ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 539.3

УТОЧНЕНИЕ УСЛОВИЙ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Саркисян С.В.

Ключевые слова: пластинка, лицевая поверхность, уточнение условий.
Key words: plate, front areas, specification of conditions.

Ս.Վ. Սարգսյան
Փոփոխական հաստությամբ սալի դիմային մակերևույթների վրա դրված պայմանների ճշգրտումը

Ճշգրտելով փոփոխական հաստությամբ սալի դիմային մակերևույթների վրա դրված պայմանները ստացված են սալի շարժման հավասարումները տեղափոխություններով

S.V.Sarkisyan
Specification of Conditions on the Front Areas of Plate With Variable Thickness

By means of specification of conditions on the front areas of plate with variable thickness the motion equations of plate in displacements are obtained.

Путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки переменной толщины получены уравнения движения пластинки в перемещениях.

1. Пусть срединная плоскость прямоугольной изотропной пластинки совпадает с плоскостью xoy декартовой системы координат (x, y, z).

Толщина пластинки переменна, для конкретности, относительно координаты x и симметрична относительно плоскости xoy. Область пространства, занимаемая пластинкой, определяется следующим образом: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h(x) \le z \le h(x)$. В общем случае предполагается, что пластинка нагружена поперечной нагрузкой $q(x)$ и учитывается вес пластинки.

Если поверхности $z = \pm h(x)$ свободны от нагрузок, то граничные условия определяются согласно условиям

$$\vec{\sigma}_i \vec{n} = 0 \text{ при } z = \pm h(x) \ \ (i = 1,2,3) \tag{1.1}$$

где $\vec{n}$ –нормаль к соответствующей поверхности, $\vec{\sigma}_i = \sigma_{i1}\hat{i} + \sigma_{i2}\hat{j} + \sigma_{i3}\hat{k}$, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ – единичные нормали по осям x, y, z, σ_{ij} $(j = 1,2,3)$ –компоненты тензора напряжений.

Из (1.1) имеем следующие граничные условия для свободной поверхности:

$$z = h(x): \begin{array}{l} \sigma_{13} - h'(x)\sigma_{11} = 0, \qquad \sigma_{23} - h'(x)\sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{33} - h'^2(x)\sigma_{11} = 0 \end{array} \tag{1.2}$$

$$z=-h(x): \quad \begin{array}{l} \sigma_{13}+h'(x)\sigma_{11}=0, \qquad \sigma_{23}+h'(x)\sigma_{21}=0 \\ \sigma_{33}-h'^2(x)\sigma_{11}=0 \end{array} \tag{1.3}$$

где штрих означает производную по x.

Аналогичные граничные условия получены в работах [1-3].

Пусть на поверхности $z=-h(x)$ действует поперечная нагрузка $q(x)$. Рассмотрим два случая, а именно, нагрузка перпендикулярна к поверхности $z=-h(x)$ и нагрузка имеет направление оси oz. Тогда с учетом (1.3) при $z=-h(x)$ имеем:

Вариант I. Нагрузка направлена по оси oz.

$$\begin{array}{l} \sigma_{13}+h'(x)\sigma_{11}=h'(x)q(x), \qquad \sigma_{23}+h'(x)\sigma_{21}=0 \\ \sigma_{33}-h'^2(x)\sigma_{11}=q(x) \end{array} \tag{1.4}$$

Вариант II. Нагрузка перпендикулярна к поверхности $z=-h(x)$.

$$\begin{array}{l} \sigma_{13}+h'(x)\sigma_{11}=0, \qquad \sigma_{23}+h'(x)\sigma_{21}=0 \\ \sigma_{33}-h'^2(x)\sigma_{11}=q(x)\sqrt{1+h'^2(x)} \end{array} \tag{1.5}$$

Граничные условия (1.4) и (1.5) показывают различие способа приложения поперечной нагрузки.

2. Уравнения движения пластинки в усилиях и моментах выводятся следующим образом. Определяются усилия и моменты [4, 5]

$$\begin{array}{l} T_1=\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}\sigma_{11}dz, \quad T_2=\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}\sigma_{22}dz, \quad S=\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}\sigma_{12}dz \\ M_1=\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}z\sigma_{11}dz, \quad M_2=\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}z\sigma_{22}dz, \quad H=\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}z\sigma_{12}dz \\ N_1=\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}\sigma_{13}dz, \quad N_2=\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}\sigma_{23}dz \end{array} \tag{2.1}$$

Уравнения движения упругого элемента с учетом собственного веса

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\delta_{3i}\rho g=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

(δ_{ij} – символ Кронекера, ρ – плотность материала пластинки, g – ускорение свободного падения, u_i – компоненты вектора перемещения точек пластинки) осредняются обычным образом.

При этом переменность толщины приводит к необходимости использования следующего равенства:

$$\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}\frac{\partial f}{\partial x}dz=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-h(x)}^{h(x)}f(x,y,z)dz-h'(x)\big(f(x,y,h(x))+f(x,y,-h(x))\big) \tag{2.3}$$

Например,

$$\int_{-h(x)}^{h(x)} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dz = \frac{\partial T_1}{\partial x} - h'(x)\left(\sigma_{11}(h) + \sigma_{11}(-h)\right)$$

$$\int_{-h(x)}^{h(x)} z\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dz = \frac{\partial M_1}{\partial x} - h(x)h'(x)\left(\sigma_{11}(h) - \sigma_{11}(-h)\right)$$

Осреднение уравнений (2.2) по толщине пластинки, с использованием (2.3) и граничных условий (1.2), (1.4) и (1.5) приводит к следующим уравнениям движения пластинки переменной толщины в усилиях и моментах:

нагрузка направлена по оси oz

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = h'(x)q(x) + \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} u_1 dz \\
&\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} u_2 dz \\
&\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + 2\rho g h = q\left(1 + h'^2(x)\right) + \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} u_3 dz \\
&\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 = -hh'q + \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} zu_1 dz \\
&\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - N_2 = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} zu_2 dz
\end{aligned} \tag{2.4}$$

нагрузка перпендикулярна к поверхности $z = -h(x)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} u_1 dz \\
&\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} u_2 dz \\
&\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + 2\rho g h = q\sqrt{1 + h'^2} + \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} u_3 dz \\
&\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} zu_1 dz \\
&\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - N_2 = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h(x)}^{h(x)} zu_2 dz
\end{aligned} \tag{2.5}$$

В рамках гипотезы Кирхгофа напряжения и усилия выражаются посредством перемещений срединной поверхности пластинки $u(x,y,t)$, $\mathrm{v}(x,y,t)$, $w(x,y,t)$ обычным образом [4]. Приведем выражения для усилий и моментов:

$$T_1=\frac{2Eh(x)}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial \text{v}}{\partial y}\right),\quad T_2=\frac{2Eh(x)}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \text{v}}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$S=\frac{Eh(x)}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \text{v}}{\partial x}\right),\quad H=-\frac{2Eh^3(x)}{3(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{2.6}$$

$$M_1=-\frac{2Eh^3(x)}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad M_2=-\frac{2Eh^3(x)}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

Подставляя значения усилий и моментов из (2.6) в уравнения (2.4) или (2.5), получим следующие уравнения движения пластинки переменной толщины в перемещениях:

$$\frac{2Eh(x)}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{2Eh'(x)}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial \text{v}}{\partial y}\right)=Q_1(x)+2\rho h(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{2Eh(x)}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial x^2}\right)+\frac{Eh'(x)}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \text{v}}{\partial x}\right)=2\rho h(x)\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}&2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\Delta^2 w+Q_2(x)-2\rho g h(x)+Q_3(x)+\\&+\frac{2E}{1-\nu^2}\left[2h^2h'\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)+\left(2hh'^2+h^2h''\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]=0\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $D=\dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$,

$$Q_1(x)=\begin{cases}h'(x)q(x); & \text{нагрузка направлена по оси } oz\\ 0; & \text{нагрузка перпендикулярна к поверхности } z=-h(x)\end{cases}$$

$$Q_2(x)=\begin{cases}q(x)\left(1+h'^2\right); & \text{нагрузка направлена по оси } oz\\ q(x)\sqrt{1+h'^2}; & \text{нагрузка перпендикулярна к поверхности } z=-h(x)\end{cases}$$

$$Q_3(x)=\begin{cases}-\left(hh'q\right)'; & \text{нагрузка направлена по оси } oz\\ 0; & \text{нагрузка перпендикулярна к поверхности } z=-h(x)\end{cases}$$

На основе уравнений (2.7) можно исследовать колебания, определить напряженно-деформированное состояние пластинки переменной толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов.Ереван: НАН РА. 2000. 122с.

2. Киракосян Р.М. К определению напряжений поперечного направления ортотропной идеально-пластической пластинки переменной толщины .//Изв.АН Арм.ССР.Механика.1990.Т.43.N 2.С.29-37.

3. Белубекян М.В.,Саркисян С.В. Об одном уточнении уравнений нелинейных колебаний пластин. //Уч. записки ЕГУ. 1992. N1.С.41-46.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1981. 544с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
27.11.2006