ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАРАНТИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОИСКОМ ДВИЖУЩЕГОСЯ НА ПЛОСКОСТИ ЦЕЛЕВОГО ОБЪЕКТА

Аветисян В.В.

Ключевые слова: гарантированный поиск, оптимальное управление, подвижной объект.

Key words: guaranteed search, optimal control, mobile object.

Վ.Վ. Ավետիսյան

Հարթության մեջ շարժվող նպատակային օբյեկտի փնտրման օպտիմալ երաշխավորող ղեկավարումը

Դիտարկվում և լուծվում է հարթության մեջ շարժվող օբյեկտի օպտիմալ երաշխավորված փնտրման խնդիրը, երբ հայտնի է միայն, որ սկզբնական պահին որոնելի օբյեկտը գտնվում է տրված շրջանային տիրույթում: Որպես փնտրող է դիտարկվում եռաչափ տարածության մեջ ղեկավարվող օբյեկտը: Փնտրումն իրականացվում է շարժական կոնի շրջանաձև ինֆորմացիոն հիմքի միջոցով: Առաջարկված է ղեկավարման մի ալգորիթմ և ստացված են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում որոնելի օբյեկտը երաշխավորված հայտնաբերվում է հնարավոր նվազագույն ժամանակում:

V.V. Avetisyan

Optimal guaranteeing control of target object search moving on the plane.

The problem of optimal guaranteed search of the object performing controlled moving on the plane is considered. It is supposed that the location of required object at the initial moment is indefinite in the given domain. Searching object is an object which controlled in three-dimensional space. The detection of required object is fulfilled with the help of informative circular base of the moving cone. The control algorithm is suggested, as well as necessary and sufficient conditions under which the required object is found in minimal time are received.

Рассматривается и решается задача оптимального гарантированного поиска объекта, совершающего управляемое движение на плоскости. Предполагается, что положение искомого объекта в начальный момент неопределенно в заданном круге. В качестве ищущего принимается объект, управляемый в трехмерном пространстве. Обнаружение искомого объекта осуществляется с помощью информационного кругового основания подвижного конуса. Предложен алгоритм управления, а также получены необходимые и достаточные условия, при которых искомый объект гарантированно обнаруживается за возможно минимальное время.

Введение. Рассматривается задача оптимального гарантированного поиска подвижного целевого объекта в предположении, что известно его положение в начальный момент с точностью до заданного круга неопределенности на плоскости. В качестве ищущего принимается объект, управляемый в трехмерном пространстве. Обнаружение – определение точных координат искомого объекта осуществляется с помощью информационного кругового основания некоторого подвижного конуса. Необходимо осуществить обнаружение наискорейшим образом. Основное отличие постановки задачи данной работы от постановок задач гарантированного поиска подвижного объекта [1-6] состоит в том, что в [1-4] поиск ведется внутри области неопределенности искомого объекта, а область обнаружения – сфера или круг постоянного радиуса; в работе [5] поиск начинается вне круга неопределенности, однако ищущий объект перемещается с постоянным радиусом круга обнаружения на плоскости, обладая при этом большей скоростью, чем искомый объект; в [6] отыскивается неподвижный объект, а область обнаружения – полуплоскость.

1. **Постановка задачи.** Пусть имеются два точечных объекта X и Y, из которых X – ищущий, а Y – искомый. Оба объекта, обладая ограниченными линейными скоростями, имеют возможность в каждый момент времени произвольно изменять направления своих движений (“простые движения”, по терминалогии [7]): X – в пространстве, а Y – на плоскости согласно следующим соотношениям:

$$X: \ \dot{x} = u, \quad x(t_0) = x^0; \quad |u(t)| \le U; \quad x, u \in R^3 \tag{1.1}$$

$$Y: \ \dot{y} = \mathrm{v}, \quad y(t_0) = y^0; \quad |\mathrm{v}(t)| \le \mathrm{V}; \quad y, \mathrm{v} \in R^2 \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) x, y – радиус-векторы координат объектов; u, v – их управляющие скорости, U, V – максимально возможные скорости объектов X, Y.

Пусть в каждый момент времени $t \ge t_0$ объекту X точно известно свои фазовые координаты и максимальная скорость объекта Y. О координатах Y объекту X известно лишь то, что в начальный момент времени $t = t_0$ Y находится в круге

$$y^0 \in D_0 = \{ y \in R^2 : \ |y - \widetilde{y}^0| \le r_0 \ \} \tag{1.3}$$

координаты центра $\widetilde{y}^0 = (\widetilde{y}_1^0, \widetilde{y}_2^0)$ и радиус r_0 которого также известны X.

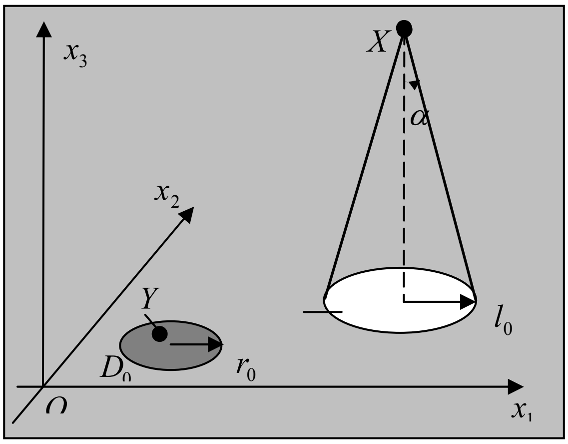
Возможность установления точных координат искомого объекта Y осуществляется с помощью подвижной информационной области

$$\begin{gathered} G(x(t), C) = \left\{ \widetilde{\xi} \in R^2 : \ \left| \widetilde{\xi}(t) - \widetilde{x}(t) \right| \le l(t) = Cx_3(t), \ \ \widetilde{x} = (x_1, x_2) \right\} \\ G(x(t_0), C) = G(\widetilde{x}(t_0), x_3(t_0), C) = G_0, \quad C = tg\alpha > 0, \quad t \ge t_0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

представляющая собой круговое основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения X (фиг. 1).

Искомый объект Y считается обнаруженным в момент времени $t^* \ge t_0$, если впервые выполняется условие его попадания в круг обнаружения

$$y \in G(x(t^*)), \text{ т.е. } \left| \widetilde{x}(t^*) - y(t^*) \right| \le l, \ \widetilde{x} = (x_1, x_2), \quad t^* \ge t_0 \tag{1.5}$$



Фиг. 1

Так как в силу эволюционного свойства [8] множество достижимости $D(t)$ искомого объекта (1.2), (1.3) непрерывно меняется во времени при $t \geq t_0$, то оно также представляет собой круг, причем $D(t) \supset D_0$. Таким образом, если $D(t^*)$– область достижимости искомого объекта Y, а $G(x(t^*))$–круг обнаружения ищущего объекта X в момент времени $t^* \geq t_0$ при некотором допустимом управлении $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t^*$, то из геометрических соображений очевидно, что условие обнаружения (1.5) в момент t^* равносильно условию поглощения области достижимости искомого объекта Y кругом обнаружения ищущего объекта X:

$$D(t^*) \subset G(x(t^*)) \tag{1.6}$$

Пусть требуется построить такое управляемое движение объекта X, при котором условие поглощения (1.6) происходит за минимально возможное время T.

Для решения этой задачи сначала рассмотрим задачу гарантированного поиска.

Задача 1. Для заданного начального положения $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ и заданных кругов обнаружения G_0 и неопределенности D_0 найти число $T > 0$ и допустимое управление $u(t)$ объекта X на интервале $[t_0, T]$, для которых при любом начальном положении $y^0 \in D_0$ объекта Y и любом допустимом управлении $\mathrm{v}(t)$ на интервале $[t_0, T]$ гарантируется условие поглощения (1.6) в некоторый момент времени t^*, не позднее времени T: $t^* \leq T$.

Для заданной начальной позиции $\{x^0, G_0, D_0\}$ управление $u(t)$ – решение задачи 1 назовем гарантирующим, а время T – гарантированным временем поиска.

Если скорость расширения круга обнаружения больше, чем скорость расширения области неопределенности – $CU > V$, то задача 1 имеет решение для любой начальной позиции $\{x^0, G_0, D_0\}$. Действительно, в этом случае условие (1.6) можно осуществить за конечное время движением X с максимальной скоростью U лишь по вертикали наверх, так как при таком способе движения скорость $\dot{l} = C\dot{x}_3 = CU$ расширения круга обнаружения будет больше, чем скорость расширения круга неопределенности искомого объекта.

В данной работе положим, что выполняется обратное к $CU > V$ неравенство:

$$CU \le V \tag{1.7}$$

Таким образом, содержательный смысл рассматриваемой постановки задачи 1 при условии (1.8) состоит в следующем. Возможно ли обнаружить искомый объект, если скорость расширения области обнаружения не больше скорости расширения области неопределенности, и если да, то при каких соотношениях параметров задачи это возможно?

Оказывается, что при условии (1.7) задача 1, в зависимости от параметров $\{x^0, G_0, D_0\}$, 1) либо не имеет решения, 2) либо имеет единственное решение, 3) либо имеет бесчисленное множество решений. В последнем случае для выделения единственного решения естественно наложить еще требование оптимальности, например, времени поиска, т.е. рассмотреть задачу 2:

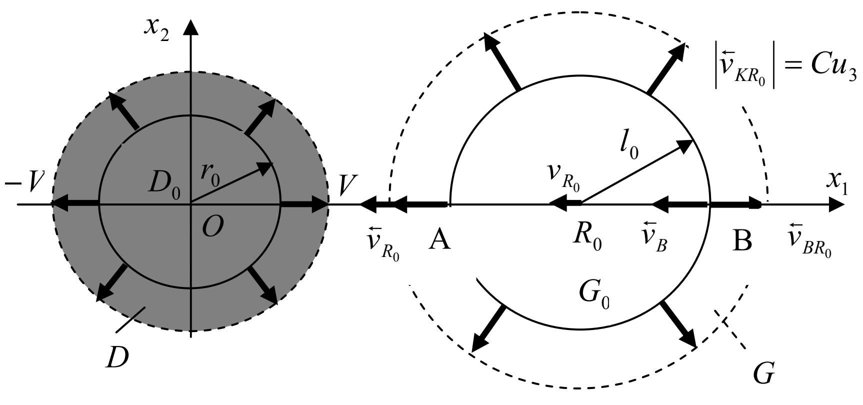
Задача 2. Для заданной начальной позиции $\{x^0, G_0, D_0\}$ найти гарантирующее управление $u(t)$, при котором гарантированное время обнаружения искомого объекта T минимально.

2. Алгоритм гарантирующего управления. Не нарушая общности, положим, что центр $\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_2^0) \in R^2$ круга неопределенности $D_0 \subset R^2$ искомого объекта Y совпадает с началом декартовой системы координат Ox_1x_2, а ищущий объект X в момент времени $t = 0$ находится в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $x_1^0 = R_0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = C^{-1} l_0$, проекция которой на плоскость Ox_1x_2, т.е. центр круга обнаружения находится в точке $(R_0,\, 0)$, $R_0 > 0$ оси Ox_1 (фиг. 2).

Рассмотрим такое движение X в вертикальной плоскости Ox_1x_3, при котором X, т.е. центр круга обнаружения вдоль горизонтальной оси Ox_1 перемещается по направлению к центру круга неопределенности D_0 с некоторой постоянной составляющей скорости $(-u_1)$, а вдоль вертикальной оси Ox_3 X перемещается наверх с постоянной составляющей скорости $u_3 = \sqrt{U^2 - u_1^2}$:

$$u = (-u_1, u_2, u_3), \;\; 0 < u_1 \le U, \;\; u_2 \equiv 0, \;\; u_3 = \sqrt{U^2 - u_1^2} \tag{2.1}$$

При таком управлении точки A и B, т.е. точки пересечения круга



Фиг. 2

обнаружения с осью Ox_1, перемещаются вдоль оси Ox_1 со скоростями $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, проекции которых на оси Ox_1 определяются, соответственно, как $(-u_1 - Cu_3)$ и $(-u_1 + Cu_3)$. При этом очевидно, что модули скоростей всех граничных точек K круга обнаружения относительно подвижного центра $\widetilde{x} = (R_0, 0)$ равны Cu_3, а направление вектора $\bar{v}_B$ вдоль оси Ox_1 зависит от знака величины $(-u_1 + Cu_3)$ (фиг. 2). Таким образом, происходит одновременное расширение и перемещение круга обнаружения, как целое, к центру области неопределенности D_0.

Из геометрических соображений следует, что для заданных параметров R_0, r_0, l_0; U, V, C (1.8) и выбранного способа управления (2.1), необходимым и достаточным условием поглощения (1.6) является выполнение неравенств

$$0 < T^- \le T^+ \tag{2.2}$$

$$T^- = (R_0 + r_0 - l_0)/(u_1 + Cu_3 - V), \; T^+ = (R_0 - r_0 + l_0)/(u_1 - Cu_3 + V) \tag{2.3}$$

где T^- – момент времени, начиная с которого точка A оказывается левее от левой точки пересечения круга неопределенности с осью Ox_1, а T^+ – время, в течение которого точка B пока еще находится вне круга неопределенности. Если момент времени T^- наступает не позднее момента T^+, то происходит поглощение и T^- будет гарантированным временем обнаружения. Неравенство $T^- > 0$, очевидно, означает, что в начальный момент поглощение еще не наступило.

В соответствии с (2.1), (2.3), неравенства (2.2) выполняются в том и только в том случае, когда разрешима относительно параметров R_0 и u_1 следующая система:

$$\begin{cases} R_0^{(1)} < R_0 \le R_0^{(2)}(u_1) \\ u_1^- < u_1 < u_1^+ \end{cases} \tag{2.4}$$

при следующих условиях:

$$l_0 - r_0 > 0, \; CU \le V < U\sqrt{1 + C^2} \tag{2.5}$$

где

$$R_0^{(1)} = l_0 - r_0, \qquad R_0^{(2)} = u_1 (V - C\sqrt{U^2 - u_1^2})^{-1} (l_0 - r_0) \tag{2.6}$$

$$u_1^{\pm} = (V \pm C\sqrt{(1 + C^2)U^2 - V^2})/(1 + C^2), \qquad 0 \le u_1^-, u_1^+ \le U$$

Система (2.4) определяет область существования решения задачи 1 на плоскости параметров u_1, R_0:

$$H(u_1, R_0) = \{u_1, R_0 : \; R_0^{(1)} < R_0 \le R_0^{(2)}(u_1), \;\; u_1^- < u_1 < u_1^+ \} \tag{2.7}$$

Для функции $R_0^{(2)}(u_1)$, $u_1^- < u_1 < u_1^+$ (2.4), описывающая границу области (2.6), минимум и минимальное значение определяются следующим образом:

при $CU < V$ $\quad u_1^{\max} = UV^{-1}\sqrt{V^2 - C^2U^2}$, $\quad u_1^{\max} \in \left(u_1^-, u_1^+\right)$ (2.8)

$$R_0^{\max} = \max_{u_1^- < u_1 < u_1^+} R_0^{(2)}(u_1) = R_0^{(2)}(u_1^{\max}) = U(V^2 - C^2U^2)^{-1/2}(l_0 - r_0) < \infty \qquad (2.9)$$

при $CU = V$ $\quad u_1^{\max} = u_1^- = 0$, $\quad u_1^{\max} \notin \left(u_1^-, u_1^+\right)$, $\quad R_0^{\max} = \infty$ (2.10)

Следовательно, в случае

$$CU < V, \quad \forall R_0 \in \left(R_0^{(1)},\, R_0^{\max}\right], \quad R_0^{\max} < \infty \qquad (2.11)$$

существует одно $u_1 = u_1^{\max}$ или множество гарантирующих управлений и соответствующие им значение гарантированного времени поиска $T^-(R_0, u_1)$ (2.3).

В случае

$$CU = V, \quad \forall R_0 \in \left(R_0^{(1)},\, R_0^{\max}\right), \quad R_0^{\max} = \infty \qquad (2.12)$$

согласно (2.6)-(2.10), ни при каком значении гарантирующее управление не определяется единственным образом.

С учетом (2.8)-(2.12) множество гарантирующих управлений имеет вид

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(R_0) \le u_1 \le u_1^{(2)}(R_0), &\qquad \text{если } CU < V \\ u_1^- < u_1 \le u_1^{(2)}(R_0), &\qquad \text{если } CU = V \end{aligned} \qquad (2.13)$$

где

$$u_1^{(1),(2)}(R_0) = \left\{(l_0 - r_0)R_0V \pm d\right\} \times \left\{{R_0}^2C^2 + (l_0 - r_0)^2\right\}^{-1} \qquad (2.14)$$

$$d = \sqrt{(l_0 - r_0)^2 {R_0}^2 V^2 - (V^2 - C^2U^2)R_0^2[{R_0}^2C^2 + (l_0 - r_0)^2]}$$

– корни уравнения

$$R_0 = u_1(l_0 - r_0)(V - C\sqrt{U^2 - u_1^2})^{-1} \qquad (2.15)$$

причем $u_1^- < u_1^{(1)}(R_0) < u_1^{(2)}(R_0) < u_1^+$.

3. Оптимальное гарантирующее управление. Далее, в области (2.7) решается задача 2 – найти управление $u_1^{opt} \in \left[u_1^{(1)}, u_1^{(2)}\right]$, при котором

$$T^{opt} = \min_{u_1^{(1)} < u_1 < u_1^{(2)}} T^-(u_1, R_0) \qquad (3.1)$$

Для любого R_0 из (2.11), (2.12) функция $T^-(R_0, u_1)$, $u_1^- < u_1 < u_1^+$, достигает единственного минимума в точке:

$$u_1 = u_1^{\min} = U/\sqrt{1 + C^2}, \qquad u_1^- < u_1^{\min} < u_1^+ \qquad (3.3)$$

В зависимости от значения R_0, удовлетворяющего одному из случаев (2.11), (2.12), точка минимума (3.3) либо принадлежит множеству гарантирующих управлений (2.13), либо находится вне этого множества – $u_1^{\min} \in \left(u_1^{(2)}(R_0),\, u_1^{+}\right]$. В первом случае точка минимума является оптимальной в рассматриваемой задаче 2, а во втором – оптимальной является правая крайняя точка $u_1^{(2)}(R_0)$ отрезков (2.10). Совпадение $u_1^{(2)}(R_0) = u_1^{\min}$ имеет место при некотором значении $R_0 = R_0^*$:

$$R_0^* = R_0^{(2)}(u_1)\Big|_{u_1 = u_1^{\min}} = U(V\sqrt{1+C^2} - C^2U)^{-1/2}(l_0 - r_0) \tag{3.4}$$

Таким образом, для заданных параметров r_0, l_0, U, V, удовлетворяющих условиям (1.7) и (2.5), компоненты оптимального гарантирующего управления и оптимальное гарантированное время T^{opt} определяются следующим образом:

$$\begin{matrix} u_1^{\text{opt}} \\ T^{\text{opt}} \end{matrix} = \begin{cases} u_1^{\max}; \quad T^-(u_1^{\max}, R_0), & \text{если } CU < V \ \text{и} \ R_0 = R_0^{\max} \\ u_1^{(2)}(R_0); \quad T^-(u_1^{(2)}(R_0), R_0), & \text{если } CU \le V \ \text{и} \ R_0 \in \left(R_0^*, R_0^{\max}\right) \\ & \quad u_1^{\max} < u_1^{(2)}(R_0) < u_1^{\min} \\ u_1^{\min}; \quad T^-(u_1^{\min}, R_0), & \text{если } CU \le V \ \text{и} \ R_0 \in \left(R_0^{(1)}, R_0^*\right] \\ & \quad u_1^{\max} < u_1^{\min} \le u_1^{(2)}(R_0) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$u_2^{opt} = 0, \qquad u_3^{opt} = \sqrt{U^2 - (u_1^{opt})^2}$$

где $u_1^{\max}$, $u_1^{(2)}(R_0)$, $u_1^{\min}$, $R_0^{(1)}$, R_0^*, $R_0^{\max}$ определяются уже известными соотношениями (2.8), (2.14), (3.2), (2.6), (3.3), (2.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Вып. 1. С. 3-12.
2. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. № 1. Вып. С. 827-862.
3. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. Гарантированное управление поиском подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С. 58-66.
4. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С. 31-39.
5. Петросян Л.А., Гарнаев А. Ю. Игры поиска. С.-ПУ: 1992. 217 с.

6. Меликян А.А. Задача оптимального быстродействия с поиском целевой точки // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 3-11.
7. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.:Мир.1967. 479 с.
8. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука. 1988. 319 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
24.11. 2006