ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 539.3

ГИБРИДНОЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Немировский Ю.В.

Ключевые слова: гибридное и оптимальное проектирование, армированные конструкции, равнодеформируемость, равная трещиностойкость покрытий, конструкции минимального веса

Keywords: the hybrid and optimum designing, the reinforced designs, equal-deformability, equal crack resistance of coverings, designs of the minimal weight.

Յու. Վ. Նեմիրովսկի

Կոմպոզիտ սալերի հիբրիդային և օպտիմալ նախագծումը

Ձևակերպված շերտա-թելիկավոր կառուցվածքի կոմպոզիտ կոնստրուկցիաների նախագծման խնդիրը կայանում է ֆազային նյութերի դիրքերի որոշման և շերտերի երկրաչափական պրոֆիլավորման մեջ, ապահովելու համար անհրաժեշտ շահագործման և զանգվածածավալային հատկությունները: Դիտարկված են օղակաձև սալերի հիբրիդային նախագծման օրինակներ հարթության մեջ բեռնավորման և լայնական ծռման դեպքերում: Ցույց է տրված, որ մինիմալ քաշի նախագծերը կազմում են հիբրիդային նախագծերի ենթադաս:

Yu.V. Nemirovskii

Hybrid and Optimum Designing Composit Plates

The problem of hybrid designing of composit designs of layer-fibrous structure is formulated consists in determination of a site of phase materials and a geometrical roll forming of layers for maintenance of necessary operational and mass-dimensional qualities of a product. Illustrative instances of hybrid designing of ring plates are observed at a loading in a plane and at a cross-bending. It is shown, that designs of the minimal weight make a subclass of hybrid designs.

Сформулированная задача гибридного проектирования композитных конструкций слоисто-волокнистой структуры заключается в установлении местоположения фазовых материалов и геометрического профилирования слоев для обеспечения необходимых эксплуатационных и массово-габаритных качеств изделия. Рассмотрены иллюстративные примеры гибридного проектирования кольцевых пластин при нагружении в плоскости и при поперечном изгибе. Показано, что проекты минимального веса составляют подкласс гибридных проектов.

Проблема создания эффективных в эксплуатации тонкостенных конструкций минимального веса имеет исключительно важное значение для объектов аэрокосмической, судостроительной и машиностроительной техники. Для конструкций из однородных материалов эта проблема нашла широкое освещение в рамках теорий оптимального проектирования и сводится к поиску законов профилирования толщины конструкции вдоль некоторой отсчетной поверхности. В последние десятилетия разработаны многочисленные технологические приемы (сварка взрывом, склейка, плазменное и газодинамическое напыление, армирование, профильное фрезерование и др.), позволяющие создавать композитные конструкции без каких-либо серьезных ограничений на характер перераспределения объединяемых материалов и их физико-механические характеристики. Вопрос создания эффективных композитных конструкций при этом сводится не только к геометрическому профилированию конструкции, но также к отбору и установлению необходимого местоположения составляющих изделие конструкционных материалов, позволяющих наиболее эффективно использовать положительные качества всех или большинства из них. Такую проблему будем именовать проблемой гибридного или мозаичного проектирования [1, 2] и в данной статье рассмотрим ее решение применительно к конструкциям типа дисков газовых турбин и изгибаемых круглых и кольцевых пластин.

В условиях плоского напряженного состояния эффективные конструкции могут быть получены путем армирования по определенным криволинейным траекториям [3]. Полотно диска может быть создано путем соединения нескольких материалов в трансверсальном направлении, часть из которых может быть армирована, а остальные могут оставаться изотропными материалами. Такие комбинированные конструкции открывают большие возможности для управления напряженно-деформированным состоянием и создания высокоэффективных конструкций. Для простоты изложения мы ограничимся трехслойными структурами, обеспечивающими осесимметричное состояние и симметрию относительно срединной поверхности. Тогда основные уравнения для силовых и кинематических величин в комбинированном диске будут иметь вид:

$$\frac{d(rN_1)}{dr} - N_2 + \omega^2\varphi(r) = 0,\ \varphi(r) = \frac{r^2}{g}\left[\delta\rho(r) + 2\bar{\rho}h(r)\right] \tag{1}$$

$$N_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2,\ N_2 = a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 \tag{2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dr},\ \varepsilon_2 = \frac{u}{r},\ \frac{d(r\varepsilon_2)}{dr} = \varepsilon_1,\ \varepsilon_3 = \varepsilon_1 l_{13}^2 + \varepsilon_2 l_{23}^2 \tag{3}$$

$$a_{11} = \left[\frac{E_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2} + \sum_{k=1}^{3} E_k\omega_k l_{1k}^4\right]\delta + \frac{2\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}h$$

$$a_{12} = \left[\frac{E_c\nu_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2} + \sum_{k=1}^{3} E_k\omega_k l_{1k}^2 l_{2k}^2\right]\delta + \frac{2\bar{E}\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}^2}h$$

$$a_{22} = \left[\frac{E_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2} + \sum_{k=1}^{3} E_k\omega_k l_{2k}^4\right]\delta + \frac{2\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}h \tag{4}$$

$$\rho = \rho_c(1-\Omega) + \sum_{k=1}^{3}\omega_k\rho_k,\ \Omega = \sum_{k=1}^{3}\omega_k,\ \omega_k = \frac{d_k}{rl_{1k}},\ d_k = r_1\omega_{0k}l_{1k}^0$$

$$l_{1k} = \sin\psi_k,\ l_{2k} = \cos\psi_k,\ k = 1,\ 2,\ 3. \tag{5}$$

Здесь $E_c, \nu_c, \rho_c, \bar{E}, \bar{\nu}, \bar{\rho}$ — модули Юнга, коэффициенты Пуассона и плотности материалов связующего и изотропного покрывающего слоя, E_k, ω_k, ψ_k — модуль упругости, плотность армирования и угол армирования k-го семейства арматуры ($k=1$ — радиальные волокна, $k=2$ — окружные, $k=3$ — спиральные), δ — толщина армированного слоя, $h(r)$ — толщины покрывающих слоев, $u(r)$ — радиальное перемещение, ω — угловая скорость вращения диска. Равенства (5) соответствуют условию постоянства сечений армирующих волокон. При этом для волокон окружного армирования в общем случае $\omega_2(r)$ — произвольная заданная или искомая функция, $\varepsilon_3(r)$ — деформация спиральных волокон.

В рамках гибридного проектирования вопрос об эффективном использовании качеств материалов тесно увязан с целями введения и функционирования этих материалов в композитной конструкции. В связи с этим рассмотрим некоторые из естественных предъявляемых к ним требованиям.

а) Равнодеформируемость окружных волокон в конструкции:

$$\varepsilon_2(r) = \varepsilon_{02} = \text{const} \tag{6}$$

где ε_{02} — предельная упругая деформация волокон окружного направления. В этом случае в соответствии с (3) будем иметь

$\varepsilon_1(r) = \varepsilon_3(r) = \varepsilon_{02}$ (7) Это означает, что для радиальных и спиральных волок

$$r\frac{d(a_{11}+a_{12})}{dr} + a_{11} - a_{22} + \frac{\omega^2}{\varepsilon_{02}}\varphi(r) = 0 \tag{8}$$

и вес рассматриваемого гибридного диска будет определяться равенством

$$B = \delta\left[\rho_0\left(r_2^2 - r_1^2\right) + d_1(\rho_1-\rho_0)(r_2-r_1) + (\rho_2-\rho_1)\int_{r_1}^{r_2}\omega_2(r)rdr + \right.$$

$$\left. + d_3(\rho_3-\rho_0)\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{l_{13}(r)}\right] + 2\bar{\rho}\int_{r_1}^{r_2}h(r)rdr \tag{9}$$

Напряжения в связующем материале и материале покрывающего слоя определяются равенствами

$$\sigma_{1c} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2}(\varepsilon_1 + \nu_c\varepsilon_2),\ \sigma_{2c} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2}(\varepsilon_2 + \nu_c\varepsilon_1)$$

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}(\varepsilon_1 + \bar{\nu}\varepsilon_2),\ \bar{\sigma}_2 = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}(\varepsilon_2 + \bar{\nu}\varepsilon_1) \tag{10}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае материалы связующего и покрытия должны быть подобраны так, чтобы выполнялись неравенства

$$E_c\varepsilon_{02} \le \sigma_{0c}(1-\nu_c),\ \bar{E}\varepsilon_{02} \le \bar{\sigma}_0(1-\bar{\nu}) \tag{11}$$

Перемещение на границе $r = r_1$ вала в этом случае будет равно

$$u(r_1) = \varepsilon_{02}r_1 \tag{12}$$

Это означает, что диаметр вала и его упругие характеристики должны быть подобраны так, чтобы на внешнем его радиусе перемещение определялось равенством (12). Равенство (8) при учете зависимостей (4), (5) содержит три управляющие функции $h(r),\ \omega_2(r),\ l_{13}(r)$ и поэтому допускает множество проектов, обладающих рассматриваемыми качествами. Дальнейшее сужение класса проектов может осуществляться либо за счет конкретного выбора каких-либо двух функций вследствие определенных ограничений возможности технологической реализации, либо за счет формулировки дополнительных требований к проекту, например, требования минимума функционала веса (9).

б) Равнодеформируемость радиальных волокон:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{01} = \text{const} \tag{13}$$

Тогда из (3) в случае абсолютно жесткого вала имеем

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{01}\left(1-\frac{r_1}{r}\right),\ \ \varepsilon_3 = \varepsilon_{01}\left(1-\frac{r_1}{r}l_{23}^2\right) \tag{14}$$

Таким образом, окружные волокна необходимо подобрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon_{01}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right) \le \varepsilon_{02} \tag{15}$$

Можно дополнительно выставить требование равнодеформируемости спиральных волокон $\varepsilon_3\left(r\right) = \varepsilon_{03} = \mathrm{const}$. Тогда для траекторий спиральных волокон получим уравнение

$$l_{23}^2 = \frac{\varepsilon_{01}-\varepsilon_{03}}{\varepsilon_{01}}\frac{r}{r_1},\ \ r_1 \le r \le r_2 \tag{16}$$

Следовательно, для материалов спиральных волокон и размеров диска должны выполняться неравенства

$$\varepsilon_{01} > \varepsilon_{03},\ \frac{r_2}{r_1} \le \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{01}-\varepsilon_{03}} \tag{17}$$

При этом, для усилий N_1, N_2 получим равенст

$$N_1 = f_1\left(r\right) - \delta a_1\left[1+\nu_c\left(1-\frac{r_1}{r}\right)\right]\omega_2\left(r\right) + a_2\left[1+\bar{\nu}\left(1-\frac{r_1}{r}\right)\right]h\left(r\right)$$

$$N_2 = f_2\left(r\right) - \delta a_1\left(1+\nu_c-\frac{r_1}{r}\right)\omega_2\left(r\right) + a_2\left(1+\bar{\nu}-\frac{r_1}{r}\right)h\left(r\right) \tag{18}$$

где

$$f_1\left(r\right) = \delta a_1\left(1-\omega_1-2\omega_3\right)\left[1+\nu_c\left(1-\frac{r_1}{r}\right)\right] + \delta E_1\varepsilon_{01}\omega_1 +$$

$$+\delta E_3\varepsilon_{01}\omega_3\left(1-l_{23}^2\right)\left(1-l_{23}^2\frac{r_1}{r}\right)$$

$$f_2\left(r\right) = \delta a_1\left(1-\omega_1-2\omega_3\right)\left(1+\nu_c-\frac{r_1}{r}\right) + \delta E_3\varepsilon_{01}\omega_3 l_{23}^2\left(1-l_{23}^2\frac{r_1}{r}\right)$$

$$a_1 = \frac{E_c\varepsilon_{01}}{1-\nu_c^2},\ \ a_2 = \frac{2\bar{E}\varepsilon_{01}}{1-\bar{\nu}^2}$$

Напряжения в связующем материале и покрывающем слое определяются выражениями

$$\sigma_{1c} = a_1\left(1+\nu_c-\nu_c\frac{r_1}{r}\right),\ \ \sigma_{2c} = a_1\left(1+\nu_c-\frac{r_1}{r}\right)$$

$$\bar{\sigma}_1 = a_2\left(1+\bar{\nu}-\bar{\nu}\frac{r_1}{r}\right),\ \ \bar{\sigma}_2 = a_2\left(1+\bar{\nu}-\frac{r_1}{r}\right)$$

которые с помощью условия пластичности Мизеса позволяют установить допустимые требования на механические характеристики материалов покрывающего слоя и связующего. Подставляя далее выражения (18) в (1), получим уравнение, связывающее две управляющие функции $\omega_2(r)$ и $h(r)$. Дополнительное уравнение получим минимизируя функционал (9).

в) Равная трещиностойкость покрывающего слоя. Материалы покрывающих слоев во многих случаях обладают склонностью к хрупкому разрушению. Поэтому для конструкций с такими покрытиями целесообразно требовать равной трещиностойкости по всему полотну диска, что эквивалентно выполнению равенства

$$\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2^2 = \bar{\sigma}_0^2$$

или

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}_0 \cos\theta,\ \bar{\sigma}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}_0 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \tag{19}$$

Тогда для деформаций ε_1, ε_2 получим выражения

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{E}}\left(1+\bar{\nu}\right)\left[\cos\theta - \bar{\nu}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{E}}\left(1+\bar{\nu}\right)\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \bar{\nu}\cos\theta\right] \tag{20}$$

Подставляя эти выражения в условие совместности деформаций (3), получим уравнение для определения функций $\theta(r)$:

$$d\ln r^{1+\bar{\nu}} = \frac{\sqrt{3} - \left(1-2\bar{\nu}\right)\operatorname{tg}\theta}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta}d\theta \tag{21}$$

При наличии абсолютно жесткого вала начальное условие для интегрирования этого уравнения имеет вид

$$\operatorname{tg}\theta\left(r_1\right) = -\frac{\sqrt{3}}{1-2\bar{\nu}} \tag{22}$$

После определения из (20) деформаций $\varepsilon_1(r), \varepsilon_2(r)$ для деформаций в спиральной арматуре будем иметь выражения

$$\varepsilon_3(r) = \varepsilon_1(r)l_{13}^2 + \varepsilon_2(r)\left(1 - l_{13}^2\right)$$

и если потребовать дополнительно выполнения условия равнодеформируемости спиральной арматуры, то получим уравнение

$$l_{13}^2 = \frac{\varepsilon_{03} - \varepsilon_2(r)}{\varepsilon_1(r) - \varepsilon_2(r)},\ r_1 \le r \le r_2 \tag{23}$$

После этого из уравнения (1) получим соотношение, связывающее управляющие функции $\omega_2(r)$ и $h(r)$. Дополнительное уравнение получим, минимизируя функционал веса (9).

г) Критерий минимального веса для слоистого диска. В работе [4] получен критерий оптимального проектирования неоднородных тонкостенных слоистых конструкций, который для рассматриваемого слоистого и армированного диска сводится к равенствам

$$(1-\Omega)\frac{E_c}{1-\nu_c^2}\left(\varepsilon_1^2+2\nu_c\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\omega_k E_k\left(\varepsilon_1 l_{1k}^2+\varepsilon_2 l_{2k}^2\right)^2-\frac{\rho\omega^2 r^3\varepsilon_2}{g}=A\rho(r) \tag{24}$$

$$\frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}\left(\varepsilon_1^2+2\bar{\nu}\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\right)-\frac{\bar{\rho}\omega^2 r^3\varepsilon_2}{g}=A\bar{\rho},\;\; A=\mathrm{const} \tag{25}$$

Эти соотношения вместе с условиями совместности деформаций (3), постоянства сечений волокон (5) и уравнением равновесия (1) определяют замкнутую систему уравнений для определения деформаций ε_1, ε_2, траекторий спиральных волокон l_{13} и толщины покрывающего слоя $h(r)$.

В случае изгиба рассматриваемых пластин, нагруженных распределенной поперечной нагрузкой $q(r)$, уравнения равновесия имеют вид

$$rQ=r_1Q_1-\int_{r_1}^{r} qrdr=p(r) \tag{26}$$

$$r\frac{dM_1}{dr}+M_1-M_2=p(r) \tag{27}$$

Изгибающие моменты M_1, M_2 в предположении $h/\delta<0.1$ равны

$$M_1=b_{11}\varepsilon_1+b_{12}\varepsilon_2,\;\; M_2=b_{12}\varepsilon_1+b_{22}\varepsilon_2 \tag{28}$$

где

$$\varepsilon_1=-\delta æ_1,\;\; \varepsilon_2=-\delta æ_2,\;\; æ_1=\frac{d^2w}{dr^2},\;\; æ_2=\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}$$

$$b_{11}=\frac{2\delta^2}{3}\left[\frac{E_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2}+\sum_{k=1}^{3}E_k\omega_k l_{1k}^4+\frac{3h}{\delta}\frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}\right]$$

$$b_{12}=\frac{2\delta^2}{3}\left[\frac{E_c\nu_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2}+\sum_{k=1}^{3}E_k\omega_k l_{1k}^2 l_{2k}^2+\frac{3h}{\delta}\frac{\bar{E}\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}^2}\right]$$

$$b_{22}=\frac{2\delta^2}{3}\left[\frac{E_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2}+\sum_{k=1}^{3}E_k\omega_k l_{2k}^4+\frac{3h}{\delta}\frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}\right] \tag{29}$$

При поперечном изгибе в силу линейного изменения деформаций по толщине пластины их предельные значения могут быть достигнуты на крайних по толщине фибрах пластины. Для тонких покрытий будем считать, что крайние по высоте значения соответствуют границе раздела $z=\delta$ слоев. В этом случае все рассмотренные выше решения с точностью до обозначений могут быть получены и для изгиба пластины. Так, потребовав, например, выполнения условий равнодеформируемости окружных волокон на контактной границе $z=\delta$, получим $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_{02}$. Тогда прогиб будет определяться выражением

$$w=-\frac{\varepsilon_{02}}{2\delta}r^2+C_1$$

(C_1 — константа интегрирования). В этом случае

$$M_1 = (b_{11} + b_{12})\varepsilon_{02}, \; M_2 = (b_{12} + b_{22})\varepsilon_{02}$$

и уравнение (27 принимает вид

$$r\frac{d(b_{11} + b_{12})}{dr} + b_{11} - b_{22} = \frac{r_1 Q_1}{\varepsilon_{02}} - \frac{1}{\varepsilon_{02}}\int_{r_1}^{r} qrdr$$

где Q_1 — перерезывающая сила при $r = r_1$. Это уравнение содержит три управляющие функции $h(r), \omega_2(r), l_{13}(r)$. Для получения замкнутого решения две из них могут быть заданы по требованиям технологической осуществимости или для их нахождения может быть использовано требование минимума функционала веса (9).

Если потребовать выполнения на контактной поверхности слоев выполнения условия равнодеформируемости радиальных и спиральных волокон, то получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{01}, \; \varepsilon_2 = \varepsilon_{01} + \frac{C_1}{r}, \; l_{13}^2 = \frac{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{03})r}{C_1} + 1$$

$$w = -\frac{\varepsilon_{01} r^2}{2\delta} - \frac{C_1 r}{\delta} + C_2$$

C_1, C_2 — константы, определяемые из условия закрепления на опорах. При этом для изгибающих моментов получим выражения

$$M_1 = (b_{11} + b_{12})\varepsilon_{01} + C_1\frac{b_{12}}{r}, \; M_2 = (b_{12} + b_{22})\varepsilon_{01} + C_1\frac{b_{22}}{r}$$

и тогда из (26) получим условие разрешимости рассматриваемой задачи

$$\frac{d}{dr}\left(b_{11} + b_{12} + \frac{C_1}{\varepsilon_{01}}\frac{b_{12}}{r}\right) + \frac{b_{11} - b_{22}}{r} + \frac{C_1}{\varepsilon_{01}}\frac{b_{12} - b_{22}}{r^2} = \frac{p(r)}{\varepsilon_{01} r}$$

содержащее две управляющие функции $h(r), \omega_2(r)$.

Гибридное проектирование допускает возможность создания несимметричных по толщине конструкций. В этом случае конструкция будет работать в условиях продольно-поперечного изгиба, который требует дополнительного анализа и выходит за рамки данной статьи. Некоторые результаты в этом направлении получены в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю.В. Гибридное проектирование оболочек вращения. /Тр. XXI Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов: Изд-во СГТУ, 2005. С. 255–264.
2. Немировский Ю.В. Мозаичное проектирование слоистых балок и пластин. Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: Изд-во Ин-та механики НАН Армении, 2002. С. 241–249.
3. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Мозаичное армирование плоских термоупругих композитных конструкций с использованием различных

критериев рационального проектирования. // Механика композитных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 3.

4. Nemirovsky Yu. V. Optimum design of three-layered inhomogeneous shell and plates. Proc. 6th Russian-Korean Intern. Sympos. on Science and Technology “KORUS–2002”. Novosibirsk, 2002. Vol. 2. P. 15–19.
5. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластинок с нессиметричными структурами армирования. Краевые задачи и математическое моделирование. // Сб. трудов 8-й Всерос. науч. конф. Новокузнецк: Изд-во НФИ КемГУ, 2006. С. 23–29.

Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН

Поступила в редакцию
20.12.2006