

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ
РАЗДЕЛА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
И ПЬЕЗОМАГНИТНЫХ СРЕД

Гараков В.Г., Даноян З.Н.

Վ.Գ. Գարակով, Զ.Ն. Դանոյան

Էլեկտրաառաձգական ալիքների անդրադարձումը և բեկումը այնպիսի էլեկտրիկ
և այնպիսի մագնետիկ միջավայրերի բաժանման եզրում

Աշխատանքում քննարկվում է էլեկտրաառաձգական 6mm կամ 4mm համաչափությամբ միջավայրի ծավալից նրա և այնպիսի հասկանալի նույն համաչափությամբ միջավայրի բաժանման եզրին ընկնող հարթ էլեկտրաառաձգական ալիքի անդրադարձումը և բեկումը: Ցույց է տրվում, որ ընկնող ալիքը փոխադրելով այնպիսի մագնետիկ միջավայրի հետ առաջ է բերում՝ էլեկտրաառաձգական անդրադարձող համասեռ էլեկտրաառաձգական ալիք և ուղեկցող անհամասեռ էլեկտրամագնիսատատիկ մակերևութային ալիք և այնպիսի մագնետիկ միջավայրում՝ բեկված համասեռ մագնիսատատիկ ալիք և ուղեկցող անհամասեռ էլեկտրա-մագնիսատատիկ մակերևութային ալիք:

V.G. Garakov, Z.N. Danoyan

Reflection and refraction of electroelastic waves at the interface
of piezoelectric and piezomagnetic solids

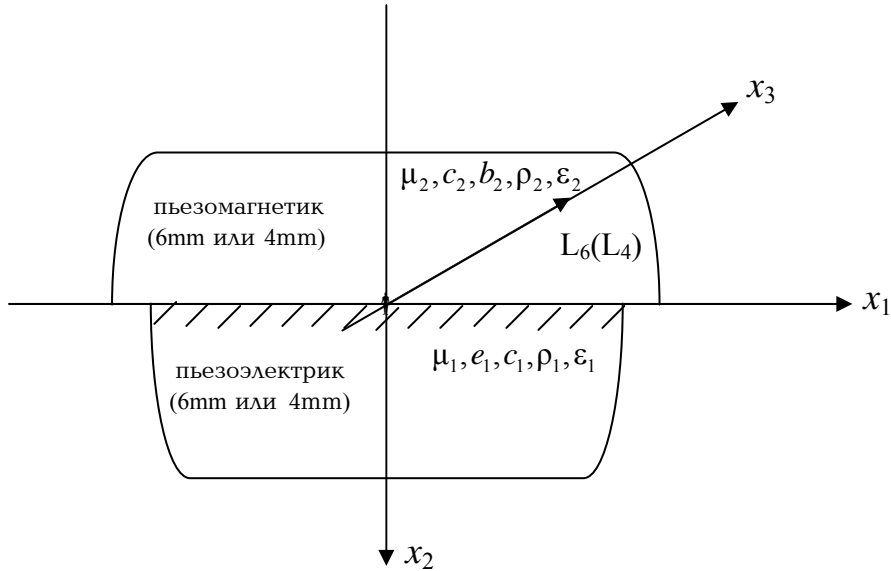
In the paper reflection and refraction of plane electroelastic wave is discussed at the interface of piezoelectric and piezomagnetic solids with symmetry 6mm or 4mm. It is shown that the incident wave interacting with the piezomagnetic medium generates in the piezoelectric a reflected homogeneous electroelastic wave and any attendant nonhomogeneous electro-magnetostatic surface wave and in the piezomagnetic a refracted homogeneous magnetoelastic wave and an attendant nonhomogeneous electromagnetostatic surface wave.

В работе обсуждается отражение и преломление плоской электроупругой волны от границы раздела пьезоэлектрика и пьезомагнетика с симметриями 6mm или 4mm. Показывается, что падающая волна, взаимодействуя с пьезомагнитной средой, вызывает в пьезоэлектрике отраженную однородную электроупругую волну и сопутствующую неоднородную электро-магнитостатическую поверхностную волну и в пьезомагнетике преломленную однородную магнитоупругую волну и сопутствующую неоднородную электро-магнитостатическую поверхностную волну.

1. Электроупругие волны в пьезоэлектриках рассмотрены во многих работах [1-4], магнитоупругие волны в пьезомагнетиках – в работах [5-7], в работе [8] исследован вопрос существования сдвиговых электро-магнитоупругих поверхностных волн на границе раздела системы пьезоэлектрик-пьезомагнетик. В настоящей работе рассматривается задача отражения и преломления электроупругих волн на границе раздела системы пьезоэлектрик-пьезомагнетик.

Пусть в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ упругая пьезоэлектрическая среда занимает область $x_2 > 0$, которая вдоль границы $x_2 = 0$ жестко связана с пьезомагнитной средой, занимающей область $x_2 < 0$. В силу пьезоэлектрического и пьезомагнитного эффектов упругие возмущения связываются с магнитными и электрическими возмущениями и в слоистой среде распространяются связанные

электро-магнитоупругие возмущения. Предполагается, что обе среды обладают гексагональной симметрией класса 6mm (или тетрагонального класса 4mm), главные оси симметрии которых имеют направление оси Ox_3 . Ось Ox_1 направлена вдоль границы раздела сред (фиг.1).



Фиг.1

Задачу будем описывать квазистатическим приближением [4]. Предполагается, что слоистая система находится в условиях антиплоской деформации и все характеристики электромагнитного и упругого полей зависят от координат x_1 и x_2 и от времени t будем иметь зависимости:

$$u_1 = u_2 \equiv 0, \quad u_3 = u(x_1, x_2, t), \quad \varphi = \varphi(x_1, x_2, t), \quad \psi = \psi(x_1, x_2, t), \quad (1.1)$$

где φ и ψ – потенциалы электрического и магнитного полей соответственно:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad \vec{H} = -\text{grad}\psi \quad (1.2)$$

\vec{E} – вектор напряженности электрического поля, \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля.

Согласно [4,8], с учетом (1.2), из уравнений и соотношений электроупругости пьезоэлектрических сред и магнитоупругости пьезомагнитных сред получаем следующие уравнения и граничные условия:

1. Уравнения в области $x_2 > 0$ (в пьезоэлектрической среде):

$$\begin{aligned} c_1 \Delta u_1 - \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + e_1 \Delta \varphi_1 &= 0 \\ 4\pi e_1 \Delta u_1 - \varepsilon_1 \Delta \varphi_1 &= 0 \\ \Delta \psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где плотность, упругие и пьезоэлектрические модули и диэлектрическая проницаемость обозначены:

$$\rho_1, c_{44}^{(1)} = c_1, e_{15}^{(1)} = e_1, \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_1 \quad (1.4)$$

2. Уравнения в области $x_2 < 0$ (в пьезомагнитной среде):

$$\begin{aligned} c_2 \Delta u_2 - \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + b_2 \Delta \psi_2 &= 0 \\ 4\pi b_2 \Delta u_2 - \mu_2 \Delta \psi_2 &= 0 \\ \Delta \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где плотность, упругие и пьезомагнитные модули и магнитная проницаемость обозначены:

$$\rho_2, c_{44}^{(2)} = c_2, b_{15}^{(2)} = b_2, \mu_{22}^{(2)} = \mu_2 \quad (1.6)$$

3. Граничные условия на поверхности раздела сред $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \psi_1 = \psi_2 \\ -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + 4\pi e_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\ -\mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + 4\pi b_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \\ c_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + e_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} &= c_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где обозначены:

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_2, \quad \mu_{11}^{(1)} = \mu_1 \quad (1.8)$$

Величины с индексом «1» относятся к пьезоэлектрику, а с индексом «2» – к пьезомагнетику.

2. Рассмотрим решения граничной задачи (1.3), (1.5), (1.7) в виде плоских волн. Вначале введем следующие новые переменные:

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= \varphi_1 - \bar{e}_1 u_1, \quad \bar{e}_1 = 4\pi e_1 / \varepsilon_1 \\ \psi'_2 &= \psi_2 - \bar{b}_2 u_2, \quad \bar{b}_2 = 4\pi b_2 / \mu_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

При указанных заменах уравнения для u_1 и φ'_1 и u_2 и ψ'_2 разделяются и принимают вид:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \bar{c}_1 \Delta u_1, \quad \Delta \varphi'_1 = 0, \quad \Delta \psi_1 = 0 \quad (2.2)$$

где обозначены:

$$\bar{c}_1 = c_1 (1 + \chi_1^2), \quad \chi_1^2 = e_1 \bar{e}_1 / c_1 \quad (2.3)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \bar{c}_2 \Delta u_2, \quad \Delta \psi'_2 = 0, \quad \Delta \varphi_2 = 0 \quad (2.4)$$

где обозначены:

$$\bar{c}_2 = c_2 (1 + \chi_2^2), \quad \chi_2^2 = b_2 \bar{b}_2 / c_2 \quad (2.5)$$

Подставляя значения φ_1 и ψ_2 из (2.1) в граничные условия (1.7), получим:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_2, \quad \bar{c}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + e_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_2} = \bar{c}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \psi'_2}{\partial x_2} \\
\varphi'_1 + \bar{e}_1 u_1 &= \varphi_2, \quad \psi_1 = \psi'_2 + \bar{b}_2 u_2 \\
\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_2} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \quad \mu_2 \frac{\partial \psi'_2}{\partial x_2} = \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляя в уравнения (2.2)

$$u_1 = \tilde{u}_1 e^{i(p x_1 + q_1 x_2 - \omega t)}, \quad \varphi'_1 = \tilde{\varphi}'_1 e^{i(p x_1 + q_2 x_2 - \omega t)}, \quad \psi_1 = \tilde{\psi}_1 e^{i(p x_1 + q_3 x_2 - \omega t)} \tag{2.7}$$

получим:

$$\begin{aligned}
\left[\bar{c}_1 (p^2 + q^2) - \rho_1 \omega^2 \right] \tilde{u}_1 &= 0 \\
(p^2 + q^2) \tilde{\varphi}'_1 &= 0, \quad (p^2 + q^2) \tilde{\psi}'_1 = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где p и q – продольное и поперечное волновые числа, а ω – частота плоской волны. Из (2.8) имеем:

$$q_1^2 = \frac{\omega^2}{s_1^2} - p^2, \quad q_2^2 = -p^2, \quad q_3^2 = -p^2 \tag{2.9}$$

где обозначено:

$$s_1^2 = \left(\frac{\omega}{k_1} \right)^2 = \frac{\bar{c}_1}{\rho_1} = \frac{c_1 (1 + \chi_1^2)}{\rho_1} \tag{2.10}$$

В соотношениях для всех парциальных волн продольные волновые числа ρ и частоты ω выбраны одинаково, что следует из граничных условий, которые должны выполняться в любой точке границы $x_2 = 0$ и в любой момент времени t . Ясно, что s_1 является фазовой скоростью распространения электроупругих волн в пьезоэлектрике. Для объемных (однородных) электроупругих волн имеем:

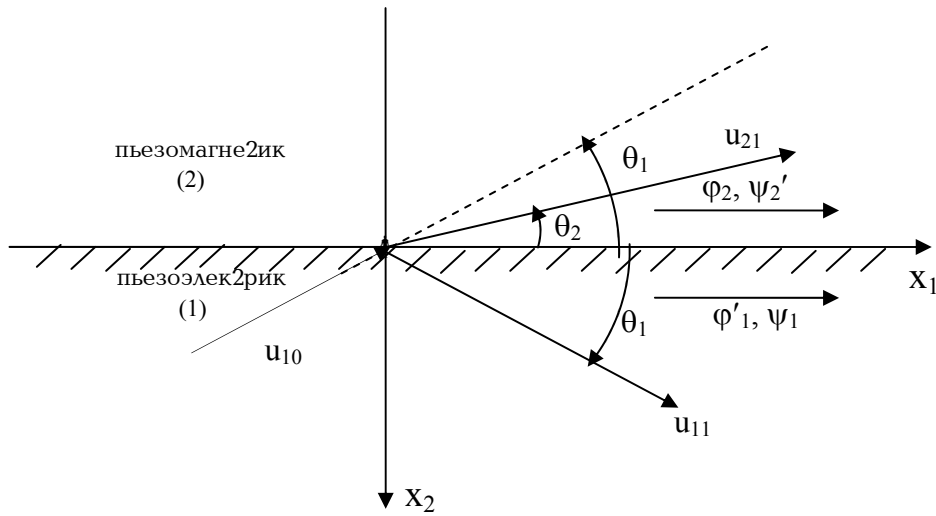
$$q_1 = \mp q_{10} = \mp \sqrt{\frac{\omega^2}{s_1^2} - p^2} \tag{2.11}$$

Пусть θ_1 обозначает угол скольжения падающей волны, т.е. угол между волновым вектором $\vec{k}_1(p, q)$ и положительным направлением оси Ox_1 (фиг.2).

Тогда будем иметь

$$p = k_1 \cos \theta_1, \quad q_1 = -k_1 \sin \theta_1 = -p \operatorname{tg} \theta_1 = -q_{10} \tag{2.12}$$

где $k_1 = \sqrt{p^2 + q_1^2}$ – волновое число, q_{10} определяется по (2.11). Следовательно, $q_1 = -q_{10}$ – поперечное волновое число падающей волны, а $q_1 = q_{10}$ – зеркально отраженной (фиг.2).



Фигэ 2

Второе и третье соотношения из (2.9) определяют поперечные волновые числа электростатических и магнитостатических колебаний в пьезоэлектрике

$$q_2 = \pm i|p|, \quad q_3 = \pm i|p| \quad (2.13)$$

Этим значениям волновых чисел соответствуют неоднородные плоские волны, которые распространяются по направлению оси Ox_1 вдоль границы раздела сред.

Эти решения имеют физический смысл при верхних знаках в (2.13) и экспоненциально убывают вглубь пьезоэлектрика с удалением от границы (при нижних знаках решения нарастают вглубь пьезоэлектрика и должны быть отброшены). Таким образом, неоднородные электро-магнитостатические колебания в пьезоэлектрике фактически существуют лишь в некотором слое, примыкающем к поверхности раздела и распространяются вдоль границы раздела. По этой причине они называются сопутствующими поверхностными волнами (СПВ) [4]. Таким образом, падение электроупругой волны из объема пьезоэлектрической среды на границу раздела сопровождается возникновением зеркально отраженной электроупругой волны и сопутствующей поверхностной электро-магнитостатической волной. Следовательно, в пьезоэлектрике волновое поле будет складываться из вышеуказанных волн:

$$u_1 = u_{10} + u_{11}, \quad \varphi_1 = \varphi_1' + \bar{e}_1(u_{10} + u_{11}), \quad \psi_1 = \psi_1 \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} u_{10} &= \tilde{u}_{10} e^{i(px_1 + q_{10}x_2 - \omega t)}, & u_{11} &= \tilde{u}_{11} e^{i(px_1 - q_{10}x_2 - \omega t)} \\ \varphi_1' &= \tilde{\varphi}_1' e^{i(px_1 - \omega t)} e^{-|p|x_2}, & \psi_1 &= \tilde{\psi}_1 e^{i(px_1 - \omega t)} e^{-|p|x_2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Вторая формула из (2.14) показывает, что электростатическое поле в пьезоэлектрике складывается из электрических полей падающей, зеркально отраженной и сопутствующей поверхностной волн.

Аналогично исследуется волновой процесс в пьезомагнетике (в области $x_2 < 0$). Волновое поле складывается из преломленной и электро-магнитостатической волн:

$$u_2 = u_{21}, \quad \Psi_2 = \Psi'_2 + \bar{b}_2 u_{21}, \quad \Phi_2 = \Phi_2 \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} u_{21} &= \tilde{u}_{21} e^{i(px_1 + q_{20}x_2 - \omega t)} \\ \Psi'_2 &= \tilde{\Psi}'_2 e^{i(px_1 - \omega t)} e^{|p|x_2} \\ \Phi_2 &= \tilde{\Phi}_2 e^{i(px_1 - \omega t)} e^{|p|x_2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$q_{20} = \sqrt{\frac{\omega^2}{s_2^2} - p^2} \quad s_2^2 = \left(\frac{\omega}{k^2}\right)^2 = \bar{c}_2 / \rho_2 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} p &= k_2 \cos \theta_2, \quad q_2 = -k_2 \sin \theta_2 = -p \operatorname{tg} \theta_2 = -q_{20} \\ k_2^2 &= p^2 + q_2^2 \end{aligned}$$

s_2 – фазовая скорость распространения магнитоупругих объемных волн в пьезомагнетике, k_2 – волновое число преломленной волны, θ_2 – угол скольжения этой волны.

Как следует из (2.16), в пьезомагнетике магнитостатическое поле складывается из магнитных полей преломленной и сопутствующей поверхностной волн.

Неизвестные амплитуды $\tilde{u}_{11}, \tilde{\Phi}'_1, \tilde{\Psi}_1, \tilde{u}_{21}, \tilde{\Psi}'_2, \tilde{\Phi}_2$ (а также амплитуды $\tilde{\Phi}_{10} = \bar{e}_1 \tilde{u}_{10}$, $\tilde{\Phi}_{11} = \bar{e}_1 \tilde{u}_{11}$, $\tilde{\Psi}_{21} = \bar{b}_2 \tilde{u}_{21}$) находятся при удовлетворении граничных условий (2.6):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{10} + \tilde{u}_{11} &= \tilde{u}_{21}, \quad \tilde{\Psi}_1 = \tilde{\Psi}'_2 + \bar{b}_2 \tilde{u}_{21} \\ i\bar{c}_1 q_{10} (\tilde{u}_{11} - \tilde{u}_{10}) + e_1 |p| \tilde{\Phi}'_1 &= i\bar{c}_2 q_{20} \tilde{u}_{21} - b_2 |p| \tilde{\Psi}'_2 \\ \tilde{\Phi}'_1 + \bar{e}_1 (\tilde{u}_{10} + \tilde{u}_{11}) &= \tilde{\Phi}_2 \\ \varepsilon_1 \tilde{\Phi}'_1 &= -\varepsilon_2 \tilde{\Phi}_2, \quad \mu_1 \tilde{\Psi}_1 = -\mu_2 \tilde{\Psi}'_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Решая систему (2.19) и принимая во внимание (2.12) и (2.18), приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\tilde{u}_{11}}{u_{10}} = \frac{\sin \theta_1 - r \sin \theta_2 + i\chi |\cos \theta_1|}{\sin \theta_1 + r \sin \theta_2 - i\chi |\cos \theta_1|} \\ T &= \frac{\tilde{u}_{21}}{\tilde{u}_{10}} = 1 + R = \frac{2 \sin \theta_1}{\sin \theta_1 + r \sin \theta_2 - i\chi |\cos \theta_1|} \\ \tilde{\Phi}'_1 &= -\frac{\varepsilon_2 \bar{e}_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} T \tilde{u}_{10}, \quad \tilde{\Psi}_1 = \frac{\mu_2 \bar{b}_2}{\mu_1 + \mu_2} T \tilde{u}_{10} \\ \tilde{\Phi}_2 &= \frac{\varepsilon_1 \bar{e}_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} T \tilde{u}_{10}, \quad \tilde{\Psi}'_2 = -\frac{\mu_1 \bar{b}_2}{\mu_1 + \mu_2} T \tilde{u}_{10} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь приняты обозначения:

$$r = \frac{\bar{c}_2 k_2}{\bar{c}_1 k_1} = \sqrt{\frac{\bar{c}_2 \rho_2}{\bar{c}_1 \rho_1}} \quad (2.21)$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_2 e_1 \bar{e}_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \bar{c}_1} + \frac{\mu_1 b_2 \bar{b}_2}{(\mu_1 + \mu_2) \bar{c}_1}$$

Легко можно найти также амплитуды потенциалов $\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Psi_{21}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{10} &= \bar{e}_1 \tilde{u}_{10}, \quad \tilde{\Phi}_{11} = \bar{e}_1 \tilde{u}_{11} = \bar{e}_1 R \tilde{u}_{10} \\ \tilde{\Psi}_{21} &= \bar{b}_2 \tilde{u}_{21} = \bar{b}_2 T \tilde{u}_{10} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Таким образом, при падении электроупругой волны из пьезоэлектрика на границу раздела с пьезомагнетиком возникают: в пьезоэлектрике – зеркально отраженная электроупругая волна, в пьезомагнетике – преломленная магнитоупругая волна, в обеих средах в некотором слое, примыкающем к поверхности раздела – поверхностная электромагнитостатическая волна.

Обсудим полученные результаты. Углы скольжения падающей и преломленной волн связаны соотношением:

$$\cos \theta_2 = s_2 s_1^{-1} \cos \theta_1 \quad (2.23)$$

где величина s_2/s_1 играет роль показателя преломления. При $\theta_2 = 0$ получаем соотношение, определяющее критический угол скольжения падающей волны:

$$\cos \theta_1^* = \frac{s_1}{s_2} \quad \text{или} \quad \theta_1^* = \arccos \frac{s_1}{s_2} \quad (2.24)$$

Так как $\cos \theta_1^*$ не может быть больше единицы, то должно быть $s_1 < s_2$. При углах скольжения падающей волны, больших критического, должно иметь место полное внутреннее отражение, т.е. коэффициент отражения R по модулю равен единице. Как видно из (2.24), оба пьезоэффекта меняют величину критического угла θ_1^* постольку, поскольку перенормируют скорости электроупругих и магнитоупругих волн.

Другая особенность задачи состоит в том, что коэффициенты отражения и преломления – комплексные величины даже при углах скольжения, меньших критического угла скольжения θ_1^* . Это означает, что на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей волны. Если показатель преломления меньше единицы, то условия прозрачности существенно ужесточаются по сравнению с условиями чисто упругой задачи, так как коэффициент отражения R при наличии пьезоэффектов – комплексная величина и должны обращаться в нуль одновременно его действительная и мнимая части. Можно также исследовать вопрос об усилении электромагнитного поля вблизи границы раздела сред.

Аналогично можно решать задачу отражения и преломления, когда из пьезомагнетика, занимающего область $x_2 > 0$, на границу раздела $x_2 = 0$ падает плоская магнитоупругая волна. Более того, решение этой задачи можно построить, непосредственно исходя из решения предыдущей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. N1. С.12-19.
2. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков. //Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. N3-4. С.78-82.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. //Материалы Всесоюз. науч. семинара. Ереван: 1991. С.49-54.
4. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука. 1982. 240с.
5. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Гараков В.Г. Распространение магнитоупругих волн в пьезомагнитном полупространстве. //Материалы III Всесоюз. симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван: Изд. ЕГУ. 1984. С.22-25.
6. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Гараков В.Г. Сдвиговые поверхностные магнитоупругие волны в анизотропном пьезомагнитном полупространстве. //Материалы II Всесоюз. Н-Т-К «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Ереван: Изд. ЕГУ. 1984. Т.1. С.92-96.
7. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Саноян Л.А. Отражение сдвиговых магнитоупругих волн от свободной границы пьезомагнитного полупространства. //Механика, межвуз. сб. науч. трудов. вып. 5. Ереван. 1986. С.102-109.
8. Даноян З.Н., Гараков В.Г. Существование сдвиговых поверхностных волн на границе раздела пьезоэлектрик-пьезомагнетик. //Материалы IV симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван: Изд. ЕГУ. 1989. С.67-72.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.09.2005