ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №4, 2006 Механика

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ И ВРЕМЕНИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТАМ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

Адамян В.Г., Манандян Л.Т.

Կենտրոնական ուժի դաշտում պարաբոլական և հիպերբոլական ուղեծրով շարժվող կետի դիրքի և ժամանակի որոշումը

Վ.Տ. Ադամյան, Լ.Գ. Մանանդյան

Աշխատանքում բերված պարզ ալգորիթմի միջոցով որոշվում է պարաբոլական և հիպերբոլական ուղեծրով շարժվող կետի դիրքը և ժամանակը։

Determination of Position and Time of the Point Moving in the Central Power Field over Parabolic and Hyperbolic Orbit

V.G. Adamyan, L.T. Manandyan

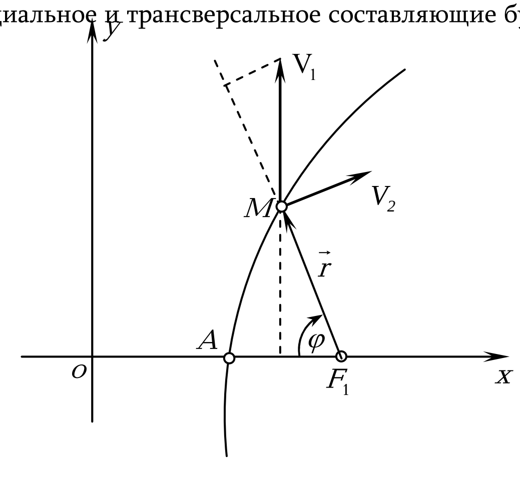
The following work is about the determination of position and time of the point moving over in the central power field over parabolic and hyperbolic orbit through algorithm.

В работе предлагается простой алгоритм для определения положения точки и времени при движении по параболической и гиперболочеcкой орбитам.

В работах [1], [2], где рассмотрено движение точки под действием центральной силы, указано, что скорость точки при параболическом и гиперболическом движении можно представить в виде двух слагаемых следующим образом: слагаемое V_1 перпендикулярно к большой оси параболической или гиперболической орбиты, постоянно по модулю и по направлению, а V_2 перпендикулярно к радиусу-вектору, постоянно по модулю (фиг.1).

Представление скорости в таком виде и движение точки по разным орбитам при помощи простых механизмов в работе предлагается простой алгоритм, с помощью которого можно определить положение точки и время.

В этом случае радиальное и трансверсальное составляющие будут [3]:



Фиг. 1

$$V_r = V_1 \sin\varphi = \frac{dr}{dt} \tag{1}$$

$$V_T = V_1 \cos\varphi + V_2 = r\frac{d\varphi}{dt} \tag{2}$$

Из уравнения (1) и (2) получим

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin\varphi}{K + \cos\varphi} d\varphi, \quad K = \frac{V_2}{V_1} \tag{3}$$

Интегрируя уравнение (3), получим $\int \frac{dr}{r} = \int \frac{\sin\varphi}{K + \cos\varphi} d\varphi$, и учитывая начальные условия $\varphi = 0$, $r = r_0$, получим

$$r = \frac{r_0(K+1)}{K + \cos\varphi} \tag{4}$$

1. **Случай движения по параболической орбите.**

Подставляя значения $K = 1$, т.е. $V_1 = V_2$, в уравнение (4), будем иметь:

$$r = \frac{2r_0}{1 + \cos\varphi} \tag{5}$$

При $\varphi = 0$ точка находится в положении P_0 (вершина параболы).

Из уравнения (2) имеем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_1 \cos\varphi + V_2}{r} \tag{6}$$

Из уравнения (6), учитывая (5), получим

$$\int_0^t dt = \frac{1}{V_1}\int_0^{\varphi} \frac{2r_0}{(1+\cos\varphi)^2} d\varphi \tag{7}$$

Для вычисления интеграла обозначим $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = z$, тогда $\cos\varphi = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\varphi = \frac{2dz}{1+z^2}$ и после несложных преобразований, вычисляя интеграл, найдем:

$$t = \left.\frac{r_0(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2})}{V_1}\right|_0^{\varphi} \tag{8}$$

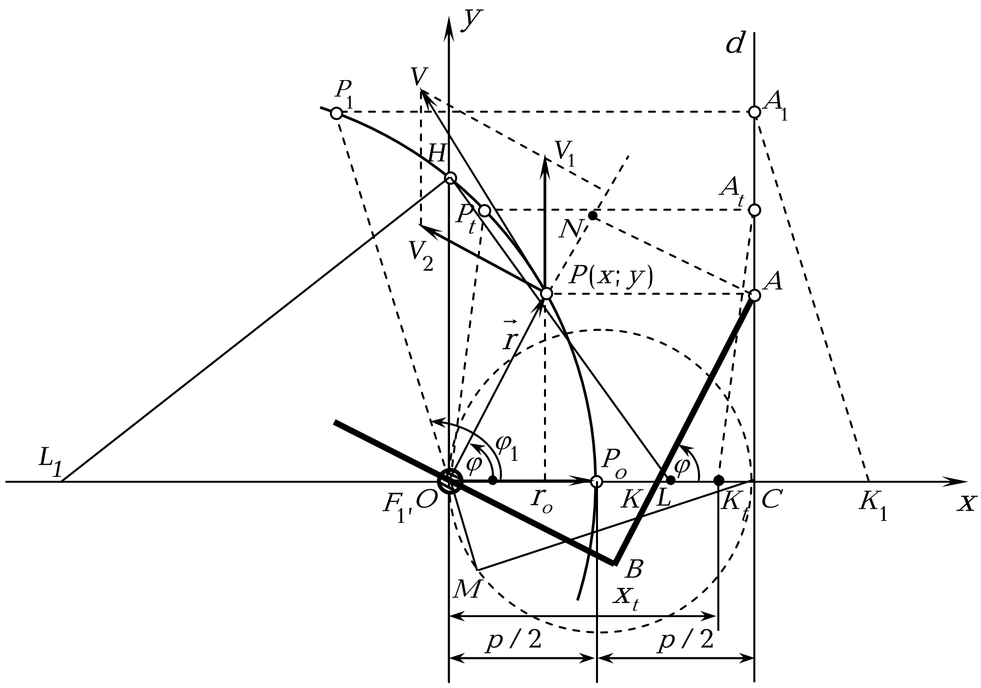
В пределах $0 - \pi/2$ получим

$$T = \frac{4r_0}{3V_1} \tag{9}$$

Отметим, что уравнение (8) – это уравнение равномерного движения, так как V_1 постоянна по модулю.

Из уравнения (8) определение времени в зависимости от угла φ несколько затруднено, поэтому для решения задачи мы предлагаем другой более простой алгоритм.

Для описания алгоритма рассмотрим следующую задачу.



Фиг. 2

Прямой жесткий угол ABO движется в своей плоскости так, что конец A скользит по директрисе d параболы (фиг.2), а сторона BO все время проходит через шарнир O, лежащий на оси x на расстоянии p от директрисы. Поместив начало координат в точке O (фокус F_1 совпадает с точкой O) и, принимая $AB = OC = p$, покажем, что геометрическое место точек мгновенных центров скоростей прямого угла представляет собой параболу. Если из точек прямого угла A и O опустить перпендикуляры к скоростям этих точек, получим положение мгновенного центра скоростей. Определим теперь координаты точки P:

$$x = AK\cos\varphi\,;\; y = AK\sin\varphi \quad (OP = AK) \quad .$$

Из ΔAKC $\cos\varphi = \dfrac{KC}{AK} = \dfrac{KC}{p - KC}$, так как $\Delta AKC = \Delta OKB$, $KC = KB$,

откуда $KC = \dfrac{p\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$, а $AK = \dfrac{KC}{\cos\varphi} = \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$.

Тогда координаты точки P будут:

$$x = \frac{p}{1+\cos\varphi}\cos\varphi,\; y = \frac{p}{1+\cos\varphi}\sin\varphi \qquad (10)$$

Исключая теперь φ из (10) и имея в виду, что $\cos\varphi = \dfrac{x}{p-x}$, $\sin\varphi = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{(p-x)^2}}$, получим

$$y^2 = -2p\left(x-\frac{p}{2}\right) \tag{11}$$

Уравнение (11)–это уравнение параболы с вершиной в точке $P_0\left(p/2;0\right)$, где p – параметр параболы, ветви которой направлены влево. Рассмотренная задача дает возможность легко определить положение точки в зависимости от угла φ и времени t.

Допустим, что радиус-вектор повернулся на угол φ. Из точки O по направлению радиуса-вектора откладываем отрезок величиной p, получим точку N, откуда опустим перпендикуляр к радиусу-вектору ON до пересечения с директрисой d, получим точку A. Из точки A опустим перпендикуляр к директрисе до пересечения с радиусом-вектором, получим положение точки P. Следует отметить, что ромб $OPAK$ - это ромб движения [2].

Положение точки в зависимости от угла φ можно определить также другим путем. Уравнение (5) можно написать так:

$$r = \frac{(2r_0)^2}{2r_0 + 2r_0\cos\varphi} \quad \text{или} \quad (2r_0)^2 = r(2r_0 + 2r_0\cos\varphi) \tag{12}$$

Если возьмем прямоугольный треугольник высотой $OH = 2r_0$, тогда отрезки на гипотенузе будут r и $2r_0 + 2r_0\cos\varphi$.

Допустим, что радиус-вектор повернулся на угол φ_1 (фиг.2), из точки P_0 с радиусом r_0 проведем окружность, тогда из ΔOMC $OM = 2r_0\cos\varphi_1$. Из точки C отложим отрезок, равный отрезку OM, получим точку L ($OL = 2r_0$-$2r_0\cos\varphi_1$, так как угол φ_1 тупой). Соединив точку L с точкой H и из точки H, опустив перпендикуляр к прямой LH до пересечения с осью x, получим точку L_1. Отрезок OL_1 на основании (12) представляет собой модуль радиуса-вектора. Из точки F_1 отложим величину отрезка OL_1 по направлению радиуса - вектора, получим положение точки P_1, а ромб $OP_1A_1K_1$–это ромб движения.

Теперь получим положение точки в зависимости от времени t. Как отмечалось, уравнение (8) – это уравнение равномерного движения. За время $T = \dfrac{4r_0}{3V_1}$ радиус-вектор повернется на угол $\pi/2$, т.е. из положения OP_0 переходит в положение OH. В это же время радиус-вектор по величине изменится на величину $P/2$, следовательно, отрезок $P/2$ можно принимать как отрезок времени. Поэтому

$$\mu_t = \frac{4}{3V_1}\left[\frac{\text{сек}}{\text{м}}\right] \qquad (13)$$

Допустим нужно определить положение точки в момент времени t. Для этого из точки O отложим отрезок $x_t = OK_t = \frac{t}{\mu_t} = \frac{3V_1 t}{4}$, получим точку K_t. Из точки K_t проведем дугу с радиусом x_t до пересечения с директрисой d, получим точку A_t. Направление $K_t A_t$ - это направление радиуса-вектора $OP_t\left(OP_t = K_t A_t\right)$, т.е. мы фактически построили ромб движения - $OK_t A_t P_t$.

Таким образом, если нам известно время движения или угол поворота радиуса-вектора, то по описанному алгоритму можно найти положение точки. Если известна дальность точки от фокуса F_1, т.е. величина радиуса-вектора, то умножив это расстояние на масштаб времени, получим время движения.

2. Случай движения по гиперболической орбите.

Подставляя значения $K = \frac{V_2}{V_1} = \frac{a}{c} < 1$ (где точки $A_1(a;0), A_2(-a;0)$ – вершины гиперболы, а точки $F_1(c;0),\ F_2(-c;0)$ – фокусы гиперболы), $r_0 = c - a$ в уравнение (4), будем иметь:

$$r = \frac{c^2 - a^2}{a + c\cos\varphi} \qquad (14)$$

При $\varphi = 0$ точка находится в положении A_1, где $r = r_0 = c - a$ (фиг.3).

Подставляя значение r в уравнение (6) и интегрируя, получим

$$\int_0^t dt = \frac{\int_0^{\varphi} \frac{r_0(K+1)}{(K+\cos\varphi)^2} d\varphi}{V_1} \qquad (15)$$

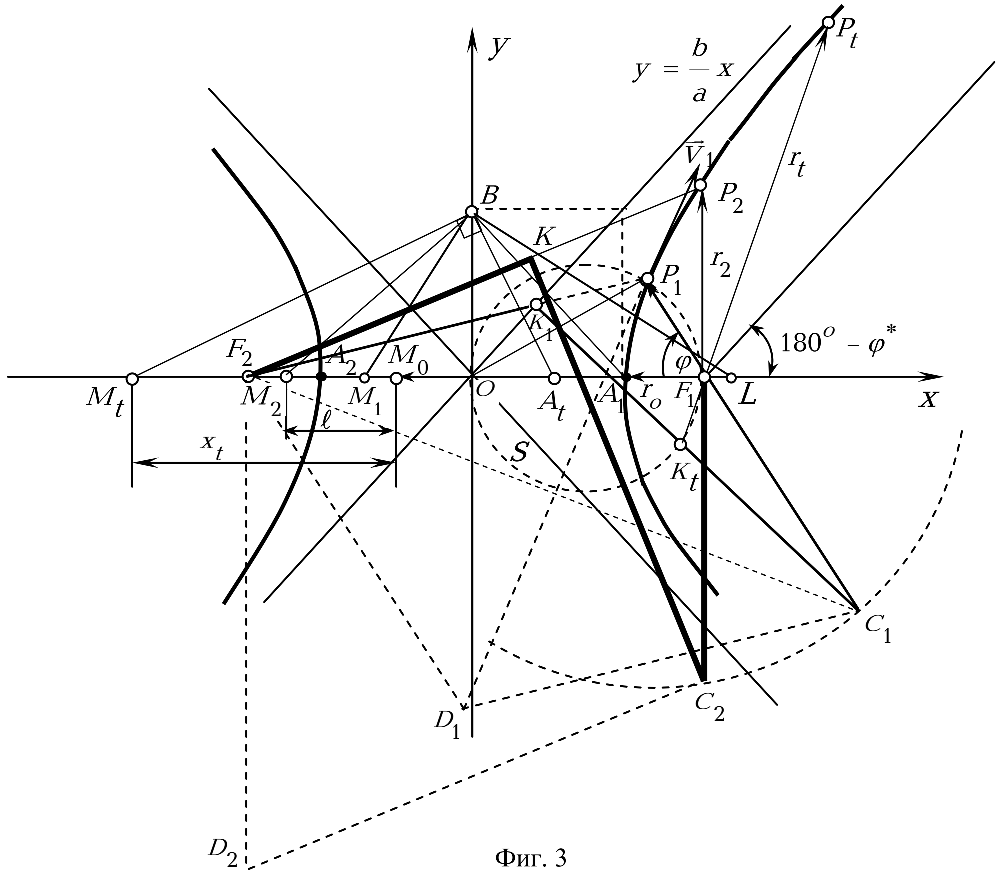
$$tV_1 = \frac{r_0(K+1)}{K^2}\left(\frac{\varepsilon\sin\varphi}{(\varepsilon^2-1)(1+\cos\varphi)} - \frac{1}{\varepsilon^2-1}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}tg\frac{\varphi}{2}}{1-\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}tg\frac{\varphi}{2}}\right)\Bigg|_0^{\varphi} \qquad (16)$$

Подставляя значение r_0, K в уравнение (15), в пределах $0 - \pi/2$ получим

$$TV_1 = c\left(\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right) \qquad (17)$$

где $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Из уравнения (15) определение времени в зависимости от угла φ несколько затруднено, поэтому для решения задачи мы предлагаем другой, более простой алгоритм. Отметим, что уравнение (16) – это уравнение равномерного движения, так как V_1 постоянна по модулю. Для описания алгоритма рассмотрим следующую задачу. Покажем, что геометрическое место точек мгновенных центров скоростей звена KC_2–антипараллелограмма $F_2KC_2F_1$ (фиг.3),



Фиг. 3

поставленного на большое звено $F_2F_1 = KC_2 = 2c$, а $F_2K = C_2F_1 = 2a$ представляет собой гиперболу. Действительно, $P_2F_2 - P_2F_1 = 2a$, так как $P_2K = P_2F_1$.

Рассмотренная задача дает возможность легко определить положение точки в зависимости от угла φ и времени t.

Допустим, радиус-вектор повернулся на угол φ. Из точки C_1 проведем дугу с радиусом $2c$, а из точки F_2 – дугу с радиусом $2a$, которые пересекаются в точке K_1. Соединяя точку F_2 с точкой K_1 и продолжая до пересечения прямой F_1C_1, т.е. по направлению радиуса-вектора, получим положение точки P_1. Следует отметить, что ромб $F_2P_1C_1D_1$ - это ромб движения, где направление диагонали P_1D_1 будет направлением скорости V_{p1} в точке P_1 [2]. Положение точки в зависимости от угла φ можно определить также другим путем. Уравнение (5) можно написать так:

$$b^2 = r(a + c\cos\varphi) \qquad (18)$$

Если возьмем прямоугольный треугольник высотой b $(b^2 = c^2 - a^2)$, тогда отрезки на гипотенузе будут r и $a + c\cos\varphi$.

Проведем окружность S с диаметром c (фиг.3), тогда из $\square OP_1F_1$ $F_1P_1 = c\cos\varphi$. Из точки A_1 отложим отрезок, равный отрезку F_1P_1, получим точку L ($OL = a + c\cos\varphi$).Соединяя точку L с точкой B и из точки B, опуская перпендикуляр к прямой BL до пересечения с осью *x,* получим точку M_1. Отрезок OM_1 на основании (18) представляет собой модуль радиуса-вектора. Из точки F_1 отложим величину отрезка OM_1 по направлению радиуса-вектора, получим положение точки P_1, а ромб $F_2P_1C_1D_1$ – это ромб движения.

Теперь получим положение точки в зависимости от времени *t.* Как отмечалось, уравнение (15) – это уравнение равномерного движения. За время $T = \frac{c}{V_1}\left[\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right]$ радиус-вектор повернется на угол $\frac{\pi}{2}$, т.е. из положения F_1A_1 переходит в положение F_1P_2. В это же время радиус-вектор по величине изменится на величину $\ell = M_0M_2 = \frac{c^2 - a^2}{a} - (c - a) = c(\varepsilon - 1)$, следовательно, отрезок ℓ можно принимать как отрезок времени. Поэтому масштаб времени будет $c(\varepsilon - 1)\mu_t = \frac{c}{V_1}\left[\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right]$,

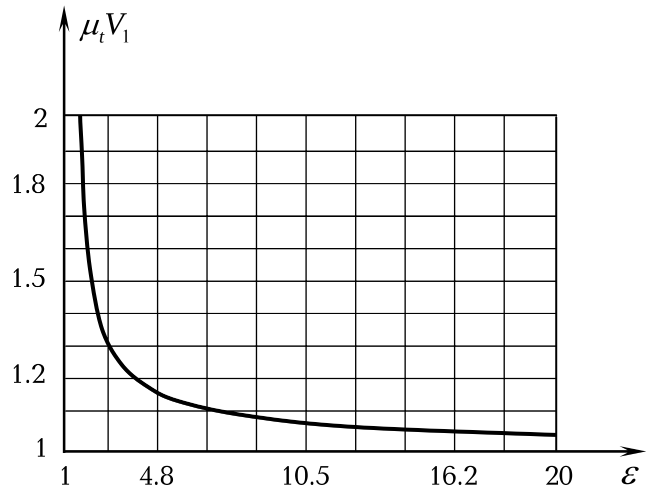
$$\mu_t = \frac{1}{V_1(\varepsilon - 1)}\left[\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right][\frac{сек}{м}] \qquad (19)$$

Имея в виду, что $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{(\varepsilon - 1)\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}) = 1$, график масштаба времени в зависимости от ε будет (см.фиг. 4).

Допустим, нужно определить положение точки в момент времени t. Для этого из точки M_0 отложим отрезок

$$x_t = M_0M_t = \frac{t}{\mu_t} = \frac{tV_1(\varepsilon - 1)}{\left[\varepsilon - \ln\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\right)\Big/\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\right]}$$

$x_t = M_0M_t = \frac{t}{\mu_t} = \frac{tV_1(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}})}$, получим точку M_t и радиус-вектор точки $r_t = OM_t$ в момент времени t. Соединяя точку M_t с точкой *B* и из точки *B* опуская перпендикуляр к прямой BM_t до пересечения с осью *x,* получим точку A_t, а отрезок $A_1A_t = c\cos\varphi$. Из точки F_1 проведем дугу с радиусом A_1A_t до пересечения с окружностью $\boldsymbol{S}$, получим точку K_t. Соединяя точку F_1 с точкой K_t, получим, что F_1K_t будет направлением радиуса-вектора (фиг. 4). Из точки F_1 по направлению F_1K_t, подставляя отрезок, равный OM_t, получим положение точки P_t в момент времени t. Отметим, что значение угла $\varphi = \varphi^*$, $\cos\varphi^* = -\dfrac{a}{c}$, при котором расстояние точки от фокуса неограниченно увеличивается $(r \to \infty)$, определяет асимптотическое направление гиперболической траектории.



Фиг. 4.

Таким образом, если нам известно время движения или угол поворота радиуса-вектора, то по описанному алгоритму можно найти положение точки. Если известна дальность точки от фокуса F_1, т.е. величина радиуса-вектора, то при умножении этого расстояния на масштаб времени получим время движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рой А. Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544с.
2. Адамян В.Г. Альмагест-2. Геометрическая теория гравитации. Ереван: 2004. 222с.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: 1965. 467с.

ГИУА Гюмрийский филиал,
кафедра прикладной механики

Поступила в редакцию
16.01.2006