ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 539.3

ПРЕДЕЛЬНОЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЕ СОСТОЯНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Максимова Л.А.

Ключевые слова: пластичность, предельные соотношения
Key words: plasticity, limiting state conditions

Լ. Ա. Մակսիմովա
Առանցքահամաչափ խնդրի սահմանային ստատիկորեն որոշելի վիճակը

Աշխատանքում առանցքահամաչափ խնդրի համար ուսումնասիրվում են սահմանային ստատիկորեն որոշելի առնչությունները: Դիտարկված է այն դեպքը, երբ որպես սահմանային վիճակի առնչություններ հանդիսանում են Միզեսի պլաստիկության և լարումների դևիատորի կոմպոնենտներից մեկի զրո լինելու պայմանները: Առաջարկված են փոփոխականների փոխարինման տարբեր եղանակներ, որոնք հանդիսանում են Մորիս Լևիի փոփոխականների փոխարինման մեթոդի անալոգը: Հետազոտված են տարբեր ստատիկորեն որոշելի խնդիրներ նկարագրող հավասարումները: Ցույց է տրված, որ ստացված հավասարումները հիպերբոլական տիպի են, որոշված են բնութագրիչների հավասարումները, ստացված են նրանց երկայնքով ուղղված առնչությունները: Ստացված արդյունքներից, որպես մասնավոր դեպք ստացվում են լրիվ պլաստիկության պայմանից ստացվող առնչությունները:

L.A. Maksimova
Limiting state of static definable axial symmetrically problems

The limiting state relationships of static definable axial symmetrically problems are investigated in this paper. Investigated the case, when as limiting state conditions are the Mizes's plasticity condition and one which deviator stresses is equal zero. Considered the various variables changes, analogically Moris-Levi's variables changes. Investigated the various equations of statically definable problems. Shown that obtained equations are hyperbolically, defined the characteristic equations and relationships along characteristics. From research results as particular case we can obtain relationships corresponding to full plasticity condition.

В работе исследуются предельные статически определимые соотношения в случае осесимметричной задачи. Рассматривается случай, когда одним из предельных условий является условие пластичности Мизеса и равенство нулю одной из нормальных компонент девиатора напряжений. Предложены различные варианты замены переменных, аналогичных замене переменных Мориса Леви. Исследованы варианты уравнений статически определимых задач. Показано, что система полученных уравнений принадлежит гиперболическому типу, определены уравнения характеристик, получены соотношения вдоль них. Из полученных результатов, как частный случай, следуют уравнения при условии полной пластичности.

1. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат $\rho\theta z$ в случае осесимметричного состояния имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\quad \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0 \tag{1.1}$$

где $\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z$ –нормальные, $\tau_{\rho z}$ –касательные компоненты напряжения.

Статически определимое осесимметричное состояние будет в случае, когда имеют место два независимых соотношения

$$f_1(\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z,\tau_{\rho z})=0,\quad f_2(\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z,\tau_{\rho z})=0 \tag{1.2}$$

Аналогично М.Леви [1], введем замену переменных

$$\sigma_\rho = \sigma + \Sigma\cos 2\theta,\quad \sigma_z = \sigma - \Sigma\cos 2\theta,\quad \tau_{\rho z} = \Sigma\sin 2\theta \tag{1.3}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z),\ \Sigma = \sqrt{\frac{(\sigma_\rho - \sigma_z)^2}{2} + \tau_{\rho z}^2},\ \theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{\rho z}}{\sigma_\rho - \sigma_z} \tag{1.4}$$

Из (1.2) и (1.3) следует

$$\Sigma = \Sigma(\sigma,\theta),\quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(\sigma,\theta) \tag{1.5}$$

Из (1.1), (1.3) и (1.5) следует система уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} + \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} + \frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)\cos 2\theta - 2\Sigma\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \\
+\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\sin 2\theta + 2\Sigma\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \\
\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} + \frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)\sin 2\theta + 2\Sigma\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho} - \\
-\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\cos 2\theta + 2\Sigma\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Система уравнений (1.6), согласно (1.3) – (1.5), является замкнутой относительно двух неизвестных σ,θ.

Рассмотрим замену переменных

$$\sigma_\rho = \sigma + \Sigma\cos 2\varphi,\quad \sigma_\theta = \sigma - \Sigma\cos 2\varphi,\quad \tau_{\rho z} = \Sigma\sin 2\varphi \tag{1.7}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta),\ \Sigma = \sqrt{\frac{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2}{2} + \tau_{\rho z}^2},\ \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{\rho z}}{\sigma_\rho - \sigma_\theta} \tag{1.8}$$

Из (1.2) и (1.7) следует

$$\Sigma = \Sigma(\sigma,\varphi),\quad \sigma_z = \sigma_z(\sigma,\varphi) \tag{1.9}$$

Из (1.1), (1.7) и (1.4) можно получить систему уравнений, аналогичную (1.6).

Рассмотрим замену переменных

$$\sigma_\theta = \sigma + \Sigma\cos 2\psi,\quad \sigma_z = \sigma - \Sigma\cos 2\psi,\quad \tau_{\rho z} = \Sigma\sin 2\psi \tag{1.10}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z),\ \Sigma = \sqrt{\frac{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2}{2} + \tau_{\rho z}^2},\ \psi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{\rho z}}{\sigma_\theta - \sigma_z} \tag{1.11}$$

Из (1.2) и (1.10) следует

$$\Sigma = \Sigma(\sigma,\theta),\quad \sigma_\rho = \sigma_\rho(\sigma,\psi) \tag{1.12}$$

Из (1.1), (1.10) и (1.12) можно получить систему уравнений, аналогичную (1.6).

2. Рассмотрим условие пластичности Мизеса в случае осесимметричной задачи

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6\tau_{\rho z}^2 = 6\kappa^2,\quad \kappa - \mathrm{const} \tag{2.1}$$

Предположим, что имеет место условие

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) \tag{2.2}$$

Согласно (2.2), соотношение (2.1) примет вид

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2 \tag{2.3}$$

Условию пластичности (2.3) удовлетворим при помощи замены переменных (1.3), соотношения (1.5) примут вид

$$\Sigma = \kappa, \ \ \sigma_\theta = \sigma \tag{2.4}$$

Уравнения (1.6), согласно (1.3), (2.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} - 2\kappa\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + 2\kappa\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\kappa\cos 2\theta}{\rho} = 0 \\ &\frac{\partial\sigma}{\partial z} + 2\kappa\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + 2\kappa\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\kappa\sin 2\theta}{\rho} = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Уравнения (2.5) принадлежат гиперболическому типу, уравнения характеристик имеют вид

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\theta \pm \pi/4), \ \left(\frac{dz}{d\rho}\right)_1 \left(\frac{dz}{d\rho}\right)_2 = -1 \tag{2.6}$$

Предположим, что имеет место условие

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta) \tag{2.7}$$

Согласно (2.7), соотношение (2.1) примет вид

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2 \tag{2.8}$$

Условию пластичности (2.8) удовлетворим при помощи замены переменных (1.7), соотношения (1.9) примут вид

$$\Sigma = \kappa, \quad \sigma_z = \sigma \tag{2.9}$$

Из (1.1), (1.7), (2.9) получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} - 2\kappa\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + 2\kappa\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\kappa\cos 2\varphi}{\rho} = 0 \\ &\frac{\partial\sigma}{\partial z} + 2\kappa\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\Sigma\sin 2\varphi}{\rho} = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Уравнения (2.10) принадлежат к гиперболическому типу, уравнения характеристик имеют вид

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{1,2} = \frac{\sin 2\varphi \pm \sqrt{\sin^2 2\varphi + 4\cos^2 2\varphi}}{2\cos 2\varphi}, \ \left(\frac{dz}{d\rho}\right)_1 \left(\frac{dz}{d\rho}\right)_2 = -1 \tag{2.11}$$

Обозначим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \tag{2.12}$$

Согласно (2.12), уравнения характеристик (2.11) примут вид

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\alpha \pm \pi/4) \tag{2.13}$$

Предположим, что имеет место условие

$$\sigma_\rho = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) \tag{2.14}$$

Согласно (2.14), соотношение (2.1) примет вид

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2 \tag{2.15}$$

Условию пластичности (2.15) удовлетворим при помощи замены переменных (1.10), соотношения (1.12) примут вид

$$\Sigma = \kappa,\ \sigma_\rho = \sigma \tag{2.16}$$

Из (1.1), (1.10), (2.16) получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} + 2\kappa\cos 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\kappa\cos 2\psi}{\rho} = 0 \\
\frac{\partial\sigma}{\partial z} + 2\kappa\cos 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - 2\kappa\sin 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\kappa\sin 2\psi}{\rho} = 0
\end{gathered} \tag{2.17}$$

Уравнения (2.17) принадлежат к гиперболическому типу, уравнения характеристик имеют вид

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{1,2} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{\sin^2 2\psi + 4\cos^2 2\psi}}{2\cos 2\psi},\ \left(\frac{dz}{d\rho}\right)_1\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_2 = -1 \tag{2.18}$$

Обозначим

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\psi \tag{2.19}$$

Согласно (2.19), уравнения характеристик (2.18) примут вид

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\beta \pm \pi/4) \tag{2.20}$$

3. Статически определимая система уравнений (1.1), (1.2), согласно (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), примет вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2\rho} = 0 \quad \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \tag{3.1}$$

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2,\ \ \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) \tag{3.2}$$

Аналогично [2,3], положим

$$\tau_{\rho z} = m_1\rho + \frac{m_2}{\rho} \quad m_1, m_2 - \text{const} \tag{3.3}$$

Из (3.1) - (3.3) найдем

$$\begin{gathered}
\sigma_\rho = -2m_1 z \mp \kappa\int\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\,d\rho + C, \quad C - \text{const} \\
\sigma_z = -2m_1 z \mp 2\kappa\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2} \mp \kappa\int\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\,d\rho + C \\
\sigma_\theta = -2m_1 z \mp \kappa\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2} \mp \kappa\int\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\,d\rho + C
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Статически определимая система уравнений (1.1), (1.2), согласно (2.1), (2.7), (2.8), (2.9), примет вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\ \ \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0 \tag{3.5}$$

$$(\sigma_\rho-\sigma_\theta)^2+4\tau_{\rho z}^2=4\kappa^2,\ \ \sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_\rho+\sigma_\theta) \tag{3.6}$$

Величину $\tau_{\rho z}$ определим согласно (3.3). Из (3.5), (3.6) найдем

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho=-2m_1z\mp2\kappa\int\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\,d\rho+C,\quad C-\mathrm{const}\\
&\sigma_\theta=-2m_1z\mp2\kappa\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\mp2\kappa\int\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\,d\rho+C\\
&\sigma_z=-2m_1z\mp\kappa\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\mp2\kappa\int\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\,d\rho+C
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Статически определимая система уравнений (1.1), (1.2), согласно (2.1), (2.14), (2.15), (2.16), примет вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_z-\sigma_\theta}{2\rho}=0,\ \ \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0 \tag{3.8}$$

$$(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+4\tau_{\rho z}^2=4\kappa^2,\ \ \sigma_\rho=\frac{1}{2}(\sigma_\theta+\sigma_z) \tag{3.9}$$

Величину $\tau_{\rho z}$ определим согласно (3.3). Из (3.8), (3.9) найдем

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho=-2m_1z\pm\kappa\int\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\,d\rho+C,\quad C-\mathrm{const}\\
&\sigma_z=-2m_1z\mp\kappa\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\pm\kappa\int\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\,d\rho+C\\
&\sigma_\theta=-2m_1z\pm\kappa\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\pm\kappa\int\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\tau_{\rho z}^2}\,d\rho+C
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Отметим, что во всех трех случаях (3.4), (3.7), (3.10), величины напряжений $\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z$ меняются линейно вдоль оси z пропорционально величине $2m_1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 06-01-00663а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория пластичности. Сборник переводов. М.: ИЛ., 1948.
2. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
3. Максимова Л.А. О статически определимых соотношениях в осесимметричной задаче теории идеальной пластичности // В сб.: посвященном 75-летию Е.И. Шемякина «Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород», М.: Физматлит, 2006.

4. Максимова Л.А. О статически неопределимом состоянии идеальнопластического слоя, сжатого жесткими шероховатыми поверхностями // МТТ. 2005. №2.
5. Максимова Л.А. О соотношениях изотропного идеальнопластического тела // МТТ. 2005. №5.

Московский государственный
горный университет

Поступила в редакцию
19.10.2006