ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Геворкян С.Х., Арустамян А.М.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, колебания оболочки, ортотропная оболочка, пологая оболочка, области неустойчивости.
Key words: dynamic stability, vibration of shell, orthotropic shell, declivous shell.

Ս.Խ. Գևորգյան, Ա.Մ. Առուստամյան
Օրթոտրոպ սակավաթեք թաղանթի դինամիկ կայունության խնդրի վերաբերյալ

Առաջարկվող աշխատանքում դիտարկվում է օրթոտրոպ շերտերից բաղկացած սակավաթեք թաղանթի դինամիկ կայունության խնդիրը, որի մոտավոր լուծման համար կիրառվել է Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդը: Խնդիրը բերվում է Մատյե-Հիլլի հավասարմանը: Բերված են միաշերտ սակավաթեք թաղանթի հաշվարկների արդյունքները հոդակապային ամրակցման դեպքում:

S.Kh. Gevorkyan, A.M. Arustamyan
To the Problem of Dynamic Stability of Orthotropic Declivous Shell

In proposed work a problem of declivous shells dynamic stability, formed from orthotropic layers is considered. Bubnov-Galerkin`s method is applied for the solution of this problem. The problem is reduced to Mathieu-Hill’s equation. The results of calculations of jointly supported monolayer declivous shell are brought.

В предлагаемой работе рассматривается задача динамической устойчивости пологой оболочки, составленной из ортотропных слоев, для приближенного решения которой применен метод Бубнова-Галеркина. Задача сводится к уравнению Матье-Хилла. Приведены результаты вычислений для однослойной пологой оболочки при шарнирном опирании.

Теории слоистой анизотропной пластинки и оболочек посвящено множество работ. Основные результаты обобщены в монографиях, обзорных статьях и фундаментальных работах Амбарцумяна С.А., Алфутова Н.А., Багдасаряна Г.Е., Болотина В.В., Васильева В.В., Гнуни В.Ц., Образцова И.Ф. и др. [1-7].

Рассматривается задача динамической устойчивости пологой цилиндрической оболочки с радиусом R, толщиной h, размерами в плане a и b, составленными из $(2n+1)$ симметрично расположенных относительно срединной поверхности слоев, изготовленных путем поочередной укладки элементарных слоев композиционного материала под углами $\pm\varphi_S$ $(s=1,2,...,2n+1)$ к оси цилиндра. Такая оболочка считается слоистой, составленной из нечетного числа однородных ортотропных слоев (фиг.1)

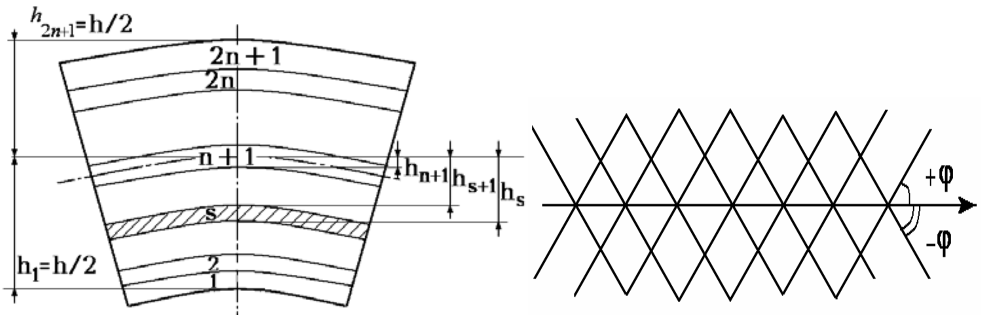
Обозначим соответствующие упругие константы через E_1, E_2, ν_{12}, ν_{21}, G_{12}. Упругие характеристики элементарного слоя определяются по формулам [2]:

$$B_{11}^0=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ B_{22}^0=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ B_{12}^0=\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ B_{11}^0=\frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ B_{66}^0=G_{12}$$

Уравнения устойчивости пологой слоистой ортотропной цилиндрической оболочки, сжимаемой силой $P_1(t)=P_{10}+P_{1t}\cdot\cos\theta t$, записываются в виде:

$$D_{11}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\cdot(D_{12}+2D_{66})\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+P_1(t)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho h\cdot\frac{\partial^{24} w}{\partial t^2}=0$$

$$a_{11}\cdot\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+(a_{66}-2a_{12})\cdot\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+a_{11}\cdot\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}=0 \qquad (1)$$



Фиг.1 Расположение ортотропных слоев оболочки.

где ρ – плотность композиционного материала (КМ), $w(x,y,t)$ – функция прогиба, $\Phi(x,y,t)$ – функция усилий, B_{ij} – упругие характеристики, выражаемые через упругие характеристики элементарного слоя B_{ij}^0 по формулам [2]:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= B_{11}^0\cdot\cos^4\varphi+2\cdot B_3^0\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi+B_{22}^0\cdot\sin^4\varphi\\
B_{22} &= B_{11}^0\cdot\sin^4\varphi+2\cdot B_3^0\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi+B_{22}^0\cdot\cos^4\varphi\\
B_{12} &= B_{12}^0+(B_{11}^0+B_{22}^0-2\cdot B_3^0)\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\\
B_{66} &= B_{66}^0+(B_{11}^0+B_{22}^0-2\cdot B_3^0)\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\\
B_3^0 &= B_{12}^0+2\cdot B_{66}^0
\end{aligned} \qquad (2)$$

a_{ik} определяются по формулам:

$$a_{11}=\frac{C_{11}}{\Omega},\; a_{22}=\frac{C_{22}}{\Omega},\; a_{12}=\frac{C_{12}}{\Omega},\; a_{66}=\frac{1}{C_{66}},\;\text{где}\;\; \Omega=C_{11}\cdot C_{22}-C_{12}^2 \qquad (3)$$

Жесткости D_{ik} и C_{ik} определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
D_{ik} &= \frac{2}{3}\left(B_{ik}^{n+1}\cdot h_{n+1}^3+\sum_{s=1}^{n}B_{ik}^s\left(h_s^3-h_{s+1}^3\right)\right)\\
C_{ik} &= 2\cdot\left(B_{ik}^{n+1}\cdot h_{n+1}+\sum_{s=1}^{n}B_{ik}^s\left(h_s-h_{s+1}\right)\right)
\end{aligned} \qquad (4)$$

Функции прогиба и напряжений, удовлетворяющие условиям опирания, принимаются в виде:

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}U_m(x)\cdot V_n(y)\cdot w_{mn}(t)$$

(5)

$$\Phi(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_m(x)\cdot Y_n(y)\cdot\varphi_{mn}(t)$$

где m, n – числа полуволн по осям Ox и Oy, $U_m(x)$ и $V_n(y)$ – фундаментальные балочные функции собственных колебаний, удовлетворяющие условиям опирания.

После подстановки выражений (5) в уравнения (1), на основании метода Бубнова-Галеркина, получим уравнение Матье-Хилла:

$$w''_{mn}+\Omega^2_{mn}\left(1-2\mu\cos\theta t\right)w_{mn}=0 \qquad (6)$$

где
$$\Omega^2_{mn}=\omega^2_{mn}\left[1-\frac{P_{10}}{P^*_{1mn}}\right],\quad \mu=\frac{P_{1t}}{2(P^*_{1mn}-P_{10})}$$

$$\omega^2_{mn}=\frac{I'_1}{I_0\rho h}+\frac{I'_2I_2}{I_0I_1\rho h}$$

$$I_1=\int_0^a\int_0^b\left(a_{22}X^{IV}_mY_n+(a_{66}-2a_{12})X''_mY''_n+a_{11}X_mY^{IV}_n\right)X_mY_ndxdy$$

$$I'_1=\int_0^a\int_0^b\left(D_{11}U^{IV}_mV_n+2(D_{12}+2D_{66})U''_mV''_n+D_{22}U_mV^{IV}_n\right)U_mV_ndxdy$$

$$I_2=-\int_0^a\int_0^b\frac{1}{R}U''_mV_nX_mY_ndxdy\,,\qquad I'_2=-\int_0^a\int_0^b\frac{1}{R}X''_mY_nU_mV_ndxdy$$

$$I_0=\int_0^a\int_0^bU^2_mV^2_ndxdy\,,\qquad I_4=\int_0^a\int_0^bU''_mV_nU_mV_ndxdy$$

Границы первых трех областей неустойчивости определяются следующими приближенными формулами:

$$\theta_*=2\Omega\sqrt{1\pm\mu}\,,\ \theta_*=\Omega\sqrt{1+\frac{1}{3}\mu^2}\,,\ \theta_*=\Omega\sqrt{1-2\mu^2}\,,\ \theta_*=\frac{2}{3}\Omega\sqrt{1-\frac{9\mu^2}{8\pm9\mu}} \qquad (7)$$

Из (7) видно, что ширина областей динамической неустойчивости убывает с увеличением номера области $\Delta\theta/2\Omega\approx\mu,\mu^2,\mu^3,\ldots\ldots$.

2. В качестве примера рассмотрим сжимаемую осевой силой $P_1(t)=P_{\mathbf{10}}+P_{\mathbf{1}t}\cdot\cos\theta t$ однослойную $(n=0)$ пологую оболочку из композиционного материала с характеристиками:

$$B^0_{22}/B^0_{11}=0.616\,,\ B^0_{12}/B^0_{11}=0.12\,,\ B^0_{66}/B^0_{11}=0.157$$

и со следующими параметрами:

$$c=b/R=0.25\pi,\ e=h/b=0.020\,,\ P_t/P_0=0.3,\ P_0/P^*_{1mn}=0.4\,,\varphi=0^0,5^0,\ldots,90^0$$

Жесткости D_{ik} и C_{ik} для однослойной пологой оболочки определяются по формулам:

$$D_{ik}=B_{ik}\cdot\frac{h^3}{12},\qquad C_{ik}=B_{ik}\cdot h \qquad (8)$$

Для шарнирно опертой по контуру пологой оболочки балочные функции и собственные значения имеют вид:

$$U_m(y) = \sin\lambda_m x,\ V_n(y) = \sin\mu_n y,\ \mu_n = n\pi/b,\ \lambda_m = m\pi/a\ \ (m = 1\ldots3,\ n = 1\ldots3) \qquad (9)$$

На основании метода Бубнова-Галеркина получим уравнение Матье-Хилла:

$$w''_{mn} + \Omega^2_{mn}\left(1 - 2\mu\cos\theta t\right)w_{mn} = 0 \qquad (10)$$

где

$$\Omega^2_{mn} = \omega^2_{mn}\left[1 - \frac{P_{10}}{P^*_{1mn}}\right],\quad \mu = \frac{P_{1t}}{2(P^*_{1mn} - P_{10})}$$

$$\omega^2_{mn} = \frac{1}{\rho h}\left(D_{11}\lambda^4_m + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2_m\mu^2_n + D_{22}\mu^4_n + \frac{\lambda^4_m}{R^2 A_{mn}}\right)$$

$$P^*_{mn} = \frac{1}{\mu^2_n}\left(D_{11}\lambda^4_m + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2_m\mu^2_n + D_{22}\mu^4_n + \frac{\lambda^4_m}{R^2 A_{mn}}\right)$$

$$A_{mn} = a_{22}\lambda^4_m + (a_{66} + 2a_{12})\lambda^2_m\mu^2_n + a_{11}\mu^4_n$$

Введем безразмерные величины:

$$\tilde{\omega}^2_{mn} = \omega^2_{mn}\,\frac{12\rho h b^4}{\pi^4 h^2 B^0_{11}},\quad \tilde{P}^*_{1mn} = \frac{12b^2}{\pi^2 h^3 B^0_{11}}P^*_{1mn}$$

В табл. 1 приведены результаты вычислений максимальных значений безразмерных величин критической силы P_{mn}, низшей частоты ω_{mn} незагруженной оболочки и низшей частоты Ω_{mn} загруженной оболочки.

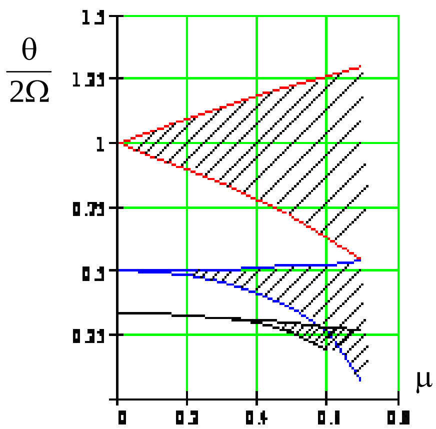
Таблица 1

$d = a/b$	$\max\limits_{\varphi}\min\limits_{m,n}\tilde{\omega}_{mn}$	$\max\limits_{\varphi}\min\limits_{m,n}\tilde{\Omega}_{mn}$	$\max\limits_{\varphi}\min\limits_{m,n}\tilde{P}^*_{1mn}$	φ
1/4	ω_{13}=79.232	Ω_{13}=61.373	P_{13}=636.059	40^0
1/3	ω_{13}=62.590	Ω_{13}=48.482	P_{13}=396.921	45^0
1/2	ω_{13}=37.966	Ω_{13}=29.408	P_{13}=146.047	55^0
1	ω_{13}=15.036	Ω_{13}= 11.646	P_{13}= 22.905	75^0
2	ω_{12}= 8.273	Ω_{12}= 6.408	P_{12}= 6.935	85^0
3	ω_{12}= 5.327	Ω_{12}= 4.127	P_{12}= 2.876	90^0
4	ω_{12}= 4.501	Ω_{12}= 3.487	P_{12}= 2.053	90^0

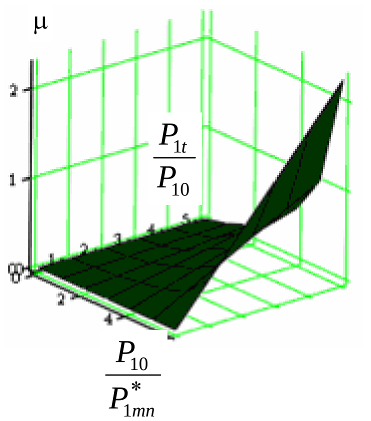
На фиг.2 показано распределение первых трех областей неустойчивости для уравнения Матье-Хилла (10) на плоскости $(\theta/2\Omega, \mu)$.

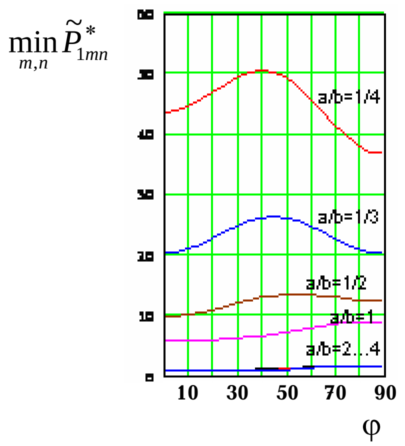
На фиг.3 показано изменение коэффициента возбуждения (в зависимости от соотношений $P_{1t}/P_{10} = 0...0.5$, $P_{10}/P^*_{1mn} = 0...0.9$.

На фиг.4 показано изменение критической силы в зависимости от угла укладки слоя композиционного материала.



Фиг.2 Распределение областей неустойчивости





Фиг.3
Зависимость коэффициента возбуждения от соотношений P_{1t}/P_{10} и P_{10}/P^*_{1mn}.

Фиг.4
Изменение критической силы в зависимости от угла укладки слоя КМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 336с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448с.
3. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Динамическая устойчивость анизотропной замкнутой цилиндрической оболочки. //Докл. АН АрмССР. 1965. Т. 41. № 5. С. 278–281.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600с.
5. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272с.
6. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек. // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1960. Т.13. № 1. С. 47–58.
7. Образцов И.Ф. Строительная механика летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1986. 536с.

Государственный Инженерный
Университет Армении

Поступила в редакцию
21.11.2006