

УДК 539.3

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ
НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД СЖИМАЮЩЕЙ
НАГРУЗКОЙ

Егиазарян Т. А., Макарян В. С.

Ключевые слова: трещина, интегральное преобразование, интегральное уравнение, бесконечная система

Keywords: crack, integral transformation, integral equation, infinite system.

Տ.Հ.Եղիազարյան, Վ.Ս.Մակարյան

Մեղմնող բեռի տակ գտնվող ճաքի առկայությամբ առաձգական կիսահարթության համար եզրային խնդիր

Դիտարկվում է վերջավոր ճաքով թուլացված առաձգական կիսահարթության համար եզրային խնդիրը, երբ կիսահարթության եզրին ազդում են երկու համաչափ կենտրոնացված սեղմող ուժեր: Ենթադրվում է, որ սեղմող ուժերի ազդեցության տակ ճաքի ափերը հպվում են միմյանց ուղղահայաց ուղղությամբ, իսկ հորիզոնական ուղղությամբ կարող են սահել մեկը մյուսի վրայով:

T.H.Yeghiazaryan, V.S.Makaryan

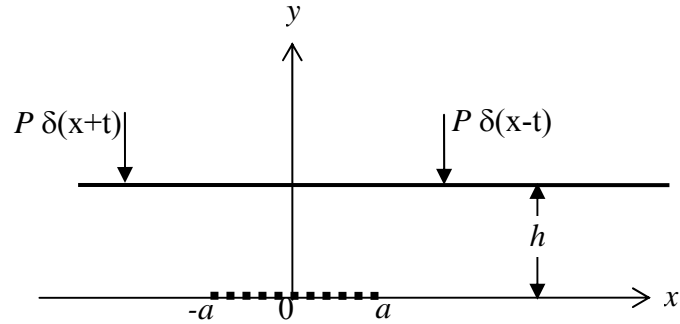
Boundary Problem for Elastic Half Plane at Presence of a Crack Being Under Compressible loading

The problem for elastic half plane weakened by the terminal crack is considered. The crack is located on a line parallel to border of half plane on which two compressing forces are operating. It is supposed, that in the result of plate deformation under the action of compressing forces the crack faces are contacted with each other and the slippage of points of the crack various faces one above the other are taking place.

Рассматривается задача для упругой полуплоскости, расслабленной конечной трещиной. Трещина расположена на линии, параллельной границе полуплоскости, на которой действуют две симметричные сжимающие силы. Допускается, что в результате плоской деформации под действием сжимающих сил берега трещины входят в контакт между собой и происходит проскальзывание точек различных берегов трещины друг над другом.

Рассматривается задача для упругой полуплоскости, расслабленной конечной трещиной. Трещина расположена на линии, параллельной границе полуплоскости, а на границе полуплоскости действуют две симметричные сжимающие силы. Как и в работе [1], допускается, что в результате плоской деформации под действием сжимающих сил берега трещины входят в контакт между собой и происходит проскальзывание точек различных берегов трещины друг над другом. В указанной работе [1] рассмотрен случай контакта двух упругих полуплоскостей из различных материалов, когда полубесконечная трещина расположена на поверхности раздела материалов. Было установлено, что при отсутствии касательных напряжений на берегах трещины, нормальные и касательные напряжения у граничной точки трещины имеют корневую особенность. Это обстоятельство позволяет придти к выводу, что трещина,

находясь на линии раздела материалов под воздействием сжимающих сил, то есть в условиях, когда берега трещины полностью прижаты друг к другу и одновременно происходит проскальзывание точек одного берега трещины над



точками другого, может являться источником разрушения упругой среды. Очевидно, что главную роль в возможном разрушении в описанном случае деформации будут играть касательные напряжения, действующие на поверхности раздела материалов, то есть, на поверхности расположения трещины. В настоящей работе, в рамках вышеизложенной постановки, проводится изучение напряженно-деформированного состояния однородной упругой среды, содержащей в себе трещину, когда последняя оказалась под воздействием сжимающих сил (фиг.1).

Фиг.1

Граничные условия задачи запишем в следующем виде:

$$\sigma_y^{(1)}(x, h) = P[\delta(x-t) + \delta(x+t)], \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, h) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

$$u_y^{(1)}(x, 0) - u_y^{(2)}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\begin{cases} \frac{\partial(u_x^{(1)}(x, 0) - u_x^{(2)}(x, 0))}{\partial x} = 0, & |x| > a \\ \tau_{xy}^{(i)}(x, 0) = \rho(x), & |x| < a \end{cases}$$

где индексы «1» отнесены к области $0 < y < h$, $-\infty < x < \infty$, а индексы «2» – к области $(-a < y < 0, -\infty < x < \infty)$. Функция $\rho(x)$, фигурирующая в парном условии (3), – известная функция, которая, в частности, может быть равной и нулю. $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Решение задачи будем строить при помощи бигармонической функции Эйри, которую представим в виде следующих двух интегралов Фурье [2 – 4]:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) = \int_0^{\infty} [A_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y + B_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + \\ + C_1(\lambda) \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + D_1(\lambda) \lambda y \operatorname{ch} \lambda y] \cos \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Phi_2(x, y) = \int_0^{\infty} [A_2(\lambda) + \lambda y B_1(\lambda)] e^{\lambda y} \cos \lambda x d\lambda \quad (5)$$

Пользуясь соотношениями Эйри [2-4], выражающими компоненты напряжений и перемещений через бигармонические функции (4) и (5), будем иметь следующие представления:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, y) = & -\int_0^{\infty} \lambda^2 \{ [B_1(\lambda) + y\lambda D_1(\lambda)] \operatorname{ch}\lambda y + \\ & + [A_1(\lambda) + y\lambda C_1(\lambda)] \operatorname{sh}\lambda y \} \cos \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, y) = -\int_0^{\infty} e^{\lambda y} \lambda^2 [A_2(\lambda) + y\lambda B_2(\lambda)] \cos \lambda x d\lambda \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(1)} = & \int_0^{\infty} \lambda^2 \{ [A_1(\lambda) + y\lambda C_1(\lambda) + D_1(\lambda)] \operatorname{ch}\lambda y + \\ & + [B_1(\lambda) + C_1(\lambda) + y\lambda D_1(\lambda)] \operatorname{sh}\lambda y \} \sin \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{\lambda y} [A_2(\lambda) + y\lambda B_2(\lambda) + B_2(\lambda)] \sin \lambda x d\lambda \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y^{(1)}(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{E} \int_0^{\infty} \lambda^2 \{ [(1+\nu)A_1(\lambda) + \lambda y C_1(\lambda) + (\nu-1)D_1(\lambda)] \operatorname{ch}\lambda y + \\ & + [(1+\nu)B_1(\lambda) + (\nu-1)C_1(\lambda) + \lambda y(\nu+1)D_1(\lambda)] \operatorname{sh}\lambda y \} \sin \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_y^{(2)}(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} e^{\lambda y} \lambda^2 \{ (1+\nu)A_2(\lambda) + [\nu-1 + \lambda y(\nu+1)]B_2(\lambda) \} \sin \lambda x d\lambda \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x^{(1)}(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{E} \int_0^{\infty} \lambda^2 \{ [(1+\nu)B_1(\lambda) + 2C_1(\lambda) + \lambda y(\nu+1)D_1(\lambda)] \operatorname{ch}\lambda y + \\ & + [(1+\nu)A_1(\lambda) + 2D_1(\lambda) + \lambda y C_1(\lambda)] \operatorname{sh}\lambda y \} \cos \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_x^{(2)}(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} e^{\lambda y} \lambda^2 \{ (1+\nu)A_2(\lambda) + [2 + \lambda y(\nu+1)]B_2(\lambda) \} \cos \lambda x d\lambda \quad (13)$$

Доопределив первое условие в (3)

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\partial(u_x^{(1)}(x, 0) - u_x^{(2)}(x, 0))}{\partial x}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (14)$$

удовлетворяя граничным условиям (1, 2) и условию (14), на основе интегрального преобразования Фурье получим следующие выражения для неизвестных функций интегрирования:

$$A_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h} [-2P(1 + \lambda h) \cos \lambda t + E \lambda^2 h^2 e^{-\lambda h} U(\lambda)]}{\pi \lambda^2} \quad (15)$$

$$B_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[-2P(1+\lambda h)\cos\lambda t + E\lambda^2 h^2 e^{-\lambda h}U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (16)$$

$$C_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[2P\cos\lambda t + E((1-\lambda h)\operatorname{ch}\lambda h + \lambda h\operatorname{sh}\lambda h)U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (17)$$

$$D_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[2P\cos\lambda t - E(e^{\lambda h}\lambda h + \operatorname{sh}\lambda h)U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (18)$$

$$A_2(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[-2P(1+\lambda h)\cos\lambda t + E\lambda^2 h^2 e^{-\lambda h}U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (19)$$

$$B_2(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[2P\cos\lambda t - E(e^{-\lambda h}\lambda h + \operatorname{sh}\lambda h)U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (20)$$

(15 – 20) функция $U(\lambda)$ есть косинус-трансформанта Фурье функции (14):

$$U(\lambda) \equiv \int_0^a u(x)\cos\lambda x dx \quad (21)$$

Удовлетворение второму условию в (3) приводит к следующему интегральному уравнению относительно трансформанты (21):

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}(x,0)}{E} &\equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty U_0(\lambda)\sin\lambda x d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-2\lambda h} [1 + 2h\lambda(h\lambda - 1)]U_0(\lambda)\sin\lambda x d\lambda = \\ &= \frac{2P_0}{\pi} \left(\frac{(x-t)h^2}{(h^2 + (x-t)^2)^2} + \frac{(x+t)h^2}{(h^2 + (x-t)^2)^2} \right) + \rho_1(x), \quad -1 < x < 1 \\ P_0 &= \frac{P}{E}, \quad U_0(\lambda) = \frac{U(\lambda)}{a}, \quad \rho_1(x) = \frac{\rho(x)}{E} \end{aligned} \quad (22)$$

Метод сведения интегрального уравнения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений основан на следующем известном разрывном интеграле Вебера–Шафхейтлина [5]:

$$\int_0^\infty J_{2n}(\lambda t)J_{2m}(\lambda t)\frac{d\lambda}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases} \quad (23)$$

Имея в виду (23), решение уравнения (22) представим в виде следующего ряда бесселевых функций:

$$U_0(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty X_m J_{2m}(\lambda) \quad (24)$$

Подставляя представление (24) в уравнение (22) и пользуясь известными значениями разрывного интеграла [5, 6]:

$$\int_0^{\infty} J_{2m}(\lambda) \sin \lambda x d\lambda = \begin{cases} -(-1)^m U_{2m-1}(x) & |x| < 1 \\ \frac{(-1)^m \operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2-1} (|x| + \sqrt{x^2-1})^{2m}} & |x| > 1 \end{cases} \quad (25)$$

а также свойством ортогональности многочленов Чебышева [6], для определения коэффициентов разложения (24) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_n + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} X_m = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

$$A_{mn} = 4n \int_0^{\infty} e^{-2h\lambda} [1 + 2h\lambda(\lambda h - 1)] \frac{J_{2n}(\lambda) J_{2m}(\lambda)}{\lambda} d\lambda \quad (27)$$

$$a_n = \frac{8P(-1)^n}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-1}(x) \left(\frac{(x-t)h^2}{[h^2 + (x-t)^2]^2} + \frac{(x+t)h^2}{[h^2 + (x+t)^2]^2} \right) dx + \\ + 4(-1)^n \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-1}(x) \rho_1(x) dx \quad (28)$$

Покажем, что коэффициент X_0 в разложении (24) равен нулю. Действительно:

$$X_0 = U_0(0) = \int_0^1 u(x) dx = u_x^{(1)}(1, 0) - u_x^{(2)}(1, 0) - [u_x^{(1)}(0, 0) - u_x^{(2)}(0, 0)] = 0 \quad (29)$$

Если известны коэффициенты разложения (24), то напряжения, действующие на линии трещины $y = 0$, будут определяться следующими формулами:

$$\frac{\tau_{xy}(x, 0)}{E} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{2\pi\sqrt{x^2-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m X_m}{(|x| + \sqrt{x^2-1})^{2m}} - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} X_m \int_0^{\infty} (-e^{-2\lambda h} - 2h\lambda(h\lambda - 1)e^{-2\lambda h}) J_{2m}(\lambda) \sin \lambda x d\lambda - \\ - \frac{2P}{\pi} \left(\frac{(x-t)h^2}{[h^2 + (x-t)^2]^2} + \frac{(x+t)h^2}{[h^2 + (x-t)^2]^2} \right), \quad |x| > 1 \quad (30)$$

$$\frac{\sigma_y^{(1)}(x, 0)}{E} = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} X_m h^2 \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-2\lambda h} J_{2m}(\lambda) \cos \lambda x d\lambda + \frac{2P}{\pi} \left(\frac{h}{h^2 + (x-t)^2} + \right. \\ \left. + \frac{h}{h^2 + (x+t)^2} - \frac{(x-t)^2 h}{[h^2 + (x-t)^2]^2} - \frac{(x+t)^2 h}{[h^2 + (x-t)^2]^2} \right), \quad |x| > 1 \quad (31)$$

При получении формулы (30) было учтено представление (25). Коэффициент интенсивности касательных напряжений дается следующим равенством:

$$KI = \mp \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m X_m \quad (32)$$

где знак « $-$ » относится к точке $x = 1$, а знак « $+$ » – к точке $x = -1$. Несобственные интегралы, входящие как в бесконечную систему (26), так и в формулы (30, 31), можно представить в виде бесконечных рядов [5, 6]. Легко установить также, что бесконечная система (26) квазивполне регулярна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} |A_{mn}| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (33)$$

представляет собой произведение бесконечно дифференцируемой функции

$$\varphi(\lambda h) = e^{-2h\lambda} [1 + 2h\lambda(\lambda h - 1)] \quad (34)$$

на функцию

$$\psi(\lambda) = \frac{J_{2n}(\lambda) J_{2m}(\lambda)}{\lambda} \quad (35)$$

для которого известно разложение [5, 6]

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2^{2n} 2^{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{-1+2m+2n+2k} \Gamma(2m+2n+2k+1)}{2^{2k} k! \Gamma(2m+2n+k+1) \Gamma(2n+k+1) \Gamma(2m+k+1)} \quad (36)$$

Следовательно, функция $\psi(\lambda)$ зависит от $\lambda^{-1+2m+2n+2k}$ и интегрированием по частям можно убедиться в выполнении условий (33).

Прежде, чем перейти к анализу численных примеров, заметим, что при предельном переходе $h \rightarrow 0$, из формул (30) и (31) следуют равенства:

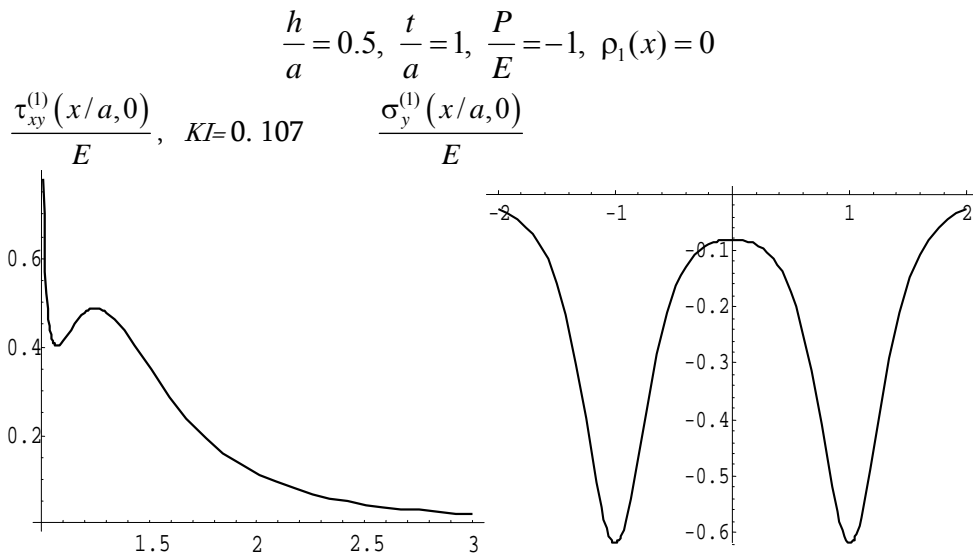
$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = P[\delta(x-t) + \delta(x+t)] \quad -\infty < x < \infty \quad (37)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{xy}(x, 0) = \begin{cases} \rho(x), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (38)$$

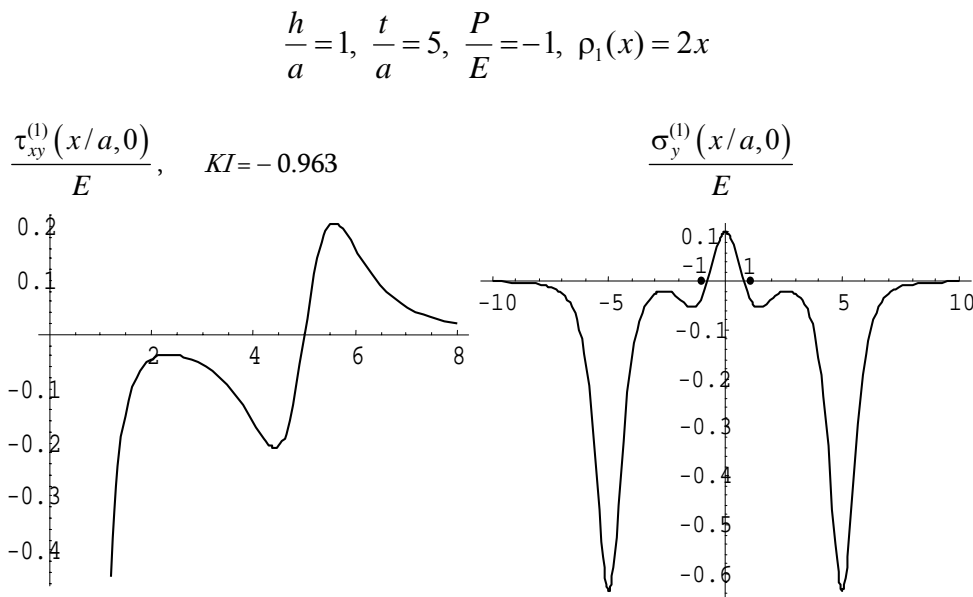
Для получения равенств (37) и (38) использованы следующие известные соотношения [7]:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h^2 + y^2} = \pi \delta[y], \quad y \delta'[y] = -\delta[y] \quad (39)$$

Графики, приведенные на (фиг.2), показывают, что нормальные напряжения, действующие на линии расположения трещины, всюду ограничены и имеют постоянный отрицательный знак. То есть берега трещины при данных значениях параметров не стремятся отойти друг от друга. Касательные же напряжения сохраняют свою корневую особенность с приближением к границе трещины, так как коэффициент при особенности отличен от нуля. Аналогичная картина наблюдается как при дальнейшем уменьшении расстояния между точками приложения внешних сжимающих сил, так и при увеличении указанного расстояния. Она не терпит качественных изменений и в случаях изменения расстояния линии расположения трещины от границы полуплоскости. Расчетные варианты для этих случаев здесь не приводятся. Анализ численных примеров показывает, что в случае, когда трещина расположена внутри полуплоскости, при любых значениях геометрических параметров эффект отхода берегов трещины друг от друга не наблюдается.



Фиг.2



Фиг.3.

На графиках, изображенных на (фиг.3), показаны законы распределения касательных и нормальных напряжений, действующих на линии расположения трещины для тех случаев, когда учтены наличия касательных усилий на поверхности трещины в виде линейной функции. Как видно из этих графиков, учет касательных усилий приводит к качественному изменению ситуации на поверхности трещины. Нормальные напряжения, действующие на поверхности трещины, меняют свои знаки с отрицательного на положительный. Это означает,

что берега трещины в этих случаях стремятся отойти друг от друга и для этих параметров постановка задачи становится некорректной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макарян В. С. Поведение трещины под сжимающей нагрузкой. //Докл. НАН РА. 2006. Т.106. №2. С. 144-150.
2. Новожилов В.В.. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 369с.
3. Новацкий. В.К. Теория упругости.М.: Мир. 1975, 872 с.
4. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Изд.иностр.лит. 1955. 667с.
5. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. М.: Изд.иностр.лит. 1949. 798с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 663с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спец.курс. М.: Наука, 1965. 327с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.12.2006