ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 539.3

ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНО СЖАТОЙ ПЛАСТИНКИ

Белубекян В.М.

Ключевые слова: упругость, пластинка, неустойчивость, следяшая сила, локализация.

Key words: elastisity, plate, instability, follow forse, localization.

Վ.Մ. Բելուբեկյան
Հավասարաչափ սեղմված սալի տեղայնացված անկայունությունը

Դիտարկված է ուղղանկյուն սալ, որի ըստ լայնության հակադիր կողմերը ազատ հենված են, երրորդ կողմը ազատ է, իսկ չորրորդ կողմը ամրակցված: Ենթադրվում է, որ սալի երկարությունը էապես մեծ է լայնությունից: Գտնված են կրիտիկական ուժերը, որոնց դեպքում առաջանում է ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված անկայունություն:

V.M. Belubekyan
The Localized Instability of the Uniform Compressed Plate

The localized instability of the rectangular plate uniformly compressed by all edges are considered. The problem is solved also in the particular case when “follow” forse is acting on the free edge. Non existence of localized instability in this case is shown.

Исследуется задача устойчивости полубесконечной пластинки-полосы, шарнирно опертой по полубесконечным сторонам. Приложенная на короткой свободной кромке нагрузка может быть как консервативной, так и “следящей”. Для консервативного случая определяются критические нагрузки, приводящие к неустойчивости локализованной в окрестности свободной кромки. Показывается, что в случае “следящей” нагрузки локализованная неустойчивость невозможна.

Ю.К. Коненковым [3] впервые была поставлена и исследована задача локализованных изгибных колебаний пластинки. В [2], по аналогии с задачей Ю.К. Коненкова, была решена задача локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы, равномерно сжатой по полубесконечным сторонам.

В настоящей работе рассматривается локализованная неустойчивость полубесконечной пластинки, равномерно сжатой по всем сторонам. Точнее, предполагается что одна из сторон, равномерно сжатой по всем четырем сторонам пластинки, намного больше другой. Предполагается также, что одна из двух коротких сторон свободна, а другая закреплена. Определяется минимальная критическая нагрузка, при которой возможна локализованная неустойчивость пластинки. Показывается, что при действии на свободной кромке “следящей” нагрузки, локализованная неустойчивость невозможна как в статической постановке (Эйлера), так и при динамическом подходе.

1. Рассматривается локализованная неустойчивость всесторонне равномерно сжатой полубесконечной пластинки-полосы. Пластинка занимает область $0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h$.

Уравнение устойчивости пластинки имеет вид

$$D\Delta^2 w + P\Delta w = 0 \tag{1.1}$$

Края пластинки $y = 0, b$ шарнирно закреплены

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{1.2}$$

Необходимо найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и условию затухания

$$\lim_{x \to \infty} w = 0 \tag{1.3}$$

при различных граничных условиях на кромке $x = 0$.

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и условию затухания (1.3), имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n p_n x} \right) \sin \lambda_n y \tag{1.4}$$

где A_n, B_n –произвольные постоянные,

$$\lambda_n = n\pi/b, \quad p_n = \sqrt{1 - \eta_n^2}, \quad \eta_n^2 = PD^{-1}\lambda_n^{-2} \tag{1.5}$$

При этом необходимо выполнение условия

$$0 < \eta_n^2 < 1 \tag{1.6}$$

Пусть на краю $x = 0$ заданы условия свободного края в случае действия консервативной нагрузки [1].

$$M_1 = 0,\quad \tilde{N}_1 = P\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.7}$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,\quad D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + P\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{1.8}$$

Подстановка (1.4) в граничные условия (1.8) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n и B_n

$$\begin{gathered} (1 - \nu) A_n + \left(p_n^2 - \nu \right) B_n = 0 \\ \left(p_n^2 - \nu \right) A_n + (1 - \nu) p_n B_n = 0 \end{gathered} \tag{1.9}$$

Равенство нулю детерминанта системы (1.9) определяет безразмерный параметр p_n (или η_n^2), характеризующий критическую нагрузку

$$K(p_n) \equiv \left(p_n^2 - \nu \right)^2 - (1 - \nu)^2 p_n = 0 \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) преобразуется к более простому виду

$$K(p_n) \equiv \left(p_n^2 - 1 \right) K_1(p_n) = 0 \tag{1.11}$$

где

$$K_1(p_n) = p_n^3 + p_n^2 + (1 - 2\nu) p_n - \nu^2 \tag{1.12}$$

Очевидно, корень $p_n^2 = 1$ $\left(\eta_n^2 = 0\right)$ соответствует тривиальному решению задачи. Следовательно, критическая нагрузка должна быть определена из уравнения

$$K_1\left(p_n\right) = 0 \tag{1.13}$$

Согласно условию затухания корни уравнения (1.13) должны удовлетворять неравенствам (1.6) или неравенствам $0 < p_n < 1$. Из значений функции $K_1\left(p_n\right)$ на концах интервала

$$K_1\left(0\right) = -\nu^2 < 0, \quad K_1\left(1\right) = \left(3+\nu\right)\left(1-\nu\right) > 0 \tag{1.14}$$

следует, что уравнение (1.13) имеет положительный корень при $\nu \neq 0$ $\left(\nu < 0.5\right)$, удовлетворяющий условиям (1.6). Этот корень единственный, т.к. в промежутке $0 < p_n < 1$ функция $K_1\left(p_n\right)$ монотонно возрастающая.

Необходимо также отметить, что минимальная критическая нагрузка получается при $n = 1$.

2. Как видно из (1.5), (1.12) и (1.13), значения безразмерных параметров, характеризующих затухание $\left(p_n\right)$ и критическую нагрузку $\left(\eta_n^2\right)$, зависит только от коэффициента Пуассона ν. В табл. 1 приводятся некоторые точные численные результаты для корней уравнения (1.13)

Таблица 1

ν	p_n	η_n^2	γ
0.091	0.01	0.9999	11
0.168	0.04	0.9984	6
0.237	0.09	0.9919	4.(3)
0.304	0.16	0.9744	3.5
0.375	0.25	0.9375	3
0.456	0.36	0.8704	2.(6)

При $\nu = 0.5$ приближенные значения указанных параметров следующие:

$$p_n \approx 0.4086, \quad \eta_n^2 \approx 0.8331 \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что характер локализации неустойчивости существенно зависит от коэффициента Пуассона.

Форма потери устойчивости определяется согласно (1.4) после определения постоянных B_n через A_n из какого-либо уравнения системы (1.9). В частности, для минимальной критической нагрузки форма потери устойчивости на кромке $x = 0$ имеет вид

$$w_1 = A_1 \gamma \sin \lambda_1 y, \quad \gamma = \left(1 - p_1^2\right)\left(\nu - p_1^2\right)^{-1} \tag{2.2}$$

Здесь γ характеризует максимальный прогиб пластинки. Значения γ в зависимости от коэффициента ν приведены в табл. 1 (для $\nu = 0.5 - \gamma \approx 2.5$).

Задача локализованной неустойчивости в случае, когда пластинка равномерно сжата только по направлению y, была рассмотрена ранее в [2].

3. В случае, когда на кромке пластинки $x = 0$ действует “следящая” нагрузка, граничные условия (1.8) заменяются следующими условиями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \tag{3.1}$$

После подстановки решения (1.4) в граничные условия (3.1) получается система однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n:

$$\begin{aligned} &(1-\nu) A_n + \left(p_n^2 - \nu\right) B_n = 0 \\ &(1-\nu) A_n + p_n \left(p_n^2 - 2 + \nu\right) B_n = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Равенство детерминанта системы (3.2) нулю приводит к следующему уравнению для определения критической нагрузки:

$$K(p_n) \equiv (1 - p_n)\left(p_n^2 + 2p_n + \nu\right) = 0 \tag{3.3}$$

Из (3.3) очевидно, что нет корней, удовлетворяющих условию затухания (1.6) при $0 \le \nu \le 0.5$. Таким образом, при действии “следящей” нагрузки, локализованная неустойчивость в статической постановке не существует. Поэтому, в этом случае необходимо привлечение динамического подхода.

Вместо уравнения (1.1) рассматривается уравнение колебаний равномерно сжатой пластинки

$$D\Delta^2 w + P\Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.4), удовлетворяющее условиям шарнирного закрепления на полубесконечных кромках пластинки (1.2) и условию затухания (1.3), имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-p_{1n}\lambda_n x} + B_n e^{-p_{2n}\lambda_n x} \right) e^{i\omega t} \sin \lambda_n y \tag{3.5}$$

где

$$p_{1n} = \left(1 - \frac{\eta_n^2}{2} + \sqrt{\frac{\eta_n^4}{4} + \xi_n^2} \right)^{1/2}, \quad p_{2n} = \left(1 - \frac{\eta_n^2}{2} - \sqrt{\frac{\eta_n^4}{4} + \xi_n^2} \right)^{1/2} \tag{3.6}$$

$$\eta_n^2 = P\left(D\lambda_n^2\right)^{-1}, \quad \xi_n^2 = 2\rho h \omega^2 \left(D\lambda_n^2\right)^{-1}$$

При этом, p_{1n}, p_{2n} должны быть положительными, откуда следует условие затухания в виде

$$0 < \eta_n^2 < 1 - \xi_n^2 \tag{3.7}$$

Подстановка решения (3.5) в граничные условия для свободного края со “следящей” нагрузкой (3.1) приводит к системе уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n

$$\begin{aligned} &\left(p_{1n}^2-\nu\right)^2 A_n+\left(p_{2n}^2-\nu\right)^2 A_n=0 \\ &p_{1n}\left(p_{1n}^2-2+\nu\right)A_n+p_{2n}\left(p_{2n}^2-2+\nu\right)B_n=0 \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Дисперсионное уравнение задачи получается из равенства нулю детерминанта системы (3.8) в виде

$$K\left(\eta_n,\xi_n\right)\equiv\left(p_{2n}-p_{1n}\right)K_1\left(\eta_n,\xi_n\right)=0 \qquad (3.9)$$

где

$$K_1\left(\eta_n,\xi_n\right)=p_{1n}^2p_{2n}^2+2\left(1-\nu\right)p_{1n}p_{2n}+\nu\eta_n^2-\nu^2 \qquad (3.10)$$

Следует отметить, что при отсутствии нагрузки $\left(\eta_n=0\right)$ уравнение (3.9) совпадает с дисперсионным уравнением задачи локализованных колебаний в окрестности свободной кромки пластинки-задачи Коненкова [3] – в форме, приведенной в статье [4].

Т.к. $p_{1n}\neq p_{2n}$, из уравнения

$$K_1\left(\eta_n,\xi_n\right)=0 \qquad (3.11)$$

определяются частоты колебаний в виде

$$\xi_n^2=\left(1-\nu\right)\left[2\sqrt{\left(1-\nu\right)^2+\nu^2-\nu\eta_n^2}-1-\eta_n^2+3\nu\right] \qquad (3.12)$$

Нетрудно проверить, что при условии $\eta_n^2<1$, согласно (3.7), и при $0\leq\nu\leq0.5$ правая часть равенства (3.12) положительна. Следовательно, и при динамическом подходе локализованная потеря устойчивости невозможна. В этом случае формула (3.12) определяет частоты локализованных колебаний равномерно сжатой пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1991. 336с.
2. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб. “Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем”. Ереван, Изд. ЕГУ. 1997. С.95-99.
3. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа. // Акуст. журн. 1960. Т.6. № 1. С.124-126.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. //Прикл. механика НАН Украины. 1994. Т.30. № 2. С.61-68.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
13.11.2006