ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 539. 3: 537.2

ЩЕЛЕВЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Берберян А.Х.

Ключевые слова: сдвиговые электроупругие щелевые волны, слоистая система – пьезоэлектрик-вакуум-диэлектрик.
Key words: Shear electroelastic gap waves, piezoelectric-vacuum-dielectric layered system.

Զ.Ն. Դանոյան, Լ.Ա. Աթոյան, Ա.Խ. Բերբերյան
Ճեղքային ալիքները պյեզոէլեկտրիկ շերտավոր միջավայրերում

Աշխատանքում գտնված են սահքի էլեկտրաառաձգական ճեղքային ալիքների գոյության պայմանները պյեզոէլեկտրիկ-վակուում-դիէլեկտրիկ շերտավոր համակարգում: Ցույց է տրված, որ այդպիսի չհպվող համակարգում կարող են տարածվել սահքի էլեկտրաառաձգական ճեղքային ալիքներ: Դիտարկված է այն սահմանային դեպքը, երբ վակուումային շերտի հաստությունը ձգտում է զերոյի: Հիմնավորված է խնդրի դրվածքն այն դեպքում, երբ պյեզոէլեկտրիկ միջավայրը եզերվում է դիէլեկտրիկ միջավայրի հետ առանց հպումի:

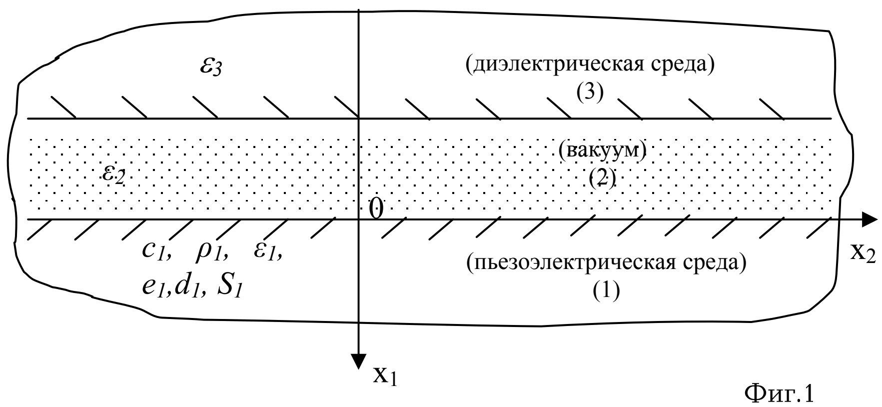
Z.N. Danoyan, L.A. Atoyan, A.Kh. Berberyan
Gap Waves in Piezoelectric layered Medium

In the present paper the conditions of existence of shear electroelastic gap waves in piezoelectric-vacuum-dielectric layered system are found. It is shown that in the discontact layered system the gap electroelastic waves can be propagated. It is considered the limiting case when the thickness of vacuuming layer tends to zero. It is proved that the statement of the problem is true when there is no acoustic contact between piezoelectric and dielectric grounded media.

В работе найдены условия существования сдвиговых электроупругих щелевых волн в слоистой системе пьезоэлектрик-вакуум-диэлектрик. Показанно, что в такой бесконтактной системе могут распространяться щелевые электроупругие волны. Рассмотрен предельный случай, когда толщина вакуумного слоя стремится к нулю. Обоснована постановка задачи, когда пьезоэлектрическая среда граничит без акустического контакта с диэлектрической средой.

1. Введение. Известно, что [1-3] в полубесконечной изотропной упругой среде со свободной границей сдвиговые поверхностные упругие волны горизонтальной поляризации не распространяются. Однако, если среда является пьезоэлектриком класса $6mm$, $4mm$, то в такой среде со свободной границей распространяются сдвиговые поверхностные электроупругие волны горизонтальной поляризации – поверхностные волны Гуляева-Блюстейна [3-5]. В работе [3] задача Гуляева-Блюстейна рассматривается в несколько иной постановке: предполагается, что пьезоэлектрическая среда граничит без акустического контакта с диэлектриком, имеющим определенную диэлектрическую проницаемость и не обладающей пьезоэффектом. Наличие дополнительной среды позволяет регулировать волновые процессы в пьезоэлектрической среде. В работах [7,8] аналогичная постановка задачи используется при исследовании электроупругих волн Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. Возникает вопрос о справедливости такой постановки задачи. В данной работе задача решается в более общей постановке, предполагая наличие вакуумной щели конечной толщины между рассматриваемыми средами. Решая эту задачу, а затем находя предельное решение, когда толщина вакуумной щели стремится к нулю, обнаруживаем, что предельное решение совпадает с решением первой упрощенной постановки задачи. Этим доказывается справедливость упрощенной постановки. В работе [9] показано, что наличие зазора между упругим пьезоэлектрическим полупространством и экраном приводит к ослаблению локализации поверхностной волны.

2. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия. Пусть между двумя полубесконечными диэлектрическими средами, одна из которых является пьезоэлектриком с гексагональными или тетрагональными классами симметрии $6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422$, образована вакуумная щель толщиной h. Рассматриваемая система относится к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Ось Ox_3 совпадает с главной осью симметрии пьезоэлектрической среды и



Фиг.1

лежит в граничной плоскости $x_1 = 0$ этой среды, ось Ox_1 направлена вглубь пьезоэлектрической среды. Величины, отнесенные к области $x_1 > 0$, будем отмечать индексом “1”, отнесенные к области $x_1 < -h$ – индексом “3”, и отнесенные к области $-h < x_1 < 0$ – индексом “2”. Допустим, что поверхности сред свободны от нагрузки, а внешнее электромагнитное поле отсутствует (фиг. 1.).

Далее примем, что возмущения в системе задаются в виде:

$$\vec{u}^{(1)} = \{0, 0, u_1(x_1, x_2, t)\}, \quad \varphi_1 = \varphi_1(x_1, x_2, t)$$
$$\varphi_2 = \varphi_2(x_1, x_2, t), \ \varphi_3 = \varphi_3(x_1, x_2, t) \tag{1}$$

где u_1 – упругое смещение, $\varphi_{1,2,3}$ – электрические потенциалы в средах и в вакууме соответственно.

В условиях антиплоской деформации (1), согласно теориям электроупругости и электродинамики [3-5], для вышеуказанных сред будем иметь следующие соотношения:

1. Уравнения:

1) в области $x_1 > 0$ (в пьезоэлектрической среде):

$$\Delta u_1 = \frac{1}{S_1^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \Delta\varphi_1' = 0 \tag{2}$$

2) в области $-h < x_1 < 0$ (в вакуумном слое):

$$\Delta\varphi_2 = 0 \tag{3}$$

3) в области $x_1 < -h$ (в диэлектрической среде):

$$\Delta\varphi_3 = 0 \tag{4}$$

2. Граничные условия:

1) на границе $x_1 = 0$:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 u_1 + \varphi_1' = \varphi_2, \; -\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1'}{\partial x_1} + d_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \\ \bar{c}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - e_1\dfrac{\partial\varphi_1'}{\partial x_1} - d_1\bar{e}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - d_1\dfrac{\partial\varphi_1'}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

2) на границе $x_1 = -h$

$$\varphi_2 = \varphi_3, \quad -\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -\varepsilon_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} \tag{6}$$

Для получения поверхностных волн решения должны удовлетворять условиям затухания на бесконечности:

$$\begin{cases} u_1 \to 0, \; \varphi_1' \to 0 & \text{при} \quad x_1 \to +\infty \\ \varphi_3 \to 0 & \text{при} \quad x_1 \to -\infty \end{cases} \tag{7}$$

Выше приняты следующие обозначения:

$$\begin{gathered} S_1 = \sqrt{\bar{c}_1/\rho_1}, \quad \bar{c}_1 = c_1(1+\chi_1^2) \\ \chi_1^2 = e_1^2/\varepsilon_1 c_1, \quad c_1 = c_{44}^{(1)}, \quad d_1 = e_{14}^{(1)}, e_1 = e_{15}^{(1)} \\ \bar{e}_1 = e_1/\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0, \; \varepsilon_3 = \varepsilon_{11}^{(3)} \\ \varphi_1' = \varphi_1 - \bar{e}_1 u_1, \quad \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 \end{gathered} \tag{8}$$

S_1 – скорость сдвиговых объемных волн в пьезоэлектрической среде, χ_1 – коэффициент электромеханической связи для объемной волны, c_1 и c_2 – упругие постоянные, e_1 и d_1 – пьезомодули, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – диэлектрические проницаемости, ρ_1 и ρ_2 – массовые плотности, φ_1' – новая неизвестная, выражающаяся через φ_1 и u_1.

3. Решение задачи. Решения задачи (2) – (7) будем искать в виде сдвиговых плоских гармонических электроупругих волн с частотой $\omega > 0$:

$$u_1 = U_{01}\, e^{i(px_2 + qx_1 - \omega t)}, \quad \varphi = \Phi_0\, e^{i(px_2 + qx_1 - \omega t)} \tag{9}$$

распространяющихся в плоскости Ox_1x_2. Здесь $q > 0$ и p – продольное и поперечное волновые числа соответственно; фазовая скорость волны определяется выражением:

$$V = \omega / p \tag{10}$$

Подставляя (9) в уравнения (2)-(4) и удовлетворяя условиям затухания (7), получаем решение вида:

В области $x_1 > 0$:

$$\begin{cases} u_1 = U_{01} \exp(-p\beta_1(V)x_1 \exp i(px_2 - \omega t) \\ \varphi_1 = \left[U_{01}\overline{e}_1 \exp(-p\beta_1(V)x_1) + \Phi_{01} \exp(-px_1)\right] \exp i(px_2 - \omega t) \end{cases} \tag{11}$$

В области $-h < x_1 < 0$:

$$\varphi_2 = [\Phi_{02}^{+} \exp(px_1) + \Phi_{02}^{-} \exp(-px_1)] \exp i(px_2 - \omega t) \tag{12}$$

В области $-\infty < x_1 < -h$:

$$. \quad \varphi_3 = \Phi_{03} \exp(px_1) \exp i(px_2 - \omega t) \tag{13}$$

Здесь $U_{01}, \Phi_{01}, \Phi_{02}^{+}, \Phi_{02}^{-}, \Phi_{03}$ – произвольные постоянные, являющиеся амплитудами волны, $\beta_1(V)$ – коэффициент затухания, причем

$$\beta_1(V) = \sqrt{1 - (V^2 / S_1^2)} \tag{14}$$

Из условия затухания (7) при $x_1 \to +\infty$ следует, что $\beta_1(V)$ – положительная величина. Отсюда получается необходимое условие существования поверхностной волны:

$$0 < V_S < S_1 \tag{15}$$

и следует, что парциальная волна в первой среде всегда должна быть неоднородной.

Таким образом, решения (11)-(13) типа (9) уравнений (2)-(4), удовлетворяющих условию (15), состоят из одной неоднородной электроупругой волны в пьезоэлектрике, четырех неоднородных электростатических волн: одной в диэлектрике, двух в вакууме, одной в пьезоэлектрике. Совокупность указанных волн, которые удовлетворяют граничным условиям (5)-(6), образует сложную пятипарциальную поверхностную волну, которую мы и называем электроупругой щелевой волной.

Подставляя решение (12)-(13) в граничные условия (5)-(6), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно искомых амплитуд:

$$
\begin{aligned}
&\bar{e}_1 U_{01} + \Phi'_{01} = \Phi^+_{02} + \Phi^-_{02} \\
&(\bar{c}_1 \beta_1 + i\bar{e}_1 d_1) U_{01} + (e_1 + i d_1)\Phi'_{01} = 0 \\
&\varepsilon_1 \Phi'_{01} + i d_1 U_{01} = -\varepsilon_2 (\Phi^+_{02} - \Phi^-_{02}) \\
&\Phi^+_{02} e^{-k} + \Phi^-_{02} e^{k} = \Phi_{03} e^{-k} \\
&\varepsilon_2 (\Phi^+_{02} e^{-k} - \Phi^-_{02} e^{k}) = \varepsilon_3 \Phi_{03} e^{-k}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

В (16) обозначено:

$$
k = ph = 2\pi h / \lambda \tag{17}
$$

где k – относительная толщина слоя, λ – длина волны, p – волновое число волны.

Условие существования нетривиального решения системы (16) дает характеристическое уравнение поверхностной волны:

$$
\beta_1(V) = R(k) \tag{18}
$$

где приняты следующие обозначения:

$$
R(k) = \frac{R_1^2 \bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 \,\mathrm{th} k + 1) - K_1^2 \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + \mathrm{th} k)}{\bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 \,\mathrm{th} k + 1) + \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + \mathrm{th} k)} \tag{19}
$$

$$
\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 / \varepsilon_3, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_3 \tag{20}
$$

$$
R_1^2 = e_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1, \quad K_1^2 = d_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1. \tag{21}
$$

Здесь R_1^2 и K_1^2 – коэффициенты электромеханической связи объемных волн, $R(k)$ – коэффициент электромеханической связи поверхностной волны (КЭМС).

Характеристическое уравнение (16) неявно определяет зависимость фазовой скорости электроупругой щелевой волны от относительной толщины слоя k и физико-механических параметров слоистой системы.

Таким образом, мы приходим к заключению: для того чтобы выражения (11)-(13) представляли собой щелевую волну, необходимо, чтобы характеристическое уравнение поверхностной волны (18) при фиксированном значении параметров задачи имело решение $V = V_S(k)$, которое удовлетворяет условию затухания (15).

4. Исследование коэффициента электромеханической связи.

Из соотношений (18)-(21) следует, что при отсутствии пьезоэффекта ($e_1 = d_1 = 0$) КЭМС $R(k)$ обращается в нуль, а характеристическое уравнение (18) совпадает с характеристическим уравнением обычной сдвиговой волны [1].

Следует подчеркнуть, что вклад пьезоэффекта в характеристическом уравнении (18) проявляется двумя факторами: наличием коэффициента $R(k)$ и зависимостью скорости объемной волны $S_1 = (c_1 / \rho_1)\sqrt{1 + \chi_1^2}$ от пьезоэффекта. Отметим также, что характеристическое уравнение (18) получено для классов 6 и 4. Для классов $6mm$ и $4mm$ следует в этих уравнениях и в других соответствующих выражениях положить $d_1 = 0$, а для классов $622, 422$ $e_1 = 0$.

Далее примем следующее ограничение:

$$|R(k)| << 0 \tag{22}$$

что имеет место для большинства известных пьезоэлектриков [3].

Для исследования характеристического уравнения (18), небходимо сначала исследовать поведение КЭМС $R(k)$ в зависимости от физико-механических характеристик слоистой системы и от относительной толщины вакуумного слоя k.

Поведение функции $R(k)$ исследовано в работе [3].

Например, если имеет место условие $R(k) < 0$, то щелевые волны не могут существовать.

5. Случай сред из классов $6mm, 4mm$. Далее рассмотрим частный случай, когда пьезоэлектрик принадлежит классам симметрии $6mm, 4mm$. В этом случае $e_{14} = d_1 = 0$; $e_{15} = e_1 \neq 0$.

Тогда КЭМС $R(k)$ принимает вид:

$$R(k) = \frac{R_1^2 \bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 \operatorname{th} k + 1)}{\bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 \operatorname{th} k + 1) + \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + \operatorname{th} k)} \tag{23}$$

В (23) перейдем к пределу при $h \to 0$, или $k \to 0$. В этом случае $\operatorname{th} k \to 0$ и КЭМС $R(k)$ принимает вид:

$$R(0) = \frac{R_1^2 \bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2}. \tag{24}$$

После некоторых преобразований (24) можно представить в виде:

$$R(0) = \frac{\dfrac{\chi_1^2}{1+\chi_1^2}}{1+\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}}, \qquad \chi_1^2 = \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_1 c_{44}} \tag{25}$$

что совпадает с результатом работы [1].

Отсюда можно также получить выражение фазовой скорости щелевой поверхностной волны [1]:

$$V_S = S_1 \sqrt{1 - \frac{æ_1^4}{(1+\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3})^2}}, \qquad æ_1^2 = \frac{\chi_1^2}{1+\chi_1^2} \tag{26}$$

Таким образом, мы решили задачу о щелевых волнах в слоистой системе пьезоэлектрик-вакуум-диэлектрик. Получили дисперсионное уравнение поверхностной волны и условия ее существования. В частности, показали справедливость постановки задачи, когда пьезоэлектрическая среда граничит без акустического контакта с диэлектрической средой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олинер А. Поверхностные акустические волны. М.:Наука, 1981. 281с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.:Мир, 1975. 872с.
3. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
4. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492 с.
5. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.:Наука, 1982. 424с.
6. Иона Ф., Ширане Д. Сегнетоэлектрические кристаллы. М.: Мир, 1965.
7. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и мягким диэлектрическим слоем. (Исследование характеристического уравнения.Часть I).//Изв. НАН Армении.Механика. 2006. Т.59. № 2. С. 43-56.
8. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и мягким диэлектрическим слоем. (Исследование характеристического уравнения.Часть II).//Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №.3. С. 34-44.
9. Аветисян А.С., Карапетян М.Э. Экранирование волны Гуляева-Блюстейна. // В кн.: «Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем» (Сборник научных трудов по материалам республиканской конференции), Ереван, 2002. С. 97-101.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
12.01.2007