pi}}\left(A_1' + A_2' + A_3'\right)e^{i\left(kR_1 - \frac{\pi}{4}\right)}(kR_1)^{-\frac{1}{2}} + O\left((kR_1)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

при $x<0$; $R_1 \to \infty$

где $A_1' = \dfrac{\bar{q}_1^{(2)}(k|\cos\theta|)}{\sqrt{2k}}$

$$A_2' = \frac{ih\mu k\sin\theta\left(ik|\cos\theta|\mu_1\mu_2\left(k_2^2-k_1^2\right)V(0) - X\left(\mu_2 k_2^2 - \mu_1^2 k_1^2 + (\mu_1-\mu_2)k^2\cos^2\theta\right)\right)}{\sqrt{2k}\,\mu_2\left(i\mu k\sin\theta + h\mu_1\left(k_1^2 - k^2\cos^2\theta\right)\right)\left(k_2^2 - k^2\cos^2\theta\right)} -$$

$$-\frac{\bar{K}^+(k|\cos\theta|)\bar{F}^+(k|\cos\theta|)\mu_1\left(k_1^2 - k^2\cos^2\theta\right)\left(i\mu k\sin\theta + h\mu_2\left(k_2^2 - k^2\cos^2\theta\right)\right)}{\sqrt{2k}\,\mu_2\left(i\mu k\sin\theta + h\mu_1\left(k_1^2 - k^2\cos^2\theta\right)\right)\left(k_2^2 - k^2\cos^2\theta\right)}$$

$$A_3' = \frac{\mu_1}{\sqrt{2k}\mu_2} \frac{\bar{K}^+\left(k\left|\cos\theta\right|\right)A_0}{k\left(\left|\cos\theta\right| - \cos\beta\right) + i0} \frac{k_1^2 - k^2\cos^2\theta}{k_2^2 - k^2\cos^2\theta} \frac{\mu k\sin\theta + h\mu_2\left(k_2^2 - k^2\cos^2\theta\right)}{\mu k\sin\theta + h\mu_1\left(k_1^2 - k^2\cos^2\theta\right)}$$

2. Нечетная задача

В нечетной задаче очевидно, что $W_2\left(x,y\right)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и

$$U^{(2)}\left(x,-y\right) = -U^{(2)}\left(x,y\right) \tag{2.1}$$

$$\tau_{yz}\left(x,h\right) = \tau_{yz}\left(x,-h\right) = q\left(x\right) \quad -\infty < x < \infty \tag{2.2}$$

$\tau_{yz}\left(x,y\right)$ – касательное напряжение, действующее во включении

$$U^{(2)}\left(x,y\right) = U_2^{(1)-}\left(x,y\right) + U_2^{(2)+}\left(x,y\right)$$

$$U_2^{(1)-}\left(x,y\right) = \theta\left(-x\right)U_2^{(1)}\left(x,y\right),\ U_2^{(2)+}\left(x,y\right) = \theta\left(x\right)U_2^{(2)}\left(x,y\right)$$

где $\theta\left(x\right)$ – функция Хевисайда, $U_2^{(1)}\left(x,y\right), U_2^{(2)}\left(x,y\right)$ – амплитуды перемещений слоев, соответственно, в левой и правой частях.

В силу достаточно малости толщины включения можно полагать что $\tau_{yz}\left(x,y\right) = q\left(x\right)$, следовательно,

$$U_2^{(1)-}\left(x,h\right) = \frac{h}{\mu_1}q_2^{(1)-}\left(x\right);\ U_2^{(2)+}\left(x,h\right) = \frac{h}{\mu_2}q_2^{(2)+}\left(x\right) \tag{2.3}$$

где $q_2^{(1)^-}\left(x\right) = \theta\left(-x\right)q\left(x\right)$; $q_2^{(2)^+}\left(x\right) = \theta\left(x\right)q\left(x\right)$

Введем функцию перемещения

$$W_2'\left(x,y\right) = W_2\left(x,y\right) - U_{z2}^{\infty}\left(x,y\right) \tag{2.4}$$

которое удовлетворяет уравнению движения и представляет уходящую волну.

После преобразования Фурье, аналогично четной задаче, получим

$$\begin{aligned} \bar{W}_2'\left(\sigma,y\right) &= \bar{W}_2\left(\sigma,y\right) + 2\pi i\sin\left(ky\sin\beta\right)\delta\left(\sigma - k\cos\beta\right) = \\ &= C_2\left(\sigma\right)\operatorname{sgn} y e^{-\gamma|y|} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Имеем следующие контактные условия:

$$W_2\left(x,\pm h\right) = U_2^{(1)^-}\left(x,\pm h\right) + U_2^{(2)^+}\left(x,\pm h\right) \quad -\infty < x < \infty \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{\partial W_2}{\partial y}\right|_{y=\pm h} = \frac{1}{\mu}\left(q_2^{(1)^-}\left(x\right) + q_2^{(2)^+}\left(x\right)\right) \quad -\infty < x < \infty \tag{2.7}$$

Имея вышеуказанные контактные условия и (2.5), получаем

$$C_2\left(\sigma\right) = h\left(\frac{\bar{q}_2^{(1)-}\left(\sigma\right)}{\mu_1} + \frac{\bar{q}_2^{(2)+}\left(\sigma\right)}{\mu_2}\right)e^{\gamma h} + 2\pi i\sin\left(kh\sin\beta\right)\delta\left(\sigma - k\cos\beta\right)e^{\gamma h} \tag{2.8}$$

и следующее функциональное уравнение Винера-Хопфа относительно $q_2^{(1)-}\left(\sigma\right)$ и $q_2^{(2)+}\left(\sigma\right)$

$$\bar{q}_2^{(2)+}\left(\sigma\right) + \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mu_1 + h\mu\gamma}{\mu_2 + h\mu\gamma}\bar{q}_2^{(1)-}\left(\sigma\right) = -2\pi\frac{i\mu\mu_2 k\sin\beta}{\mu_2 - ih\mu k\sin\beta}e^{-ikh\sin\beta}\delta\left(\sigma - k\cos\beta\right) \tag{2.9}$$

Поступая аналогичным образом, как в четной задаче, получим решение функционального уравнения (2.10) в виде

$$\bar{q}_2^{(2)+}(\sigma) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} A_0 \frac{\bar{K}^+(\sigma)}{\sigma - k\cos\beta + io} \tag{2.10}$$

$$\bar{q}_2^{(1)-}(x) = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} A_0 \frac{1}{\bar{K}^-(\sigma)(\sigma - k\cos\beta - io)} \tag{2.11}$$

где
$$A_0 = \frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{2\pi\bar{K}^+(k\cos\beta)} \frac{\mu k\sin\beta}{\mu_2 - ih\mu k\sin\beta} e^{-ikh\sin\beta}$$

$$\bar{K}^-(\sigma) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{arctg}\left(\frac{h\mu(\mu_1-\mu_2)\sqrt{k^2+\tau^2}}{\mu_1\mu_2 + h^2\mu^2(k^2+\tau^2)}\right)\frac{d\tau}{\tau + i(\sigma - io)} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi}\int_0^k \operatorname{arctg}\left(\frac{h\mu(\mu_1-\mu_2)\sqrt{k^2-S}}{\mu_1\mu_2 + h^2\mu^2(k^2-S)}\right)\frac{dS}{S-(\sigma-io)}\right\}$$

$$\bar{K}^+(\sigma) = \bar{K}^-(-\sigma)$$

В силу нечетности задачи будем рассматривать случай $y > 0$. Учитывая, что имеет место

$$\bar{W}_2(\sigma, y) = h\left(\frac{1}{\mu_1}\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) + \frac{1}{\mu_2}\bar{q}_2^{(1)+}(\sigma)\right)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y_1} +$$

$$+2\pi i\sin(kh\sin\beta)e^{ik\sin\beta y_1}\delta(\sigma - k\cos\beta) - 2\pi i\sin(ky\sin\beta)\delta(\sigma - k\cos\beta)$$

после преобразования Фурье будем иметь $W_2(x, y)$ при $x < 0$, $x > 0$ (здесь тоже используется метод контурного интегрирования).

$$W_2(x,y) = \frac{h}{\mu\pi}\left[\int_0^\infty \bar{q}_2^{(2)+}(i\tau)\sin\sqrt{\tau^2+k^2}\,y_1\, e^{\tau x}d\tau + \int_0^k \bar{q}_2^{(2)+}(\sigma)\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1\, e^{-i\sigma x}d\sigma\right] +$$

$$+\frac{A_0 h}{\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left[\int_0^\infty \frac{-\left(\mu_1\mu_2 + h^2\mu^2(k^2+\tau^2)\right)\sin\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1 + h\mu(\mu_1-\mu_2)\sqrt{k^2+\tau^2}\cos\sqrt{k^2+\tau^2}\,y_1}{\mu_1^2 + \mu^2h^2(k^2+\tau^2)}\times\right.$$

$$\times\frac{\bar{K}^+(i\tau)}{i\tau - k\cos\beta + io}e^{\tau x}d\tau +$$

$$+i\int_0^k \frac{-\left(\mu_1\mu_2 + h^2\mu^2(k^2-\sigma^2)\right)\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1 + h\mu(\mu_1-\mu_2)\sqrt{k^2-\sigma^2}\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\mu_1^2 + \mu^2h^2(k^2-\sigma^2)}\times$$

$$\left.\times\frac{\bar{K}^+(i\tau)}{\sigma - k\cos\beta + io}e^{-i\sigma x}d\sigma\right] - i\frac{hA_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\frac{\bar{K}^+(k\cos\beta)}{\bar{K}(k\cos\beta)}e^{ik(y_1\sin\beta - x\cos\beta)} +$$

$$+i\sin(kh\sin\beta)e^{ik(\sin\beta y_1 - \cos\beta x)} - i\sin(kh\sin\beta)e^{-ikx\cos\beta} \qquad x < 0$$

$$W_2(x,y)=\frac{h}{\mu_1\pi}\left[\int_0^\infty \bar{q}_2^{(1)-}(-i\tau)\sin\sqrt{\tau^2+k^2}\,y_1 e^{-\tau x}d\tau+\int_0^k \bar{q}_2^{(1)-}(-\sigma)\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1 e^{i\sigma x}d\sigma\right]+$$

$$+\frac{A_0 h}{\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left[\int_0^\infty \frac{-\left(\mu_1\mu_2+h^2\mu^2\left(k^2+\tau^2\right)\right)\sin\sqrt{\tau^2+k^2}\,y_1}{\bar{K}^-(-i\tau)\left(\mu_2^2+\mu^2h^2(k^2+\tau^2)\right)\left(-i\tau-k\cos\beta-io\right)}+\right.$$

$$+\frac{h\mu(\mu_1-\mu_2)\sqrt{\tau^2+k^2}\cos\sqrt{\tau^2+k^2}\,y_1}{\bar{K}^-(-i\tau)\left(\mu_1^2+\mu^2h^2(k^2+\tau^2)\right)\left(-i\tau-k\cos\beta-io\right)}e^{-\tau x}d\tau+$$

$$+i\int_0^k \frac{-\left(\mu_1\mu_2+h^2\mu^2\left(k^2-\sigma^2\right)\right)\sin\sqrt{\tau^2-\sigma^2}\,y_1}{\bar{K}^-(-i\sigma)\left(\mu_1^2+\mu^2h^2(k^2+\sigma^2)\right)\left(-\sigma-k\cos\beta-io\right)}+$$

$$+\frac{h\mu(\mu_2-\mu_1)\sqrt{k^2-\sigma^2}\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}\,y_1}{\bar{K}^-(-\sigma)\left(\mu_2^2+\mu^2h^2(k^2-\sigma^2)\right)\left(-\sigma-k\cos\beta-io\right)}e^{i\sigma x}d\sigma-$$

$$-i\frac{hA_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\frac{\bar{K}(k\cos\beta)}{\bar{K}^-(k\cos\beta)}e^{ik(\sin\beta y_1-x\cos\beta)}+i\sin(kh\sin\beta)e^{ik(\sin\beta y_1-x\cos\beta)}-$$

$$-i\sin(ky\sin\beta)e^{-ikx\cos\beta}\qquad\qquad x>0$$

Асимптотические формулы для $W_2(x,y)$ при $x<0$ и $x>0$, $R_1\to\infty$ приводятся точно так, как в четной задаче. Асимптотические формулы имеют следующий вид:

$$W_2(x,y)=\frac{1}{2}\left(e^{-ikh\sin\beta-ikR_1\cos(\theta-\beta)}-e^{ikh\sin\beta-ikR_1\cos(\theta+\beta)}\right)+$$

$$+i\left(\sin(kh\sin\beta)-\frac{hA_0\bar{K}^+(k\cos\beta)}{\sqrt{\mu_1\mu_2}\bar{K}(k\cos\beta)}\right)e^{-ikR_1\cos(\theta+\beta)}+$$

$$+\left(A_1'+A_2'\right)e^{i\left(kR_1-\frac{\pi}{4}\right)}(kR_1)^{-\frac{1}{2}}+O\left((kR_1)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$R_1\to\infty;\ x<0;\ \theta\neq\pi-\beta$$

где
$$A_1'=\frac{h}{\mu_2}\frac{\bar{q}_2^{(2)+}(k|\cos\theta|)k\sin\theta}{\sqrt{2\pi}}$$

$$A_2'=-\frac{hA_0}{\sqrt{2\pi\mu_1\mu_2}}\frac{\bar{K}^+(k|\cos\theta|)k\sin\theta}{k(|\cos\theta|-\cos\beta)}\frac{\mu_2-ih\mu k\sin\theta}{\mu_1-ih\mu k\sin\theta}$$

$$W_1(x,y)=\frac{1}{2}\left(e^{-ikh\sin\beta-ikR_1\cos(\theta-\beta)}-e^{ikh\sin\beta-ikR_1\cos(\theta+\beta)}\right)+$$

$$+\left(\sin(kh\sin\beta)-\frac{hA_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}\,\bar{K}^-(k\cos\beta)}\right)e^{-ikR_1\cos(\theta+\beta)}+$$

$$+\left(A_1''+A_2''\right)e^{i\left(kR_1-\frac{\pi}{4}\right)}\left(kR_1\right)^{-\frac{1}{2}}+O\left(\left(kR_1\right)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$R_1\to\infty;\ x>0$$

где
$$A_1''=\frac{h}{\mu_1}\frac{\bar{q}_2^{(1)-}(-k\cos\theta)k\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$A_2''=-\frac{h\,A_0}{\sqrt{2\pi\mu_1\mu_2}}\frac{k\sin\theta}{\bar{K}^-(-k\cos\theta)k(\cos\theta+\cos\beta)}\frac{\mu_1-ih\mu k\sin\theta}{\mu_2-ih\mu k\sin\theta}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т. 56. №4. С.3-17.
2. Геворкян А.В. Об одной задаче дифракции волн Льява. / В кн.: Материалы второй всесоюзной-технической конференции «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов», Ереван. 1984. Т.1. С.162-167.
3. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 279с.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ. 1979. Т.3. С.29-34.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 327с.
6. Справочник по спец. функциям под ред. Абрамовица. М.: Физматгиз, 1979. 832с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
28.11.2006