

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ
РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО
МАТЕРИАЛА ПО КРИТЕРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ

Белубекян Э. В., Погосян А. Г.

Ключевые слова: устойчивость, оптимизация, ребро, пластинка, критическая нагрузка, композиционный материал.

Key words: stability, optimization, rib, plate, critical force, composite-material.

Է.Վ. Բելուբեկյան, Ա.Գ. Պոգոսյան

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված կոշտության կողերով ուժեղացված ուղղանկյուն սալի
օպտիմալ նախագծումը ըստ կայունության չափանիշի

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված, եզրերով և թռիչքի մեջտեղում կոշտության կողերով ուժեղացված սալի համար, որն բեռնավորված է սեղմող ճիգերով, որոշվում են երկրաչափական և ֆիզիկական օպտիմալ պարամետրերը, որոնք ապահովում են կառուցվածքի կրիտիկական բեռի մեծագույն արժեքը:

E.V. Belubekyan, A.G. Poghosyan

Optimal design of the rectangular plate of composite material, reinforced with rigid ribs by the stability criterion

The optimal geometrical and physical parameters of the plate of composite material, which secure the maximal magnitude of the critical force in case of the constant weight and given gabarit sizes of the construction are determinate. The rectangular plate is reinforced by rigid ribs at free sides and in the middle of the plate and is compressed by planar forces.

Для пластинки, изготовленной из композиционного материала, усиленной ребрами жесткости по свободным кромкам и в середине пролета и шарнирно опертой по краям, нагруженным сжимающими усилиями, определяются оптимальные геометрические и физические параметры конструкции, обеспечивающие наибольшее значение критической нагрузки.

Рассматривается прямоугольная пластинка размерами $2a, b, h_2$, нагруженная по двум противоположным свободно опертым краям $y = 0, y = b$ равномерно распределенной сжимающей нагрузкой σ и усиленная по свободным краям $x = \pm a$ и в середине пролета $x = 0$ прямоугольными ребрами одинакового сечения $(\alpha h_1 \times h_1)$.

Предполагается, что пластинка составлена из монослоев волокнистого композиционного материала (ВКМ), уложенных поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси x , а в ребрах монослои ориентированы вдоль оси y .

Ставится задача определения оптимальных геометрических и физических параметров конструкции $h_1, h_2, \alpha, \varphi$, обеспечивающих максимальное значение критической нагрузки при неизменном весе и заданных габаритных размерах конструкции $\xi = (2a + 3\alpha h_1) / b$.

Задача оптимального проектирования по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по двум краям ребрами жесткости, рассмотрена в работе [1].

Постоянству веса конструкции соответствует условие

$$2a(h_0 - h_2) = 3\alpha h_1(h_1 - h_0) \quad (1)$$

где h_0 –соответствующая толщина сплошной пластинки заданного веса.

Решается задача устойчивости пластинки, удовлетворяющей условиям сопряжения с ребрами жесткости, работающими на изгиб и кручение. При этом, ввиду симметрии рассматривается половина пластинки ($x \geq 0$) с исследованием случаев симметричной и антисимметричной форм потери устойчивости.

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать ее ортотропной, для которой уравнение устойчивости записывается в виде

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

где D_{ik} – жесткости пластинки, определяемые по формуле

$$D_{ik} = \frac{B_{ik} h_2^3}{12} \quad (i, k = 1, 2, 6)$$

B_{ik} –упругие характеристики ВКМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через его характеристики в главных физических направлениях по известным формулам поворота [2].

Граничные условия запишутся в виде:

шарнирного опирания–

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b \quad (3)$$

упругого опирания на среднее ребро жесткости:

в случае симметричной формы потери устойчивости–

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad B \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2 \left(D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{при } x = 0 \quad (4)$$

в случае антисимметричной формы потери устойчивости–

$$w = 0, \quad C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = -2 \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{при } x = 0 \quad (5)$$

упругого опирания на крайнее ребро жесткости–

$$C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$B \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad \text{при } x = a \quad (6)$$

где $B = E\alpha h_1^4 / 12$ –жесткость ребра на изгиб, $A = \alpha h_1^2$ –площадь поперечного сечения ребра, C –жесткость ребра на кручение, определяемая по формуле [3]

$$C = G_{23} \alpha h_1^4 \beta, \quad \beta = d^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} d \sum_{1,3,\dots} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{\pi n}{2d} \right], \quad d = \alpha \sqrt{\frac{G_{23}}{G_{13}}} \quad (7)$$

G_{13} , G_{23} – модули сдвига материала ребра в плоскостях xOz и yOz .

Решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), принимается в виде

$$w = (C_{1m} \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m x + C_{2m} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m x + C_{3m} \cos \mu_{2m} \lambda_m x + C_{4m} \sin \mu_{2m} \lambda_m x) \sin \lambda_m y \quad (8)$$

где:

$$\mu_{1m} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_3^2 + D_{11} D_{22} (k_m^2 - 1)} + D_3}{D_{11}}}, \quad \mu_{2m} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_3^2 + D_{11} D_{22} (k_m^2 - 1)} - D_3}{D_{11}}}$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \quad D_3 = D_{12} + 2D_{66}, \quad k_m^2 = \frac{\sigma h_2}{D_{22} \lambda_m^2} \quad (9)$$

Удовлетворение условий (4), (6) приводит к однородной линейной системе уравнений относительно коэффициентов C_{im} ($i = 1, 2, 3, 4$). Из условия существования нетривиального решения этой системы получается следующее трансцендентное уравнение относительно коэффициента k_m для случая симметричной формы потери устойчивости

$$H_1(k_m) = [\mu_{1m} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_1 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - f_5] \times$$

$$\times [f_0 \cos \mu_{2m} \lambda_m a - f_4 \sin \mu_{2m} \lambda_m a - f_6] -$$

$$- [f_2 \cos \mu_{2m} \lambda_m a - \mu_{2m} \sin \mu_{2m} \lambda_m a - f_5] \times$$

$$\times [f_0 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - f_3 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_6] = 0 \quad (10)$$

где:

$$f_0 = \frac{m\pi \alpha h_1^2}{h_2} \left(\frac{E_1}{B_{22}} \frac{h_1^2}{h_2^2} - k_m^2 \right), \quad f_1 = \frac{h_2^3 (B_{11} \mu_{1m}^2 - B_{12})}{12m\pi G_{23} \alpha h_1^4 \beta}, \quad f_2 = \frac{h_2^3 (B_{11} \mu_{2m}^2 + B_{12})}{12m\pi G_{23} \alpha h_1^4 \beta}$$

$$f_3 = \mu_{1m} \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_{1m}^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \right), \quad f_4 = \mu_{2m} \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_{2m}^2 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \right)$$

$$f_5 = \frac{B_{22} f_0}{2B_{11} (\mu_{1m}^2 + \mu_{2m}^2)} \times$$

$$\times \left(\operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - \frac{f_1}{\mu_{1m}} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - \cos \mu_{2m} \lambda_m a - \frac{f_2}{\mu_{2m}} (\mu_{2m}^2 + \nu) \sin \mu_{2m} \lambda_m a \right)$$

$$f_6 = \frac{B_{22} f_0}{2B_{11} (\mu_{1m}^2 + \mu_{2m}^2)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\mu_{1m}} (f_0 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_3 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a) - \frac{1}{\mu_{2m}} (f_0 \sin \mu_{2m} \lambda_m a + f_4 \cos \mu_{2m} \lambda_m a) \right)$$

В случае антисимметричной формы потери устойчивости удовлетворение условий (5), (6) приводит к следующему трансцендентному уравнению относительно коэффициента k_m :

$$H_2(k_m) = [\mu_{1m} \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - f_1 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a + \mu_{1m} f_7] \times \\ \times [f_0 \sin \mu_{2m} \lambda_m a + f_4 \cos \mu_{2m} \lambda_m a + \mu_{2m} f_8] - [\mu_{2m} \cos \mu_{2m} \lambda_m a + \\ + f_2 \sin \mu_{2m} \lambda_m a + \mu_{2m} f_7] \times [f_0 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_3 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a + \mu_{1m} f_8] = 0 \quad (11)$$

где:

$$f_7 = \frac{6m\pi\alpha h_1^4 \beta G_{23}}{h_2^3 B_{11} (\mu_{1m}^2 + \mu_{2m}^2)} \times \\ \times (\mu_{1m} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_1 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a + \mu_{2m} \sin \mu_{2m} \lambda_m a - f_2 \cos \mu_{2m} \lambda_m a) \\ f_8 = \frac{6m\pi\alpha h_1^4 \beta G_{23}}{h_2^3 B_{11} (\mu_{1m}^2 + \mu_{2m}^2)} (f_0 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - f_3 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_0 \cos \mu_{2m} \lambda_m a + f_4 \sin \mu_{2m} \lambda_m a)$$

После определения коэффициента k_m соответственно из уравнений (10) или (11) значение критического напряжения, согласно (9), определится по формуле

$$\sigma_{\text{кр}} = k_m^2 \frac{D\lambda_m^2}{h_2} \quad (12)$$

Следует отметить, что в решении (8) и соответственно в уравнениях (10) и (11) принято $k_m > 1$, так как в случае наличия ребер критическое напряжение будет больше, чем для сплошной пластинки со свободными краями, где обычно принимается $k_m = 1$. Однако, при более точном удовлетворении граничных условий на свободных кромках сплошной пластинки значение k_m получается несколько меньшим единицы. С учетом того, что при поиске оптимального проекта ребристой пластинки могут рассматриваться также случаи отсутствия ребер или их малой толщины, здесь исследуется также случай $k_m < 1$. В этом случае решение уравнения (2) принимается в виде

$$w = (C_{1m} \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m x + C_{2m} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m x + C_{3m} \operatorname{ch} \mu_{2m} \lambda_m x + C_{4m} \operatorname{sh} \mu_{2m} \lambda_m x) \sin \lambda_m y$$

где

$$\mu_{1m} = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_{11} D_{22} (1 - k_m^2)}}{D_{11}}}, \quad \mu_{2m} = \sqrt{\frac{D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_{11} D_{22} (1 - k_m^2)}}{D_{11}}}$$

а в уравнениях (10) и (11) делаются замены $\cos \mu_{2m} \lambda_m x$ на $\operatorname{ch} \mu_{2m} \lambda_m x$ и $\sin \mu_{2m} \lambda_m x$ на $-\operatorname{sh} \mu_{2m} \lambda_m x$.

Поставленная задача оптимизации заключается в перераспределении материала ребристой конструкции между ребрами и пластинкой таким образом, чтобы обеспечить наибольшее значение критической нагрузки при заданных габаритных размерах ξ и условии постоянства веса конструкции (1).

Определение оптимальных параметров конструкции сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\max_x \min_m \sigma_{кр}, \quad \bar{x} = \{\alpha, h_1, h_2, \varphi\} \quad (13)$$

при ограничениях

$$H_i(k_m) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad h_2 = h_0 - \frac{3\alpha h_1}{2a}(h_1 - h_0) \quad (14)$$

$$h_0 \leq h_1 \leq 0.2b, \quad 0.2 \leq \alpha \leq 5, \quad \delta \leq h_2 \leq h_0 \quad (15)$$

Первое из ограничений в виде равенств (13) соответствует уравнению (10) или (11) относительно k_m , второе следует из условия постоянства веса конструкции (1). Ограничения в виде неравенств (15) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для δ принимается: $\delta = 0.01b$ при $a \geq b$, $\delta = 0.01a$ при $a < b$.

Задача решается методом деформируемого многогранника в сочетании с методом прямого поиска [4].

Числовые расчеты произведены для конструкции с габаритными размерами $\xi = 1, 2$ при $\bar{h}_0 = h_0/b = 0.015, 0.02, 0.03$. В качестве материала принят ВКМ со следующими приведенными характеристиками:

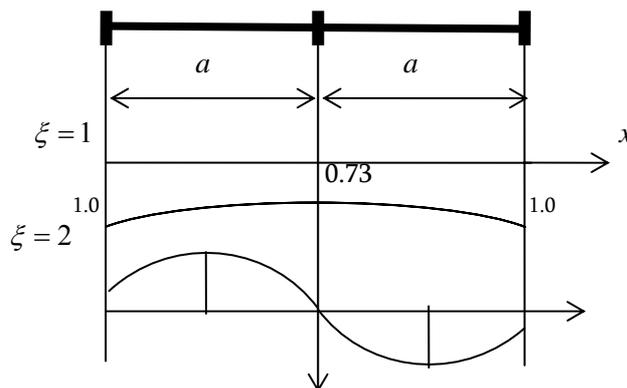
$$\bar{B}_{11}^0 = 1; \bar{B}_{22}^0 = B_{22}^0/B_{11}^0 = 0.0818; \bar{B}_{12}^0 = B_{12}^0/B_{11}^0 = 0.0196; \bar{B}_{66}^0 = B_{66}^0/B_{11}^0 = 0.04297; \\ G_{23}/G_{13} = 1; \bar{E}_1 = E_1/B_{11}^0 = 0.995; \bar{G}_{23} = G_{23}/B_{11}^0 = 0.0497.$$

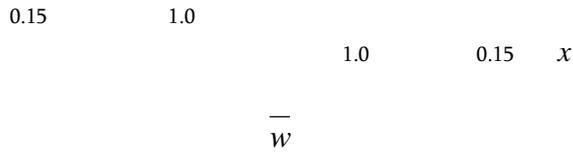
Вычислены оптимальные значения параметров α , $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$, φ и соответствующие значения приведенной критической нагрузки $\bar{\sigma}_{кр} = \sigma_{кр}/B_{11}^0$. Результаты расчетов приведены в табл. 1. Там же для сравнения приведены наибольшие значения параметров критической нагрузки для равновесных пластин с двумя ребрами жесткости, расположенными по ее краям $\bar{\sigma}_{кр}^*$ и при отсутствии ребер $\bar{\sigma}_{кр}^0$.

Оптимальные параметры конструкции.

Таблица 1.

| ξ | \bar{h}_0 | α | \bar{h}_1 | \bar{h}_2 | φ | $\bar{\sigma}_{кр} \cdot 10^3$ | $\bar{\sigma}_{кр}^* \cdot 10^3$ | $\bar{\sigma}_{кр}^0 \cdot 10^3$ |
|-------|-------------|----------|-------------|-------------|-----------|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 0.015 | 0.2 | 0.0822 | 0.01151 | 45° | 0.9533 | 0.4492 | 0.1792 |
| | 0.020 | 0.2 | 0.1003 | 0.01486 | 45° | 1.6182 | 0.7760 | 0.3186 |
| | 0.030 | 0.2 | 0.1325 | 0.02115 | 45° | 3.3940 | 1.6775 | 0.7170 |
| 2 | 0.015 | 0.2 | 0.0810 | 0.01336 | 45° | 0.3072 | 0.2122 | 0.1792 |
| | 0.02 | 0.2 | 0.0998 | 0.01754 | 45° | 0.5358 | 0.3713 | 0.3186 |
| | 0.03 | 0.2 | 0.1336 | 0.02567 | 45° | 1.1719 | 0.8173 | 0.7170 |





Фиг.1 Графики относительных прогибов пластинки на линии $y = b/2$

Для полученных значений оптимальных параметров при $\xi = 1, 2$, $\bar{h}_0 = 0.015$ на фиг.1 показаны графики относительных прогибов конструкции $\bar{w} = w/w_{\max}$ при ее выпучивании на линии $y = b/2$.

Сравнение результатов, приведенных в табл. 1, показывает, что значение критического напряжения для оптимального проекта $\bar{\sigma}_{\text{кр}}$ при $\xi = 1$ около 2 раз больше соответствующего значения для пластинки с двумя ребрами $\bar{\sigma}_{\text{кр}}^*$ и почти в 5 раз для сплошной пластинки $\bar{\sigma}_{\text{кр}}^0$. При $\xi = 2$ увеличения значения критического напряжения соответственно составляют 1.4 раза и 1.7 раз. Очевидно, что с увеличением параметра ξ эффект оребривания будет снижаться.

Как видно из верхнего графика на фиг.1, при $\xi = 1$ имеет место симметричная форма потери устойчивости, причем наименьший прогиб (на среднем ребре) не существенно отличается от максимального прогиба (на крайнем ребре). Очевидно, что уменьшению значения параметра ξ будет соответствовать выравнивание прогибов по длине пластинки, что характерно для часторебристых конструкций.

При $\xi = 2$, как следует из нижнего графика на фиг.1, форма потери устойчивости пластинки становится антисимметричной, откуда следует, что увеличение длины пластинки может привести к изменению формы ее выпучивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян Э. В., Погосян А. Г. Оптимальное проектирование по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по двум краям ребрами жесткости // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1988.Т.41.№ 6.С.14-18.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М: Наука, 1987, 360 с.
3. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М: Наука, 1971. 40с.
4. Погосян А.Г. Применение метода деформируемого многогранника к решению задачи оптимального проектирования прямоугольной сжатой пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, при заданном значении первой частоты собственных колебаний // Изв. НАН Армении. Механика. 1998.Т.51.№ 3.С.28-33.

Институт механики НАН Армении
ЕГИУ Армении

Поступила в редакцию
6.12.2006