

УДК 537.2: 539.3

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ  
ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РОМБИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО  
КРИСТАЛЛА КЛАССА 222 И УПРУГОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИЗОТРОПНОЙ  
СРЕДЫ

Берберян А.Х.

**Ключевые слова:** Отражение и преломление, электроупругой сдвиговой волны, упругой диэлектрической изотропной среда.

**Keywords:** Reflection and refraction, electroelastic shear wave, piezoelectric rhombic crystal of 222 class.

Ա.Խ.Բերբերյան

Սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքի անդրադարձումը և բեկումը շեղանկյուն 222 դասի  
այլեզոնէլեկտրիկ բյուրեղի և առաձգական իզոտրոպ դիէլեկտրիկ միջավայրի բաժանման սահմանից

Դիտարկված է սահքի էլեկտրաառաձգական հարթ ալիքի անդրադարձումը և բեկումը 222 դասի  
շեղանկյուն այլեզոնէլեկտրիկ բյուրեղի և առաձգական իզոտրոպ դիէլեկտրիկ միջավայրի բաժանման  
սահմանից: Որոշված են ալիքների լայնույթային գործակիցները: Ցույց է տրված, որ բյուրեղներում  
առաջանում են ուղեկցող մակերևութային ալիքներ:

A.Kh.Berberyanyan

**Reflection and refraction of an electroelastic shear wave at the interface between a piezoelectric rhombic  
crystal of 222 class and elastic dielectric izotropic medium**

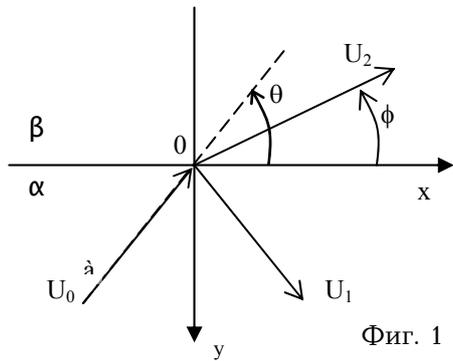
The reflection and refraction of a flat electroelastic shear wave from border of a rhombic piezoelectric crystal  
of a class 222 and elastic dielectric izotropic medium is considered. The peak ratio of arising waves are  
determined. Is shown, that in the crystal there are accompanying surface waves.

Рассмотрено отражение и преломление плоской электроупругой сдвиговой волны от границы  
раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 и упругой диэлектрической  
изотропной среды. Определены амплитудные коэффициенты возникающих волн. Показано, что в  
кристалле возникают сопутствующие поверхностные волны.

1. Как известно [1-4,6], наличие пьезоэлектрических свойств у кристалла может существенно менять поведение волновых процессов, хотя коэффициент электромеханической связи для известных пьезокристаллов мал по сравнению с единицей. Такая ситуация возникает, например, при отражении и преломлении электроупругих волн на границе пьезоэлектрика. В работе [8] для пьезокристаллов ромбической симметрии класса 222 показано, что наличие пьезоэффекта приводит к возникновению в кристалле дополнительных электроупругих колебаний, которые не являются собственными колебаниями кристалла и возникают только в присутствии падающей на границу раздела электроупругой волны. Такое колебание локализуется у границы кристалла и называется сопутствующим поверхностным колебанием (СПК) [1,5,8]. В настоящей работе рассматривается задача преломления сдвиговой электроупругой волны на границе раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 с изотропным диэлектриком, и при этом наблюдается возникновение СПК.

Будем считать, что ромбический пьезоэлектрический кристалл класса 222 в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  находится в акустическом контакте вдоль плоскости  $y=0$  с изотропным упругим диэлектриком. Величины, характеризующие пьезоэлектрик, находящийся при  $y>0$ , обозначим индексом  $\alpha$ , а при  $y<0$  – индексом  $\beta$ . Одна из осей симметрии второго порядка ромбического кристалла параллельна оси  $Oz$  (фиг. 1). Пусть кристаллы находятся в антиплоском деформированном состоянии, так что упругие и электрические поля в средах имеют вид:

$$\begin{aligned} y > 0: \bar{u}_\alpha &= \{0, 0, u_\alpha(x, y, t)\}; \varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, y, t) \\ y < 0: \bar{u}_\beta &= \{0, 0, u_\beta(x, y, t)\}; \varphi_\beta = \varphi_\beta(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$



где  $\bar{u}$  – вектор упругого перемещения точек среды,  $\varphi$  – потенциалы электрических полей в средах.

При сделанных предположениях из соотношений линейной теории электроупругости и квазистатического электрического поля получаются следующие уравнения и граничные условия для рассматриваемой задачи [1,6]:

1. в области  $y > 0$ :

$$\begin{aligned} c_{44} \left( \alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} \right) + e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \\ e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} - \varepsilon_{22} \left( \gamma \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. в области  $y < 0$

$$\begin{aligned} c_{44}^\beta \left( \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} \right) &= \rho^\beta \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия при  $y = 0$ :

$$u^\alpha = u^\beta; \varphi^\alpha = \varphi^\beta; D_y^\alpha = D_y^\beta; \sigma_{zy}^\alpha = \sigma_{zy}^\beta \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} D_y^\alpha &= \beta e_{14}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \varepsilon_{22}^\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y}; \sigma_{zy}^\alpha = c_{44}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + e_{14}^\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \\ D_y^\beta &= -\varepsilon_{22}^\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y}; \sigma_{zy}^\beta = c_{44}^\beta \frac{\partial u_\beta}{\partial y} \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:  $c_{44}^\alpha, c_{44}^\beta$  – упругие постоянные,  $e_{14}^\alpha$  – пьезоэлектрический модуль,  $\varepsilon_{11}^\alpha, \varepsilon_{11}^\beta$  – диэлектрические проницаемости,  $\rho^\alpha, \rho^\beta$  – плотности ромбического пьезокристалла и упругой среды соответственно. В работе используется международная система измерения СИ.

2. Сначала рассмотрим решения уравнений (1.2) и (1.3) электроупругости, представляющих собой плоские гармонические волны

$$u = Ue^{i(px+qy-\omega t)}, \quad \varphi = \Phi e^{i(px+qy-\omega t)} \quad (2.1)$$

где  $U$  и  $\Phi$  – амплитуды перемещения и потенциала в волне,  $p$  и  $q$  – продольное и поперечное волновые числа относительно оси  $Ox$ ,  $\omega$  – частота колебаний.

Для ромбического пьезокристалла, подставляя решение (2.1) в систему уравнений (1.2), из условия разрешимости этой системы получаем дисперсионное уравнение для поперечного волнового числа  $q$  и соотношение между амплитудами смещения  $U_\alpha$  и потенциала  $\Phi_\alpha$ .

$$(p^2 + q_\alpha^2)(p^2 + q_\alpha^2 - S_0^{-2}\omega^2) + 4\chi_\alpha^2 p^2 q_\alpha^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$[(p^2 + q_\alpha^2) - \rho_\alpha \omega^2]U_\alpha + 2e_{14} p q_\alpha \Phi_\alpha = 0 \quad (2.3)$$

или 
$$2e_{14} p q_\alpha U_\alpha - \varepsilon_{11}^\alpha (p^2 + q_\alpha^2) \Phi_\alpha = 0 \quad (2.4)$$

где 
$$S_\alpha^2 = S_0^2 = \frac{c_{44}^\alpha}{\rho_\alpha}, \quad \chi_\alpha^2 = \frac{e_{14}^2}{c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha} \quad (2.5)$$

Здесь  $S_\alpha$  – скорость объемной упругой волны в ромбическом пьезокристалле в направлении оси  $Oy$ ,  $\chi_\alpha$  – коэффициент электромеханической связи.

$$k_\alpha^2 = \omega^2 / S_\alpha^2 (1 + \chi_\alpha^2 \sin^2 2\theta) \quad (2.6)$$

Отметим, что  $k_\alpha$  принимает действительные значения для любого  $\theta$ . Этот факт следует из того, что средняя во времени потенциальная энергия волны положительна [1,2,7]. Отсюда следует, что плоская однородная волна распространяется в любом направлении, заданном волновым вектором  $\vec{k}_\alpha$ .

Таким образом, дисперсионное уравнение (2.2) при любом вещественном значении  $p = k_\alpha \cos \theta$ , где  $k_\alpha$  определяется по (2.6), имеет пару вещественных корней для  $q^\alpha$ , которые определяются формулами:

$$q_1^\alpha = \pm q_0^\alpha, \quad q_0^\alpha = k_\alpha \sin \theta = p \operatorname{tg} \theta \quad (2.7)$$

и отвечают зеркально-симметричным волнам. Другую пару корней уравнения (2.2) можно определить, используя теорему Виета [8]. Получим  $q_2^\alpha = \pm ir$ , где

$$r = \frac{\omega |\cos \theta| \sqrt{1 + 4\chi_\alpha^2 \cos^2 \theta}}{S_\alpha \sqrt{1 + \chi_\alpha^2 \sin^2 2\theta}} \quad (2.8)$$

Таким образом, уравнения пьезокристалла (1.2) имеют решения вида (2.1), представляющие неоднородные плоские волны:

$$\begin{aligned} u &= U e^{\pm ry + i(px - \omega t)} \\ \varphi &= \Phi e^{\pm ry + i(px - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

которые распространяются в направлении оси  $Ox$  и убывают в направлении оси  $Oy$  (при знаке "+") или  $-Oy$  (при знаке "-"). Ясно, что для безграничного кристалла они не имеют физического смысла и могут описывать физический процесс в ограниченных кристаллах.

Перейдем к уравнению (1.3), описывающему квазистатическое поле в упругой диэлектрической изотропной среде. Решение будем искать в виде:

$$u_\beta = U_\beta e^{i(px + qy - \omega t)}, \quad \varphi_\beta = \Phi_\beta e^{i(px + qy - \omega t)} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (1.3), получим следующее дисперсионное уравнение

$$(q^2 + p^2)(q^2 + p^2 - \omega^2 / S_\beta^2) = 0 \quad (2.11)$$

откуда  $q_{1,2} = \pm(k_\beta^2 - p^2)^{1/2}$ ,  $q_{1,2} = \pm i|p|$ , а волновое число среды равно  $k_\beta = \omega / S_\beta$ ,  $S_\beta = (c_{44}^\beta / \rho^\beta)^{1/2}$ . Имеющие физический смысл решения будут:

$$u_\beta = U_\beta e^{-iq_\beta y + i(px - \omega t)} \quad \varphi_\beta = \Phi_\beta e^{|i|y + i(px - \omega t)} \quad (2.12)$$

3. Вследствие взаимодействия падающей волны с границей раздела, в ромбическом пьезоэлектрике возникают: отраженные электроупругие плоские волны и сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны. Отбрасывая нефизические решения, растущие в глубь кристалла, имеем при  $y > 0$  полное решение:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_0^\alpha + u_1^\alpha = \left[ U_0 e^{-iq_0 y} + U_1 e^{iq_0 y} + iB\Phi_\alpha e^{-ry} \right] e^{i(px - \omega t)} \\ \varphi_\alpha &= \left[ -U_0 A e^{-iq_0 y} + AU_1 e^{iq_0 y} + \Phi_\alpha e^{-ry} \right] e^{i(px - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где 
$$A = \frac{e_{14}^\alpha \sin 2\theta}{\varepsilon_{11}^\alpha}, \quad B = \frac{2e_{14}^\alpha p \cos^2 \theta}{c_{44}^\alpha r}$$

В упругой диэлектрической изотропной среде возникают преломленные волны и сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны. Преломленные волны распространяются, очевидно, в плоскости падения, поскольку проекция волновых векторов преломленных волн на границу раздела должны совпадать с той же проекцией волнового вектора падающей волны. В рассматриваемой плоскости падения, как отмечено в [1], квазипродольные и квазиперечные волны поляризованы в этой же плоскости ( $u_z = 0$ ) и непьезоактивны. Сдвиговые волны поляризованы перпендикулярно к плоскости падения ( $u_x = u_y = 0$ ,  $u_z \neq 0$ ), поэтому условие непрерывности вектора смещения на границе раздела требует, чтоб преломленная волна была также сдвиговой. Таким образом, отбрасывая нефизические решения, растущие в глубь кристалла, при  $y < 0$  имеем полное решение:

$$u_\beta = U_2 e^{-iq_\beta y} e^{i(px - \omega t)}, \quad \varphi_\beta = \Phi_\beta e^{|p|y} e^{i(px - \omega t)} \quad (3.2)$$

Вследствие удовлетворения граничным условиям, все волны имеют одинаковую частоту (и продольное волновое число  $p$  (т. е. волны вдоль

границы распространяются с одинаковой скоростью), совпадающие с соответствующими характеристиками падающей волны. Отраженная, преломленная и сопутствующие поверхностные волны имеют соответственно следующие волновые числа:

$$q = q_0 = k_\alpha \sin \theta, \quad q = q_\beta = (k_\beta^2 - p^2), \quad q = ir, \quad q = -|p| \quad (3.3)$$

где  $r$  определяется по (2.12) или (2.13).

Подставляя решения (3.1) и (3.2) в граничные условия (1.4), получим:

$$U_\alpha = R U_0, \quad U_\beta = \frac{(1 + d_1(1 - d_2) - im)U_0 + (1 + d_1(1 + d_2) + im)U_\alpha}{k_1 k_2} \quad (3.4)$$

$$\Phi_\alpha = -\frac{d_1 - d_2}{id_1 - d_2} U_0 - \frac{d_1 + d_2}{id_1 - d_2} U_\alpha + \frac{k_2}{id_1 - d_2} U_\beta, \quad \Phi_\beta = -A U_0 + A U_\alpha + \Phi_\alpha$$

где 
$$R = \frac{i(n_1 - n_2 - An_3) + N/B}{i(n_1 - n_2 - iAn_3) + N/B}$$

$$n_1 = d_1 \beta, \quad n_2 = A q_0 \varepsilon_{22}^\alpha, \quad n_3 = \varepsilon_{22}^\beta |p|, \quad N = (i - id_1^2 + d_1(i + d_3))(Bn_1 - r\varepsilon_{22}^\alpha - n_3)$$

$$m = c_{44}^\alpha d_2 r, \quad k_1 = (d_1 + ic_{44}^\alpha), \quad k_2 = c_{44}^\beta q_\beta, \quad d_1 = e_{14}^\alpha p, \quad d_2 = c_{44}^\alpha q_0, \quad d_3 = c_{44}^\alpha r$$

Полученные выражения описывают отражение и преломление сдвиговых акустоэлектрических волн на границе раздела ромбического пьезоэлектрика и упругой диэлектрической среды.

Обсудим полученные результаты. Рассмотрим вначале отражение волн от свободной границы, полагая  $c_{44}^\beta = e_{15}^\beta = 0$ ,  $\varepsilon_{11}^\beta = \varepsilon_*$  [8].

Обратим внимание на следующие важные обстоятельства. Если  $\theta \ll \chi_\alpha^2$ , то  $\Phi_2 \rightarrow 0$  и  $U_1 \rightarrow -U_0$ , т.е. сдвиговые электроупругие волны параллельно поверхности пьезокристалла рассматриваемой симметрии не распространяются. Между тем, без пьезоэффекта такое распространение возможно (при  $\chi^2=0$   $R_1=1$ ) [5]. Далее, при  $\chi^2$  амплитуда потенциала СПК существенно превосходит амплитуду потенциала отраженной волны.

Преломленная волна скользит во второй среде под углом  $\phi$ , находимым из соотношения:  $\cos \phi = S_\beta S_\alpha^{-1} \cos \theta$ , т.е. величина  $S_\beta S_\alpha^{-1}$  играет роль показателя преломления. Если показатель преломления больше единицы, то при углах скольжения  $\theta > \phi_n$  величина  $q_\beta$  становится мнимой и по модулю, равной единице, т. е. возникает полное внутреннее отражение. Как видно, пьезоэффект меняет величину  $\phi_n$  лишь постольку, поскольку перенормирует скорость акустических волн. В отличие от оптики и акустики непьезоэлектрических сред, отражение и преломление в пьезокристаллах отличается тем, что коэффициенты отражения и преломления – комплексные величины даже при углах скольжения, меньше угла полного внутреннего отражения  $\phi_n$ . Это означает, что на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей на величины  $\arctg(\text{Im } R/\text{Re } R)$  и  $\arctg(\text{Im } T/\text{Re } T)$  соответственно. Если показатель преломления меньше единицы и  $\rho^\alpha < \rho^\beta$ , то в непьезоэлектрических кристаллах граница может стать прозрачной ( $R = 0$ ) для волн, скользящих под

углом

$\theta_t = \arcsin\{ (S_\beta S_\alpha^{-1}) [(1 - S_\alpha^2 S_\beta^{-2})(\rho^\beta / \rho^\alpha - 1)]^{1/2} \}$ . В пьезоэлектриках условие прозрачности существенно ужесточается, т.к.  $R$  – комплексная величина и необходимо обращение в нуль ее действительной и мнимой частей.

**Закключение.** Рассмотрено отражение и преломление сдвиговых акустоэлектрических волн на границе раздела ромбического пьезоэлектрика и упругой (изотропной) диэлектрической среды.

Определены волновые поля в пьезоэлектрике и упругой диэлектрической среде. Показано, что падающие волны, отражаясь на границе упругой диэлектрической среды, преломляются, порождая в нем упругое поле, а также сопутствующие поверхностные колебания. Далее, сдвиговые волны не могут распространяться параллельно поверхности кристаллов при малых углах скольжения ( $< \chi^2$ ). При углах скольжения ( $> \phi_n$ ) ( $\cos \phi_n = S_\beta S_\alpha^{-1}$ ), и если показатель преломления больше единицы, величина  $q_\beta$  становится мнимой и по модулю равной единице, т.е. возникает полное внутреннее отражение. А также на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей на величины  $\arctg(\text{Im } R / \text{Re } R)$  и  $\arctg(\text{Im } T / \text{Re } T)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, сибирское отделение, 1982. 240с.
2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. // В кн.: "Актуальные проблемы неоднородной механики", Материалы Всесоюзного научного семинара, Ереван, 1991. 23–26 июня. С.49–54.
4. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. N3–4. С.78–82.
5. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Отражение упругой волны от границы раздела пьезокристалл-вакуум // ФТТ. 1969. Т.11. Вып.4. С.1027–1029
6. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезо-электрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. N1. С.12–19.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
8. Багдасарян Г.Е., Берберян А.Х., Даноян З.Н. Отражение электроупругой сдвиговой волны от границы раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 и вакуума // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. N3. С.42–48.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
7.11.2006