

УДК 539.3

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОФИЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК ВЗРЫВНОГО ТИПА  
Немировский Ю.В., Янковский А.П.

**Ключевые слова:** динамическое деформирование, вязкопластическая модель, оболочки, нагрузки взрывного типа, численное интегрирование, рациональное профилирование

**Keywords:** dynamic straining, visco-plastic model, shells, loadings of explosive type, a numerical integration, a rational roll forming

Յու. Վ. Նեմիրովսկի, Ա.Պ. Յանկովսկի

Մածուցիկապլաստիկ թաղանթների ռացիոնալ պրոֆիլավորումը պայթյունային տիպի բեռների ազդեցության դեպքում

Ձևակերպված է իզոտրոպ թաղանթների մածուցիկապլաստիկ դինամիկ դեֆորմացիան խնդիրը: Մշակված է սկզբնական եզրային խնդրի թվային ինտեգրման մեթոդ: Հաստատուն և փոփոխական հաստության գլանաձև թաղանթների ոչ առաձգական դինամիկայի հաշվարկների վրա ցույց է տրված այդ մեթոդի արդյունավետությունը: Ցույց է տրված, որ կարճ թաղանթների ռացիոնալ պրոֆիլավորումը մնացորդային ձկվածքների մաքսիմալ արժեքները կարելի է փոքրացնել մի քանի անգամ, իսկ հաստատուն հաստության երկար թաղանթները մոտ են ռացիոնալ նախագծերին:

Yu.V. Nemirovskii, A.P. Yankovskii

Rational Roll Forming Visco-Plastic of Shells at Act of Loadings of Explosive Type

The problem a visco-plastic dynamic straining of isotropic shells is formulated. The method of a numerical integration of the put initial-bending problem is developed. Efficiency of this method is shown on calculations of non-elastic dynamics of cylindrical shells of a constant and variable thickness. It is shown, that due to a rational roll forming of short shells the maximum magnitude of their residual bending flexures can be reduced in some times, and long shells of constant thickness are close to rational designs.

Сформулирована задача вязкопластического динамического деформирования изотропных оболочек. Разработан метод численного интегрирования поставленной начально-краевой задачи. Эффективность этого метода продемонстрирована на расчетах неупругой динамики цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины. Показано, что за счет рационального профилирования коротких оболочек максимальную величину их остаточных прогибов можно уменьшить в несколько раз, а длинные оболочки постоянной толщины близки к рациональным проектам.

Оболочки составляют основу многих ответственных элементов судостроительной, машиностроительной и авиационной техники. При воздействии динамических нагрузок высокой интенсивности их повреждаемость во многом определяет возможность дальнейшего функционирования указанных объектов, поэтому проблема динамического расчета таких элементов конструкций является одной из важнейших в механике деформируемого твердого тела. Большинство существующих на сегодня решений основано на модели идеального жесткопластического тела [1 и др.]. Как правило, решения являются приближенными, получены на основе

экстремальных принципов динамики жесткопластического тела и относятся к однородным изотропным пластинам постоянной толщины. Исследование же неупругого деформирования оболочечных конструкций находится пока в зачаточном состоянии [2]. Целью настоящей работы является разработка численного метода решения начально-краевой задачи динамического вязкопластического деформирования изотропных оболочек постоянной и переменной толщины и анализ влияния законов изменения толщин оболочек на величину их остаточных прогибов при действии нагрузок взрывного типа.

Рассмотрим вязкопластическое деформирование тонкой оболочки переменной толщины  $2H$ , подчиняющейся гипотезам Кирхгофа–Лява. Для формулировки задачи неупругой динамики используем: общеизвестные уравнения движения [3]

$$\begin{aligned} & \left( A_j F_{ii} \right)_{,i} - A_{j,i} F_{jj} + \left( A_i F_{ji} \right)_{,j} + A_{i,j} F_{ij} + R_i^{-1} \left[ \left( A_j M_{ii} \right)_{,i} - A_{j,i} M_{jj} + \right. \\ & \left. + \left( A_i M_{ji} \right)_{,j} + A_{i,j} M_{ij} + A_1 A_2 m_i \right] + A_1 A_2 q_i = 2HA_1 A_2 \rho u_{i,t} \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2) \\ & \sum_{i=1}^2 \left\{ A_i^{-1} \left[ \left( A_j M_{ii} \right)_{,i} - A_{j,i} M_{jj} + \left( A_i M_{ji} \right)_{,j} + A_{i,j} M_{ij} + A_1 A_2 m_i \right] \right\}_{,i} - \\ & - A_1 A_2 \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} F_{ii} + A_1 A_2 q_z = 2HA_1 A_2 \rho w_{,tt} \quad (j = 3 - i) \end{aligned} \quad (1)$$

связь между скоростями мембранных деформаций  $\dot{e}_{ij}$ , скоростями искривления  $\dot{\kappa}_{ij}$  срединной поверхности оболочки и скоростями смещений точек этой поверхности

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ii} &= A_i^{-1} v_{i,i} + (A_1 A_2)^{-1} A_{i,j} v_j + R_i^{-1} v, \quad 2\dot{e}_{12} = 2\dot{e}_{21} = A_1 A_2^{-1} (v_1 / A_1)_{,2} + \\ & + A_2 A_1^{-1} (v_2 / A_2)_{,1}, \quad \dot{\kappa}_{ii} = A_i^{-1} (v_{,i} / A_i - v_i / R_i) - (A_1 A_2)^{-1} A_{i,j} \times \\ & \times (v_{,j} / A_j - v_j / R_j) \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2), \quad 2\dot{\kappa}_{12} = 2\dot{\kappa}_{21} = -(A_1 A_2)^{-1} \times \\ & \times (v_{,12} - A_{1,2} v_{,1} / A_1 - A_{2,1} v_{,2} / A_2) + R_1^{-1} (v_{1,2} / A_2 - A_{1,2} v_1 / (A_1 A_2)) + \\ & + R_2^{-1} (v_{2,1} / A_1 - A_{2,1} v_2 / (A_1 A_2)), \quad v_i = u_{i,t} \quad (i = 1, 2), \quad v = w_{,t} \end{aligned} \quad (2)$$

определяющие соотношения, связывающие мембранные усилия  $F_{ij}$  и моменты  $M_{ij}$  в оболочке с  $\dot{e}_{ml}$  и  $\dot{\kappa}_{ml}$ ,

$$F_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (A_{ijml} \dot{e}_{ml} + B_{ijml} \dot{\kappa}_{ml}), \quad M_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (B_{ijml} \dot{e}_{ml} + C_{ijml} \dot{\kappa}_{ml}), \quad i, j = 1, 2 \quad (3)$$

где коэффициенты  $A_{ijml}$ ,  $B_{ijml}$ ,  $C_{ijml}$  нелинейно зависят от  $\dot{e}_{ml}$  и  $\dot{\kappa}_{ml}$ ;  $A_i$ ,  $R_i$  – параметры Ламе и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки соответственно;  $q_i$ ,  $q_z$ ,  $m_i$  – приведенные внешние распределенные нагрузки и моменты в направлениях  $\alpha_i$ ,  $z$  соответственно;  $w$ ,  $u_i$  – прогиб и перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлениях  $\alpha_i$

( $i = 1, 2$ ) ортогональной сопряженной системы криволинейных координат;  $\rho$  – объемная плотность материала оболочки; индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной  $\alpha_i$  или времени  $t$ .

Согласно вязкопластической модели [4] напряжение  $\sigma$  при одноосном напряженном состоянии зависит от скорости деформации  $\dot{\epsilon}$  материала. Аппроксимируем зависимость  $\sigma \square \dot{\epsilon}$  двухзвенной ломаной, тогда в силу известного формального сходства определяющих уравнений теории упругопластических деформаций и теории вязкопластического течения [5] выражения для  $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$  формально совпадают с аналогичными коэффициентами, полученными авторами в [6]. Эти выражения чрезвычайно громоздки, поэтому не будем их здесь приводить.

Подставим соотношения (2) в (3), а последнее в (1), тогда получим систему разрешающих уравнений движения, записанную в операторной форме,

$$2HA_1A_2\rho v_{i,t} = A_1A_2(q_i + m_i/R_i) + L_i(v_1, v_2, v), \quad i = 1, 2$$

$$2HA_1A_2\rho v_{,t} = A_1A_2q_z + \sum_{i=1}^2 (A_i^{-1}A_1A_2m_i)_{,i} + L(v_1, v_2, v) \quad (4)$$

$$u_{i,t} = v_i \quad (i = 1, 2), \quad w_{,t} = v \quad (5)$$

где  $L_i, L$  – некоторые квазилинейные дифференциальные операторы (в общем случае весьма громоздкие, поэтому не будем их выписывать).

Для однозначного интегрирования системы (4), (5) необходимо использовать начальные

$$v_i(\alpha_1, \alpha_2, t_0) = v_{0i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad v(\alpha_1, \alpha_2, t_0) = v_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t_0) = u_{0i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad w(\alpha_1, \alpha_2, t_0) = w_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

и общеизвестные граничные условия [3], которые не будем здесь приводить. (Если заданы кинематические граничные условия для перемещений  $w, u_i$ , то за счет (5) можно получить соответствующие условия для скоростей смещений  $v, v_i$ . А при задании на кромках силовых факторов следует использовать соотношение (3) с учетом (2)).

Если скорости смещений  $v, v_i$  известны, то определение перемещений  $w, u_i$  ( $i = 1, 2$ ) из начальной задачи (5), (7) не вызывает затруднений. Для определения же скоростей  $v, v_i$  необходимо использовать систему (4), начальные (6) и соответствующие граничные условия. Система (4) является замкнутой относительно  $v, v_i$  системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Для численного интегрирования по времени начально-краевой задачи, соответствующей системе (4), используем метод трапеций, имеющий второй порядок точности по  $\tau$ , где  $\tau$  – шаг по времени  $t$ . Реализация этого метода подробно изложена в

[7], следует лишь почти дословно применить ход рассуждений из [7] к системе (4).

Важная особенность предложенного метода состоит в том, что для нахождения значений функций  $v, v_i$  на  $n$ -м по времени слое  $t_n = n\tau$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) необходимо решить задачу о вязкопластическом деформировании (об установившейся ползучести) оболочки на линейно-вязком основании, которая, как уже отмечалось, формально схожа с задачей об упругопластическом деформировании оболочек на линейно-упругом основании. Методы линеаризации и интегрирования таких задач достаточно хорошо разработаны [6, 8], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно.

В качестве примера рассмотрим задачу о вязкопластической динамике круговой цилиндрической замкнутой оболочки переменной толщины, осесимметрично деформируемой нагрузками взрывного типа. Оболочка имеет длину  $L$ , радиус  $R = 0,5$  м, а толщина ее может быть постоянной ( $2H(x_1) = 2H_* = \text{const}$ ) или переменной и определяется формулой

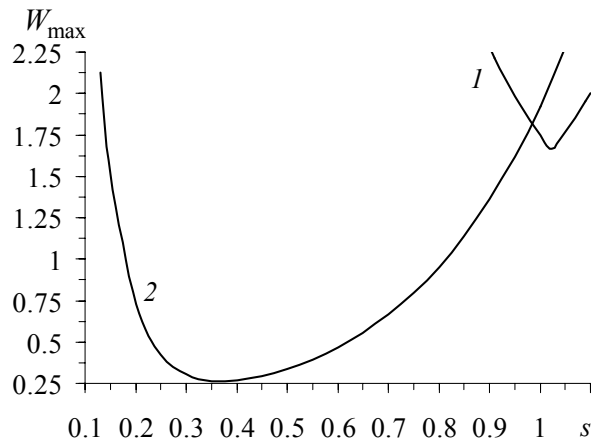
$$H(x_1) = sH_* + \pi \sin(\pi x_1 / L)(1-s)H_* / 2 \quad (0 \leq x_1 \leq L) \quad (8)$$

При задании полутолщины тонкой цилиндрической оболочки в виде (8) расход материала с точностью используемой теории будет такой же, как и в оболочках постоянной полутолщины  $H_*$ . При  $0 < s < 1$  из (8) следует, что толщина оболочки на кромках  $x_1 = 0, L$  меньше, чем в центральном сечении  $x_1 = L/2$ ; при  $s = 1$  получаем оболочку постоянной полутолщины  $H_*$ ; при  $s > 1$  толщина оболочки на кромках больше, чем в центральном сечении. В расчетах принималось  $H_* = 1,5$  см.

На кромках  $x_1 = 0, L$  оболочка может быть шарнирно оперта или жестко закреплена. Конструкция динамически нагружается внутренним давлением взрывного типа

$$q_z(x_1, t) = q_z(t) = p_0 \exp(-\alpha t), \quad q_1 = q_2 = 0 \quad (\alpha = 12 \text{ с}^{-1}, \quad t \geq 0) \quad (9)$$

где  $p_0$  – значение нагрузки в начальный момент времени  $t_0 = 0$ , в который оболочка находится в покое. Оболочка изготовлена из алюминиевого сплава Д16:  $\sigma_s = 380$  МПа,  $\rho = 2780$  кг/м<sup>3</sup>. Вязкое упрочнение материала не учитывается, так как предел текучести алюминиевых сплавов практически не чувствителен к скорости деформации [9]. Коэффициент линейной вязкости, характеризующий начальный участок двухзвенной ломаной, аппроксимирующей зависимость  $\sigma \square \dot{\epsilon}$  материала оболочки, в расчетах принимался  $E = 10^{16}$  Па·с, что соответствует вязкопластической модели, приближенной к модели жесткопластического тела.



Фиг. 1

На фиг. 1 изображены кривые, характеризующие зависимость максимального остаточного прогиба  $W = H_* w / L^2$  шарнирно опертых оболочек разной длины от значения параметра  $s$  в (8) при разных уровнях  $p_0$

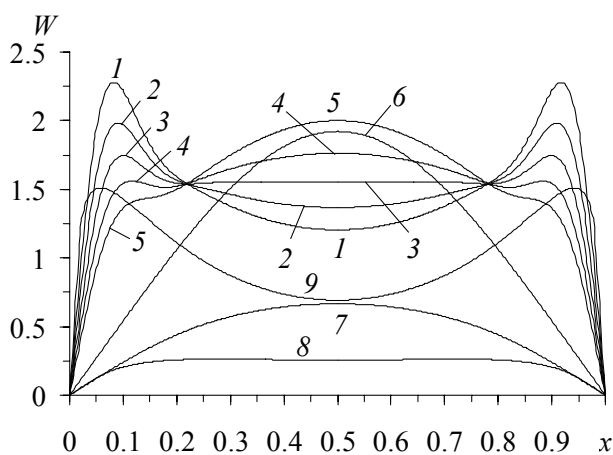
нагрузки. Кривая 1 рассчитана для длинной оболочки  $L = 3$  м при  $p_0 = 50$  МПа, а линия 2 – для короткой оболочки  $L = 0,5$  м при  $p_0 = 30$  МПа. Обе кривые имеют локальные минимумы, которым соответствуют рациональные профили оболочки (8), обеспечивающие наименьшие остаточные прогибы. Так как в рамках вязкопластической модели величина остаточных прогибов является мерой повреждаемости конструкции, из поведения кривых на фиг. 1 следует, что за счет рационального профилирования остаточные прогибы оболочки можно уменьшить в разы, повышая, тем самым, существенно сопротивляемость конструкции нагрузкам взрывного типа.

Кривая 1 имеет локальный минимум в точке  $s = 1,024 \approx 1$ , поэтому длинные оболочки постоянной толщины при нагрузках вида (9) могут рассматриваться как рациональные или близкие к рациональным. Это объясняется тем, что в длинных оболочках большая часть диссипации энергии осуществляется основным напряженным состоянием, которое близко к безмоментному и однородному; краевые же эффекты вносят незначительный вклад в диссипацию (этот вклад для кривой 1 сказался в том, что минимум ее реализуется при  $s = 1,024$ , а не строго при  $s = 1$ ). Для коротких же оболочек постоянной толщины, наоборот, большая часть диссипации осуществляется за счет изгибных напряжений, поэтому профилирование для таких оболочек является более эффективным (см. кривую 2) и в рациональном проекте, как будет показано ниже, вновь приводит к напряженному состоянию, близкому к безмоментному и однородному.

Кривые, качественно схожие с теми, что изображены на фиг. 1, получаются и для зависимостей времени остановки движения оболочки от параметра  $s$  в (8). Эти кривые также имеют локальные минимумы, причем при тех же значениях  $s$ , что и линии на фиг. 1.

На фиг. 2 изображены эпюры безразмерных остаточных прогибов оболочек при разных значениях  $s$  (по оси абсцисс отложена безразмерная продольная координата  $x = x_1 / L$ ). Кривые 1–5 получены для длинной оболочки  $L = 3$  м при  $p_0 = 50$  МПа, а линия 6–9 – для короткой оболочки  $L = 0,5$  м при  $p_0 = 30$  МПа. Кривые 1–5 рассчитаны при значениях  $s = 0,9 + 0,05(k - 1)$ ,

где  $k$  – номер кривой; линии 6, 7, 8, 9 определены при значениях  $s = 1, 0,7, 0,35, 0,15$  соответственно. Значения максимумов кривых 1–5 и 6–9 на фиг. 2 соответствуют точкам на кривых 1 и 2 фиг. 1 при указанных выше значениях  $s$ .



Фиг. 2

Сравнение кривых на фиг. 2 позволяет проследить за изменением формы остаточных прогибов цилиндрической оболочки в зависимости от формы ее профиля. Центральные участки кривых 3, 8 почти горизонтальны. Это позволяет утверждать, что в оболочках с рациональными

профилями (как длинных, так и коротких) реализуется основное напряженное состояние, близкое к безмоментному и однородному.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-08035-офи).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Комаров К.Л., Немировский Ю.В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1984. 236 с.
2. Кошур В.Д., Немировский Ю.В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1990. 200 с.
3. Огибалов П.М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1963. 414 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
6. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Термоупругопластический изгиб слоисто-волоконистых пластин // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 4. С. 467–493.
7. Янковский А.П. Численное интегрирование задачи вязкопластической динамики слоисто-волоконистых прямоугольных удлиненных пластин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XIX Всерос. конф., Бийск, 28–31 августа 2005 г. / Под ред. В.М. Фомина. Новосибирск: «Параллель», 2005. С. 290–297.
8. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 492 с.

9. Мейден (С.J. Maiden), Грин (S.J. Green). Испытание на скоростное деформирование при сжатии для шести материалов при скоростях деформации от  $10^{-3}$  до  $10^4$  мм/мм/сек // Прикладная механика / Тр. амер. общества. Ser. E. 1966. № 3. –С. 20–30.

Институт теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск

Поступила в редакцию  
20.12.2006