ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ВНЕШНЕМ ДИНАМИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ

Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц.

Ключевые слова: динамическое нагружение, жидкость, динамическая устойчивость.
Key words: dynamic loading, fluid, dynamic stability

Գ.Ե. Բաղդասարյան, Վ.Ց. Գնունի
Հեղուկով մասնակիորեն լցված գլանային թաղանթի կայունությունը արտաքին դինամիկ ճնշման տակ

Դիտարկված է հեղուկով մասնակիորեն լցված փակ գլանային թաղանթի վարքի հետազոտության խնդիրն այն դեպքում, երբ թաղանթը գտնվում է հավասարաչափ բաշխված արտաքին դինամիկական ճնշման տակ: Հետազոտված է հեղուկի ազդեցությունը ինչպես “կրիտիկական դինամիկական բեռի” արժեքի վրա, որի դեպքում տեղի է ունենում թաղանթի ճկման մեծ աճ, այնպես էլ գլխավոր պարամետրիկական ռեզոնանսի կրիտիկական հաճախությունների մեծությունների վրա:

G.E. Bagdasaryan, V.T. Gnuni
Stability of Cylindrical Shell Partially Filled with Liquid At the External Dynamic Pressure

A problem of the behavior of closed cylindrical circular shell partially filled with liquid at the dynamic application of uniformly distributed external pressure is considered. The influence of liquid, both on the value of " critical dynamic loading " at which occurs a rough deflection of the shell, and the values of critical frequencies of the main parametrical resonance is investigated.

Рассмотрена задача о поведении частично заполненной жидкостью замкнутой цилиндрической круговой оболочки при динамическом приложении равномерно распределенного внешнего давления. Исследовано влияние жидкости как на величину “критической динамической нагрузки”, при которой происходит бурное выпучивание оболочки, так и на величины критических частот главного параметрического резонанса.

1. Основные уравнения. Рассмотрим упруго-изотропную круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h, частично заполненную несжимаемой жидкостью глубины b. Пусть оболочка с жестким днищем находится под действием внешнего динамического давления интенсивности $q(t)$. Будем пользоваться цилиндрическими координатами (α, r, θ), совместим полярную ось α с осью оболочки. В выбранной системе координат оболочка занимает область $0 \le \alpha \le l, 0 \le \theta \le 2\pi, R - \frac{h}{2} \le r \le R + \frac{h}{2}$, а жидкость –

область $0 \le \alpha \le b, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le R - \frac{h}{2}$, где l – длина, R –радиус срединной поверхности оболочки.

За основу принимаются следующие предложения:

а) гипотеза Кирхгофа-Лява о недеформируемых нормалях [1];

б) общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменяемости [1];

в) жидкость в оболочке совершает потенциальное движение;

г) волновое движение на свободной поверхности жидкости и тангенциальные составляющие сил инерции слабо влияют на колебание оболочки [2,3,6].

Система уравнений динамической устойчивости оболочки, в силу принятых предположений, имеет вид [2-5]:

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta^2 w - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + q(t)R\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z \tag{1.2}$$

Здесь $w(\alpha,\beta,t)$ – прогиб, $\Phi(\alpha,\beta,t)$ – функция напряжения, E –модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала оболочки;

$$\Delta^2 \equiv \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4}, \ \beta = R\theta$$

$$Z = \begin{cases} -Z_0 + \rho_0 gR(b-\alpha)\dfrac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} & \text{при } 0 < \alpha < b \\ 0, & \text{при } b < \alpha < l \end{cases} \tag{1.3}$$

где Z_0 – возмущенное давление жидкости, g – ускорение силы тяжести, ρ_0 – плотность жидкости.

Из интеграла Коши-Лагранжа имеем:

$$Z_0 = -\rho_0 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{r=R} \tag{1.4}$$

где φ – потенциальная финкция возмущенного движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0 \tag{1.5}$$

в области, занятой жидкостью, и следующим краевым условиям на границе этой области:

$$v_r\big|_{r=R} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t} \tag{1.6}$$

$$v_\alpha\big|_{\alpha=0} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\alpha=b}=0 \qquad (1.8)$$

Как видно из условия (1.6), для определения функции φ необходимо определить радиальные скорости стенки оболочки. Поэтому прежде всего обсудим вопрос о форме потери устойчивости оболочки.

Предположим, что оболочка шарнирно оперта по торцам. Тогда решение системы (1.1), удовлетворяющее известным условиям шарнирного опирания, запишем в форме

$$\begin{aligned} w&=\cos n\theta\sum_{s=0}^{N}W_s(t)\sin\frac{\lambda_s\alpha}{R}\\ \Phi&=\cos n\theta\sum_{s=0}^{N}\Phi_s(t)\sin\frac{\lambda_s\alpha}{R} \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Здесь $\lambda_s=(m+s)\pi R/l$; m – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей; n – число волн в окружающем направлении; $W_s(t)$, $\Phi_s(t)$ – искомые функции.

Исходя из (1.9), гармоническую функцию φ представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi=\cos n\theta\Bigg\{&\sum_{s=0}^{N}B_s(t)I_n\left(\frac{\lambda_s r}{R}\right)\sin\frac{\lambda_s\alpha}{R}+\\ &+\sum_{j=1}^{\infty}\left[C_j(t)\operatorname{sh}\frac{\alpha_{nj}\alpha}{R}+D_j(t)\operatorname{ch}\frac{\alpha_{nj}\alpha}{R}\right]J_n\left(\frac{\alpha_{nj}r}{R}\right)\Bigg\} \end{aligned} \qquad (1.10)$$

где I_n, J_n – модифицированные и немодифицированные функции Бесселя первого рода; $B_s(t)$, $C_j(t)$, $D_j(t)$, α_{nj} – некоторые величины, определяемые из условий (1.6) – (1.8); α_{nj} – корни следующего трансцендентного уравнения:

$$nJ_n(\alpha_{nj})-\alpha_{nj}J_{n-1}(\alpha_{nj})=0 \qquad (1.11)$$

Подставляя (1.9) и (1.10) в соотношения (1.6) – (1.8) и учитывая (1.11), путем ортогонализации получаем:

$$\begin{aligned} B_s(t)&=\frac{2R}{\lambda_s\left[I_{n-1}(\lambda_s)+I_{n+1}(\lambda_s)\right]}\frac{dW_s(t)}{dt}\\ C_j(t)&=\frac{2R}{\alpha_{nj}\left(1-\dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2}\right)J_n(\alpha_{nj})}\sum_{s=0}^{N}\frac{\lambda_s}{\alpha_{nj}^2+\lambda_s^2}\frac{dW_s(t)}{dt}\\ \frac{dD_j(t)}{dt}&=\frac{2R}{\alpha_{nj}\left(1-\dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2}\right)J_n(\alpha_{nj})}\sum_{s=0}^{N}\frac{\alpha_{nj}\sin\dfrac{\lambda_s b}{R}-\lambda_s\operatorname{sh}\dfrac{\alpha_{nj}b}{R}}{\left(\alpha_{nj}^2+\lambda_s^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{\alpha_{nj}b}{R}}\frac{d^2W_s(t)}{dt^2} \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Учитывая уравнения (1.10) – (1.12), для давления жидкости на колеблющейся стенке оболочки из (1.4) находим следующее выражение:

$$Z_0 = -\rho_0 \cos n\theta \sum_{s=0}^{N} \left\{ A_1(s) \sin \frac{\lambda_s \alpha}{R} + 2R \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_2(s,j) \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nj}\alpha}{R} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + A_3(s,j) \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nj}\alpha}{R} \right] J_n(\alpha_{nj}) \right\} \frac{d^2 W_s(t)}{dt^2} \qquad (1.13)$$

Здесь

$$A_1(s) = \frac{R I_n(\lambda_s)}{\lambda_s I_{n-1}(\lambda_s) - n I_n(\lambda_s)}$$

$$A_2(s,j) = \frac{\lambda_s}{\alpha_{nj}\left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2}\right) J_n(\alpha_{nj})\left(\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2\right)}$$

$$A_3(s,j) = \frac{\alpha_{nj} \sin \dfrac{\lambda_s b}{R} - \lambda_s \operatorname{sh} \dfrac{\alpha_{nj} b}{R}}{\alpha_{nj}\left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2}\right) J_n(\alpha_{nj})\left(\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2\right) \operatorname{ch} \dfrac{\alpha_{nj} b}{R}}.$$

Подставляя (1.9) в уравнение (1.1), для искомой функции $\Phi_s(t)$ будем иметь:

$$\Phi_s(t) = EhR \frac{\lambda_s^2}{\left(\lambda_s^2 + n^2\right)^2} W_s(t) \qquad (1.14)$$

Таким образом, все искомые величины выражаются через функции $W_s(t)$.

На основе вариационного метода Бубнова-Галеркина из уравнения (1.2) для определения $W_s(t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 W_s}{dt^2} + \Omega_s^2 \left(1 - \frac{q(t)}{q_s^*}\right) W_s + \sum_{i=0}^{N} m_{is} \frac{d^2 W_i}{dt^2} + \sum_{i=0}^{N} b_{is} W_i = 0 \qquad (1.15)$$

Здесь

$$\Omega_s^2 = \frac{K_s}{\rho h}; \; q_s^* = \frac{K_s R}{n^2}$$

$$K_s = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^4} \left[\left(\lambda_s^2 + n^2\right)^2 + \frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2} \frac{\lambda_s^4}{\left(\lambda_s^2 + n^2\right)^2} \right]$$

$$b_{is}=\frac{2Rg\rho_0 n^2}{\rho h l}\left[\frac{\sin^2\frac{\lambda_i-\lambda_s}{2R}b}{\left(\lambda_i-\lambda_s\right)^2}-\frac{\sin^2\frac{\lambda_i+\lambda_s}{2R}b}{\left(\lambda_i+\lambda_s\right)^2}\right]$$

$$m_{is}=\frac{R\rho_0 A_1(t)}{\rho h l}\left[\frac{\sin^2\frac{\lambda_i-\lambda_s}{R}b}{\lambda_i-\lambda_s}-\frac{\sin^2\frac{\lambda_i+\lambda_s}{R}b}{\lambda_i+\lambda_s}\right]+$$

$$+\frac{R^2\rho_0}{\rho h l}\sum_{j=1}^{\infty}\left[A_2(i,j)\frac{\alpha_{ni}\operatorname{ch}\frac{\alpha_{ni}b}{R}\sin\frac{\lambda_s b}{R}-\lambda_s\operatorname{sh}\frac{\alpha_{ni}b}{R}\cos\frac{\lambda_s b}{R}}{\alpha_{nj}^2+\lambda_s^2}+\right. \tag{1.16}$$

$$\left.+A_3(i,j)\frac{\lambda_s+\alpha_{nj}\operatorname{sh}\frac{\alpha_{nj}b}{R}\sin\frac{\lambda_s b}{R}-\lambda_s\operatorname{ch}\frac{\alpha_{nj}b}{R}\cos\frac{\lambda_s b}{R}}{\alpha_{nj}^2+\lambda_s^2}\right]$$

Ω_s – частоты собственных поперечных колебаний оболочки; m_{is} – коэффициенты присоединенных масс; b_{is} – коэффициенты гидростатического давления жидкости.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $N=0$. Тогда из уравнений (1.15) имеем:

$$\left(1+M_{mn}\right)\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2}+\left[\Omega_{mn}^2\left(1-\frac{q(t)}{q_{mn}^*}\right)+B_{mn}\right]w_{mn}=0 \tag{1.17}$$

где

$$\Omega_{mn}^2=\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho R^4}\left[\left(\mu_m^2+n^2\right)^2+\frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2}\frac{\mu_m^2}{\left(\mu_m^2+n^2\right)^2}\right]$$

$$w_{mn}=W_0,\ \Omega_{mn}=\Omega_0,\ M_{mn}=m_{00},\ B_{mn}=b_{00} \tag{1.18}$$

$$q_{mn}^*=\frac{\rho h R}{n^2}\Omega_{mn}^2,\ \mu_m=\frac{m\pi R}{l}$$

Ω_{mn} – частоты собственных поперечных колебаний оболочки при отсутствии жидкости, q_{mn}^* – критические значения внешнего постоянного давления, при которых пустая оболочка теряет статическую устойчивость.

На основе (1.17) рассмотрим задачу динамической устойчивости при $q(t)=q_0+q_1\cos\omega t$ и задачу устойчивости оболочки при динамическом нагружении $\left(q(t)=ct\right)$.

2. Динамическая устойчивость. Рассмотрим задачу параметрических колебаний, принимая $q(t) = q_0 + q_1 \cos \omega t$. Тогда из (1.17) получим следующие дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 \left(1 - 2\mu_{mn} \cos \omega t\right) w_{mn} = 0 \tag{2.1}$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{1 + M_{mn}} \left[\Omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{q_0}{q_{mn}^*} \right) + B_{mn} \right]$$
$$2\mu_{mn} = \frac{q_1 \Omega_{mn}^2}{\Omega_{mn}^2 \left(q_{mn}^* - q_0\right) + B_{mn} q_{mn}^*} \tag{2.2}$$

–соответственно, частота собственных колебаний и коэффициент возбуждения оболочки, частично заполненной жидкостью и загруженной равномерно распределенным внешним давлением q_0. Из (2.1), (2.2) при $q_1 = 0$ легко найти критические значения внешнего давления q_0

$$q_0^* = q_{mn}^* \left(1 + \frac{B_{mn}}{\Omega_{nm}^2} \right) \tag{2.3}$$

Формула (2.3) показывает, что присутствие жидкости увеличивает величину статического критического давления.

Уравнение (2.1) представляет собой известное уравнение Матье и критические частоты главного параметрического резонанса определяются следующими известными формулами [4]:

$$\omega_*^{\pm} = 2\omega_{mn} \sqrt{1 \pm \mu_{mn}} \tag{2.4}$$

Рассматривая формулы (1.18), (2.2) и (2.4), замечаем, что присоединенная масса жидкости приводит к значительному уменьшению, а гидростатическое давление – к некоторому увеличению критических частот главного параметрического резонанса [2,3]. В результате, область главного резонанса чувствительно смещается влево и происходит существенное сужение этой области, обусловленное присутствием жидкости.

3. Устойчивость при динамическом нагружении. Рассматривается случай, когда интенсивность давления возрастает по закону $q(t) = ct$. Тогда уравнения (1.17) принимают вид:

$$\frac{d^2 w_{mn}}{d\tau^2} + \tau_{mn} w_{mn} = 0 \tag{3.1}$$

где

$$\tau_{mn}=\left(r_{mn}^2-t\right)\left(s_{mn}r_{mn}^2\right)^{\frac{1}{3}},\ r_{mn}^2=\frac{\rho hR}{cn^2}\left(\Omega_{mn}^2+B_{mn}\right)$$
$$S_{mn}=\frac{1}{\left(1+M_{mn}\right)\left(\Omega_{mn}^2+B_{mn}\right)}\left(\frac{cn^2}{\rho hR}\right)^2 \tag{3.2}$$

Если $r_{mn}^2>t$ (первый этап движения рассматриваемой гидроупругой системы), то общее решение уравнения (3.1) имеет вид $\left(\tau_{mn}>0\right)$:

$$w_{mn}=\tau_{mn}^{\frac{1}{2}}\left[c_1J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\tau_{mn}^{\frac{3}{2}}\right)+c_2J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\tau_{mn}^{\frac{3}{2}}\right)\right] \tag{3.3}$$

где $J_{\frac{1}{3}}$ и $J_{-\frac{1}{3}}$ – бесселевы функции первого рода.

Указанные бесселевы функции изменяются периодически, так что движение системы на протяжении первого этапа имеет колебательный характер и, как видно из (3.2), присутствие жидкости увеличивает длительность колебательного процесса.

При возрастании времени t величина τ_{mn} падает, стремясь к нулю. Определив w_{mn} и $\frac{dw_{mn}}{d\tau_{mn}}$ при $\tau_{mn}=0$, получим начальные данные для следующего, второго этапа движения. Уравнения (1.17) для второго этапа представим в виде:

$$\frac{d^2w_{mn}}{d\overline{\tau}^2}-\overline{\tau}_{mn}w_{mn}=0 \tag{3.4}$$

где

$$\overline{\tau}_{mn}=\left(t-r_{mn}^2\right)\left(s_{mn}r_{mn}^2\right)^{\frac{1}{3}}>0 \tag{3.5}$$

Общее решение уравнения (3.4) представляется в виде

$$w_{mn}=\overline{\tau}_{mn}^{\frac{1}{2}}\left[c_1I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\overline{\tau}_{mn}^{\frac{3}{2}}\right)+c_2I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\overline{\tau}_{mn}^{\frac{3}{2}}\right)\right] \tag{3.6}$$

где $I_{\frac{1}{3}}$ и $I_{-\frac{1}{3}}$ – модифицированные бесселевы функции первого рода. Эти функции меняются монотонно и, поэтому, амплитуда прогиба оболочки с течением времени $\left(t>r_{mn}^2\right)$ будет неограниченно возрастать, причем, при определенном значении $t=t_{kp}$ происходит бурное возрастание прогибов (момент потери устойчивости при динамическом нагружении [5]).

В книге [5] показано, что t_{kp} является монотонно убывающей функцией величины S_{mn}. Следовательно, рассматривая (3.2), легко заметить, что присутствие жидкости в оболочке может существенно задерживать процесс бурного возрастания прогибов оболочки (существенное увеличение t_{kp}).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Параметрические колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины.// ПМ. 1966. Т.2. Вып.3.
3. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. // Докл. АН Арм.ССР. 1965. Т. XLI. N4. С.199-204.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.
5. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879с.
6. Mixon John S., Herr Robert W. An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. //Techn. Rept. NASA, Nr. R – 145, 1962 (1963).

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.01.2007