ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ

Элоян А. В.

Ключевые слова: опора, оптимальное расположение, балка, изгиб
Keywords:support, optimal disposition, beam, bending

Ա. Վ. Էլոյան
Հեծանի ծռման խնդրում հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրություն

Դիտարկվում է առաձգական հեծանի հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որը ապահովում է հեծանի ամենամեծ ճկվածքի ամենափոքր արժեքը:

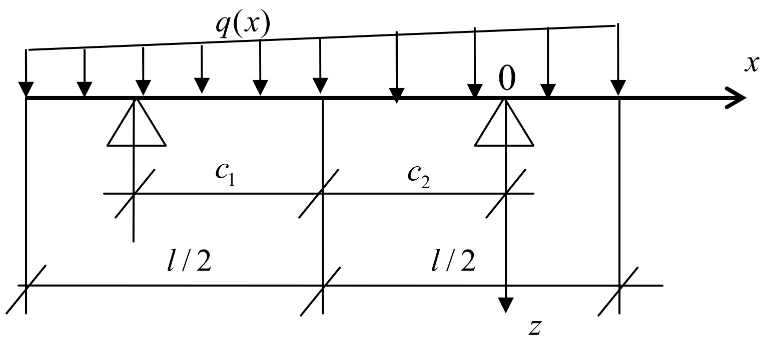
A. V. Eloyan
The Optimal Choice of Support Disposition in Case Of Beam Bending

A task of flexible beam's support's optimal disposition solving is being observed. This beam is providing the least importance of the largest bending under the influence of variable diametrical loading. The optimal project corresponds the equality of the most important bending in all parts of the beam. Moreover, the magnitude of the largest bending which corresponds the optimal project in 47 times less than the largest bending of free beam which is leant at the ends.

Рассматривается задача нахождения оптимального расположения опор по длине упругой балки, обеспечивающего наименьшее значение наибольшего прогиба балки.

Рассматривается задача определения оптимального расположения опор по длине упругой балки при изгибе под действием переменной нагрузки, обеспечивающей наименьшее значение наибольшего прогиба балки.

Пусть упругая балка длиной l отнесена к прямоугольной системе декартовых координат $Oxyz$ так, что координатная плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью балки, начало координат совпадает с правой опорой. От середины балки опоры удалены на расстояние c_1 и c_2 (фиг. 1).



Фиг.1. Расчетная схема балки

Если балка изгибается под действием внешней неравномерно распределенной нагрузки интенсивности $q(x)$, то можно предположить, что имеет место изгиб балки по цилиндрической поверхности и прогиб $w = w(x)$. Дифференциальное уравнение изгиба балки постоянной толщины *h*, загруженной нормально распределенной переменной по длине балки нагрузкой $q(x) = q_0(1 + \alpha x / a)$ представится в виде

$$D\frac{d^4 w}{dx^4} = q_0\left(1 + \alpha\frac{x}{a}\right) \tag{1}$$

где $\alpha = q / q_0$, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ –жесткость на изгиб, *E*–модуль упругости, $w = w(x)$ – прогиб длинной балки, ν – коэффициент Пуассона материала балки. Если нагрузка по длине балки распределена несимметрично, то уравнение (1) можно отдельно рассматривать на соответствующих отрезках, при этом

$$w_i(x) = \begin{cases} w_1(x) & \text{при} \quad -(c_1 + c_2) < x < 0 \\ w_2(x) & \text{при} \quad 0 < x < (0.5a - c_2) \\ w_3(x) & \text{при} \quad -(0.5a + c_1) < x < -(c_1 + c_2) \end{cases} \tag{2}$$

Отметим, что при произвольном распределении нагрузки по ширине, задачу оптимизации необходимо рассматривать с двумя параметрами оптимизации c_1 и c_2.

При этом должны удовлетворяться следующие условия на опорах:

$$\begin{aligned} &w_1(x) = w_2(x) = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}, \ M_{xx}^{(1)} = M_{xx}^{(2)} \ \text{ при } \ x{=}0 \\ &w_1(x) = w_3(x) = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_3}{dx}, \ M_{xx}^{(1)} = M_{xx}^{(3)} \ \text{ при } \ x{=}{-}(c_1 + c_2) \end{aligned} \tag{3}$$

На длинных краях балки $x = 0.5a - c_1$, $x = -\left(0.5a - c_1\right)$ соответственно должны быть удовлетворены условия свободного края, где

$$\begin{aligned} &M_{xx}^{(2)} = 0, \ T_{xz}^{(2)} = 0 \quad \text{при } \ x = -0.5a - c_2 \\ &M_{xx}^{(3)} = 0, \ T_{xz}^{(3)} = 0 \quad \text{при } \ x = 0.5a - c_2 \end{aligned} \tag{4}$$

$$M_{xx} = -D\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad T_{xz} = \frac{dM_{xx}}{dx} - D\frac{d^3 w}{dx^3} \tag{5}$$

–соответственно, изгибающий момент и поперечное усилие в сечениях $x = \text{const}$.

Решение (1) получается в виде

$$w_i = \frac{q_0 a^4}{24D}(1+\frac{\alpha \bar{x}}{5})\bar{x}^4 + \frac{1}{6}a_{3i}\bar{x}^3 + \frac{1}{2}a_{2i}\bar{x}^2 + a_{1i}\bar{x} + a_{0i} \qquad (6)$$

где i=1 при $x \in (-\alpha_1 - \alpha_2 : 0)$; i=2 при $x \in (0;\ 0.5 - \alpha_i)$,

i=3 при $x \in (-0.5 - \alpha_1; -\alpha_1 - \alpha_2)$.

Здесь введены обозначения для безразмерных координат $\bar{x}$ и параметров оптимизации (i

$$\bar{x} = x/a, \quad \alpha_i = c_i / a \quad (i = 1,2) \qquad (7)$$

Удовлетворяя восьми условиям на опорах (3) и четырем условиям на свободных концах балки (4), получаем систему двенадцати уравнений для определения двенадцати постоянных *;* $a_{ik}\,(k = 0,1,2,3; \quad i = 1,2,3)$

Подстановкой значений постоянных a_{ik} в (6) получаются формулы для искомых $w_i(x)$*,* удовлетворяющих условиям (3), (4).

Окончательно для прогиба балки получается

$$w_1 = \frac{q_0 a^4 \bar{x}}{24D}\{\cdot \bar{x}^3\left(1+\alpha\bar{x}/5\right) + 4\bar{x}^2\left[\cdot\left(0.5-a_1\right)^2\left(0.5+\alpha\left(0.5-a_1\right)/3\right):\right.$$
$$:\left(a_1+a_2\right) - \left(0.5+a_1\right)^2\left(0.5-\alpha\left(0.5+a_1\right)/3\right):\left(a_1+a_2\right) + \left(0.5+a_1\right)\times$$
$$\left.\times\left(1-0.5\alpha\left(0.5+a_1\right)\right)\cdot\right] + 12\bar{x}\left(0.5a-a_1\right)^2\left(0.5+\alpha\left(0.5-a_1\right)/3\right)+$$
$$+\left[\cdot\left(a_1+a_2\right)^3\left(1+0.2\left(a_1+a_2\right)\right) - 4\left(a_1+a_2\right)^2\left(0.5+a_1\right)\left(1-0.5\alpha\left(0.5+a_1\right)\right)+\right.$$
$$+4\left(a_1+a_2\right)\left(0.5+a_1\right)^2\left(0.5-\alpha\left(0.5+a_1\right)/3\right) + 8\left(a_1+a_2\right)\left(0.5-a_1\right)^2\times$$
$$\left.\times\left(0.5+\alpha\left(0.5-a_1\right)/3\right)\cdot\right]\cdot\} \text{ при } \bar{x} \in (-\alpha_1-\alpha_2; 0) \qquad (8)$$

$$w_2 = \frac{q_0 a^4 \bar{x}}{24D}\{\cdot \bar{x}^3\left(1+\alpha\bar{x}/5\right) - 4\bar{x}^2\left(0.5-\alpha_1\right)\left(1+0.5\alpha\left(0.5-\alpha_1\right)\right)+$$
$$+2\bar{x}\left(0.5-\alpha_1\right)^2\left(0.5+\alpha\left(0.5-\alpha_1\right)/3\right) + \left[\cdot\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^3\left(1+0.2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right)-\right.$$
$$-4\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2\left(0.5+\alpha_1\right)\left(1-0.5\alpha\left(0.5+\alpha_1\right)\right) + 4\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\left(0.5+\alpha_1\right)^2\times$$
$$\left.\times\left(0.5-\alpha\left(0.5-\alpha_1\right)/3\right) + 8\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\left(0.5-\alpha_1\right)^2\left(0.5+\alpha\left(0.5-\alpha_1\right)/3\right)\cdot\right]\cdot\}$$
$$\text{при} \quad \bar{x} \in (0; 0.5-\alpha_1) \qquad (9)$$

$$w_3 = \frac{q_0 a^4 \bar{x}}{24D}\{\cdot \bar{x}^{-3}\left(1+\alpha \bar{x}/5\right)+4\bar{x}^{-2}\left(0.5+\alpha_1\right)\left(1-0.5\alpha\left(0.5+\alpha_1\right)\right)+$$
$$+12\bar{x}\left(0.5+\alpha_1\right)^2\left(0.5-\alpha\left(0.5+\alpha_1\right)/3\right)+\left[\cdot\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^3\left(1+0.2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right)-\right.$$
$$-4\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2\left(0.5+\alpha_1\right)\left(1-0.5\alpha\left(0.5+\alpha_1\right)\right)+16\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\left(0.5+\alpha_1\right)^2\times$$
$$\times\left(0.5-\alpha\left(0.5+\alpha_1\right)/3\right)-4\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\left(0.5-\alpha_1\right)^2\left(0.5+\alpha\left(0.5-\alpha_1\right)/3\right).\left.\right].\}$$
$$\text{при} \quad \bar{x} \in (-0.5-\alpha_1;-\alpha_1-\alpha_2) \qquad (10)$$

Отметим, что как видно из (8), (9), (10), при переменной по длине балки нагрузки прогиб балки зависит от параметров α_1 и α_2.

Имея значение $w_i(\bar{x})$, можно рассматривать следующую оптимизационную задачу: для заданного (найти: (1, (2 так, что

$$\max_{i,x} w_i\left(\bar{x},\alpha_1,\alpha_2\right)\underset{\alpha_1,\alpha_2}{\rightarrow} \min, \qquad \text{где} \quad \alpha_i \in \left[0;0.5\right] \qquad i=1,2,3 \qquad (11)$$

Очевидно, прогибы балки $\bar{w}_2(x)$ и $\bar{w}_3(x)$ принимают наибольшее значение на краях балки.

В случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $\alpha_1 = 2$

$$\bar{w}_1(\bar{x}) \equiv 0, \qquad \max_{\bar{x}} \bar{w}_2(\bar{x}) = \bar{w}_2(0.5) = 0.837$$
$$\max_{\bar{x}} \bar{w}_3\left(\bar{x}\right) = \bar{w}_3(-0.5) = 0.63$$

В случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ и $\alpha_1 = 2$

$$\max_{\bar{x}} \bar{w}_1(\bar{x}) = 1.0, \qquad \bar{w}_2(\bar{x}) = \bar{w}_3(\bar{x}) \equiv 0$$

Отметим, что при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ получается балка, два края которой $(x=-l; \quad x=0)$ шарнирно оперты; а при $c_1 = c_2 = 0$ получаются две консольные балки, заделанные в точке $x = 0$.

Здесь введено безразмерное значение для прогиба балки w

$$\bar{w}_i\left(\bar{x}\right) = \frac{384D}{5q_o a^4} w_i\left(\bar{x}\right)$$

где $5qa^4/384D$ – наибольший прогиб шарнирно опертой по краям балки при $\alpha_1 = 2$.

На основе численного решения задачи получается, что наилучшие варианты расположения опор при $\alpha_1 = 2$ получаются при $\alpha_1^* = 0.255, \quad \alpha_2^* = 0.296.$

Таким образом, при $\alpha_1 = 2$

$$\min_{\alpha_1,\alpha_2}\max_i\max_{\bar{x}} \bar{w}_i(\bar{x},\alpha_1,\alpha_2) = 0.0208$$

В рассмотренных случаях $\alpha_1 = 2$ при оптимальном расположении опор $(\alpha_1 = \alpha_1^*; \alpha_2 = \alpha_2^*)$ наибольший прогиб по длине упругой балки 47 раз меньше наибольшего прогиба шарнирно опертой по длинным краям балки.

Отметим, что наибольшее значение $\overline{w}_1(x)$ (прогиб части балки между опорами) для случая $\alpha_1 = 2$ достигается при $\overline{x} = -0.425$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В. Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки.// В сб.: Ереван: Изд. ЕГУ. 1997. С.114-117.

2. Гнуни В. Ц., Элоян А. В. Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки. // Изв.НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54. N3. С.14-17.

Гюмрийский филиал Государственного Инженерного Университета Армении

Поступила в редакцию 17.11.2006