ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №4, 2006 Механика

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА ТИПА ЛЯВА ДЛЯ СЛОЯ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПО ТОЛЩИНЕ

Мхитарян А.М., Погосян Н.Д., Терзян С.А.

Ա.Մ. Մխիթարյան, Ն.Ջ. Պողոսյան, Ս.Ա. Թերզյան

Լյավի տիպի մակերևույթային ալիքն ըստ հաստության էքսպոնենցիալ անհամասեռ շերտի համար

Հետազոտվում է մակերևույթային լայնական առաձգական ալիքների տարածման բնույթն անհամասեռ շերտ-կիսատարածություն համակարգում: Ուսումնասիրվում են մակերևույթային ալիքների գոյության պայմանները:

A.M. Mkhitaryan, N.D. Poghosyan, S.A. Terzyan

The Love Type Surface Wave for the Layer with Exponential Non-Homogeneity along the Thickness

The propagation character of the surface shear elastic waves in the system of non-homogeneous layer–semispace is investigated. The conditions of the surface waves existence are determined.

Исследуется характер распространения поверхностных сдвиговых упругих волн в системе неоднородный слой–полупространство. Устанавливаются условия существования поверхностных волн.

Задаче распространения поверхностных сдвиговых волн типа Лява посвящены многочисленные статьи. Из них непосредственную связь с настоящей работой имеют [1-4].

1. Пусть упругое полупространство занимает область $-\infty<x<\infty$, $0<y<\infty$, $\infty<z<\infty$. Полупространство скреплено со слоем, занимающим область $-\infty<x<\infty$, $-h\leq y<0$. Рассматривается задача антиплоской деформации, т.е. вектор упругих перемещений представляется в виде

$$\bar{u}=\left[0,0,w(x,y,t)\right] \tag{1.1}$$

Далее величины, относящиеся к слою, будут отмечены индексом 1, а величины, относящиеся к полупространству, – индексом 2.

Предполагается, что модуль сдвига и плотность слоя меняются по толщине по закону

$$\rho=\rho_1 e^{\alpha\cdot y},\ \mu=\mu_1 e^{\alpha\cdot y} \tag{1.2}$$

В этом случае уравнение распространения чисто сдвиговых волн в слое имеет вид

$$c_{t1}{}^2(\Delta w_1+\alpha\frac{\partial w_1}{\partial y})=\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2},\ c_{t1}^2=\frac{\mu_1}{\rho_1} \tag{1.3}$$

Уравнением волн сдвига в полупространстве с постоянными модулем сдвига μ_2 и плотностью ρ_2 будет

$$c_{t2}^2 \Delta w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \; c_{t1}^2 == \frac{\mu_2}{\rho_2} \tag{1.4}$$

На границе контакта слоя и полупространства принимаются условия непрерывности перемещения и касательного напряжения

$$w_1 = w_2, \; \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} \tag{1.5}$$

или, с учетом закона Гука, $\mu_1 \partial w_1 / \partial y = \mu_2 \partial w_2 / \partial y$ при $y = 0$. (1.6)

На внешней границе слоя задаются условия упругого закрепления

$$w_1 + \beta \partial w_1 / \partial y = 0 \text{ при } y = -h \tag{1.7}$$

Из (1.7) при $\beta = 0$ получается условие закрепления, а при $\beta \to \infty$ – условие свободной от нагрузки внешней границы слоя.

Требуется найти решение уравнений (1.3), (1.4), удовлетворяющее граничным условиям (1.6), (1,7) и условию затухания

$$\lim_{y \to \infty} w_2 = 0 \tag{1.8}$$

В частном случае $\beta \to \infty, \alpha = 0$, приведенная задача совпадает с классической задачей Лява [5].

2. Решение уравнений (1.3) и (1.4) представляются в виде гармонических волн, распространяющихся по направлению координаты x. В таком случае общее решение уравнения (1.3) будет иметь вид

$$w_1 = (A_1 e^{kp_1 y} + B_1 e^{kp_2 y}) \exp i(\omega t - kx) \tag{2.1}$$

где

$$p_{1,2} = -\frac{\alpha}{2k} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4k^2} - \theta\eta + 1} \tag{2.2}$$

Решением же уравнения (1.4), удовлетворяющего условию затухания (1.8), будет

$$w_2 = A_2 e^{-k\sqrt{1-\eta}\, y} \exp i\left(\omega t - kx\right) \tag{2.3}$$

В (2.2) и (2.3) использованы следующие обозначения:

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_{t2}^2}, \quad \theta = \frac{c_{t2}^2}{c_{t1}^2} \tag{2.4}$$

Для того чтобы решение (2.3) было затухающим, достаточно выполнение условия

$$0 < \eta < 1 \tag{2.5}$$

Подстановка (2.1) и (2.3) в граничные условия (1.6), (1.7) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно производных A_1, B_1, A_2:

$$A_1 + B_1 = A_2, \quad p_1 A_1 + p_2 B_1 = -\gamma\sqrt{1-\eta}\, A_2$$
$$(1 + k\beta p_1) A_1 e^{-kp_1 h} + (1 + k\beta p_2) B_1 e^{-kp_2 h} = 0 \tag{2.6}$$

где

$$\gamma = \mu_2 / \mu_1 \tag{2.7}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.6) приводит к уравнению, определяющему фазовую скорость η поверхностной волны

$$-(1+k\beta p_1)(\gamma\sqrt{1-\eta}+p_2)e^{-kp_1h}+(1+k\beta p_2)(\gamma\sqrt{1-\eta}+p_1)e^{-kp_2h}=0 \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) после некоторых преобразований и при условии

$$\chi^2=\theta\eta-1-\frac{\alpha^2}{4k^2}>0 \quad (2.9)$$

принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg}\chi kh=-\frac{2\chi(1-k\beta\gamma\sqrt{1-\eta})}{2[\gamma\sqrt{1-\eta}+k\beta(\theta\eta-1)]-\alpha k^{-1}(1+k\beta\gamma\sqrt{1-\eta})} \quad (2.10)$$

В частном случае $\beta\to\infty,\ \alpha=0$ из (2.10) получается общеизвестное уравнение задачи Лява

$$\operatorname{tg}\sqrt{\theta\eta-1}kh=\frac{\gamma\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{\theta\eta-1}} \quad (2.11)$$

Если же $\beta=0$, $\alpha=0$, то из (2.10) получается дисперсионное уравнение задачи Лява в случае, когда внешняя граница слоя закреплена

$$\operatorname{tg}\sqrt{\theta\eta-1}kh=-\frac{\sqrt{\theta\eta-1}}{\gamma\sqrt{1-\eta}} \quad (2.12)$$

Из (2.11) и (2.12) очевидно, что при $\theta\eta<1$, или с учетом (2.5), $\theta\le 1$, поверхностные волны не существуют, т.е. условием существования волн Лява является условие $c_{t_1}^2<c_{t_2}^2$

3. В частном случае, когда внешняя граница слоя свободна $(\beta\to\infty)$, уравнение (2.10) приводится к виду

$$\operatorname{tg}\chi kh=\frac{\chi\gamma\sqrt{1-\eta}}{\theta\eta-1-\alpha(2k)^{-1}\gamma\sqrt{1-\eta}} \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) определяет множество мод фазовой скорости в зависимости от kh. Начало каждой моды определяется равенством $n\pi$ аргумента функции также при $\eta=1$ [6].

$$(kh)_n=\sqrt{(\theta-1)^{-1}[(n\pi)^2+(\frac{\alpha h}{2})^2]} \quad (3.2)$$

При этом каждая мода при $kh\to\infty$ стремится к значению $\eta=1/\theta$, что следует из равенства нулю знаменателя правой части уравнения (3.1). Согласно (3.2), поверхностная волна указанного типа существует при условии θ>1.

В табл. 1 приводятся значения фазовой скорости первой моды $(n=0)$ в зависимости от параметров

$$\xi=kh,\ \ \varepsilon=\alpha h/2 \quad (3.3)$$

В частном случае $\theta=2,\ \gamma=1$.

Из табл. 1 видно, что неоднородность $\alpha>0(\varepsilon>0)$ приводит к уменьшению параметра η, характеризующего фазовую скорость, т.е. к усилению локализации поверхностной волны. В случае $\varepsilon=0.2$ корень $\eta=1$ появляется при $\xi=0.2$.

Таблица 1.

Зависимость параметра фазовой скорости от параметров длины волны ξ и неоднородности $\varepsilon\left(\theta=2\right)\left(\gamma=1\right)$ при $\xi=0.2$

ε \ ξ	0	0.1	0.5	0.8	1.0	1.5	(
0	1	0.99	0.856	0.766	0.723	0.650	0.05
- 0.1	–	1	0.830	0.747	0.706	0.635	0.5
- 0.2	–	–	0.821	0.731	0.690	0.625	0.5

Таким образом, моды поверхностных волн, определяемые уравнением (3.1), является обобщением волн Лява в случае неоднородного слоя вида (1.2). Однако, кроме указанных мод возможна и дополнительная мода, обусловленная наличием неоднородности.

Рассмотрим случай

$$\chi^2 < 0 \tag{3.4}$$

При условии (3.4) уравнение (3.1) принимает вид

$$\operatorname{th}\sqrt{\varepsilon^2-(\vartheta\eta-1)\xi^2}=\frac{\gamma\sqrt{1-\eta}\sqrt{\varepsilon^2-(\theta\eta-1)\xi^2}}{(\theta\eta-1)\xi+\varepsilon\gamma\sqrt{1-\eta}} \tag{3.5}$$

Как было указано ранее, в случае $\varepsilon=0$ уравнение (3.5) не имеет действительного решения. Однако при $\varepsilon\neq 0$ уравнение (3.5) имеет действительный корень. Из неравенств (2.5) и (3.4) нетрудно получить следующее необходимое условие существования корня уравнения (3.5):

$$\theta > 1+\varepsilon^2\xi^{-2} \tag{3.6}$$

Условие (3.6) можно оформить и другими способами. При заданных θ и ξ параметр, характеризующий неоднородность (ε), должен удовлетворять условию

$$|\varepsilon| < \xi\sqrt{\theta-1} \text{ или } |\alpha| < 2k < \sqrt{\theta-1} \tag{3.7}$$

При заданных θ и ε параметр, характеризующий длину волны, должен удовлетворять условию

$$\xi > |\varepsilon|\left(\theta-1\right)^{-1/2} \text{ или } 2k > |\alpha|\left(\theta-1\right)^{-1/2} \tag{3.8}$$

В табл. 2 приводятся значения безразмерного параметра фазовой скорости η дополнительной моды, соответствующей уравнению (3.5), в частном случае $\theta=2,\ \gamma=1$.

Таблица 2.

Зависимость η для дополнительной моды от ξ и $\varepsilon\left(\theta=2,\gamma=1\right)$

ε \ ξ	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1.0	1.5	∞
-0.1	–	1	0.625	0.520	0.508	0.505	0.502	0.5
-0.2	–	–	1	0.580	0.531	0.520	0.500	0.500

Как видно из табл. 2, приведенные численные результаты согласуются с необходимыми условиями (3.7).

Из неравенства (3.6) следует, что поверхностная волна при $\theta=1$ не существует. В частности, если функции модуля сдвига и плотности (1.2) непрерывны на границе контакта $y=0\left(\theta=1,\gamma=1 \text{ или } \mu_1=\mu_2,\beta_1=\beta_2\right)$, то поверхностная волна невозможна. Доказательство этого результата для общего случая положительных, монотонных функций модуля сдвига и плотности приводится в [4].

4. Пусть внешняя граница слоя закреплена. Дисперсионное уравнение задачи

получается из уравнения (2.10) подстановкой $\beta = 0$ с учетом (2.9) и обозначений (3.3)

$$\operatorname{tg}\sqrt{(\theta\eta-1)\xi^2-\varepsilon^2} = \frac{\sqrt{(\theta\eta-1)\xi^2-\varepsilon^2}}{\gamma\xi\sqrt{1-\eta}-\varepsilon} \tag{4.1}$$

В случае □=0 (для однородного слоя) уравнение (4.1) имеет решение

$$\eta = \theta^{-1} \tag{4.2}$$

Соответствующее решение для неоднородного слоя

$$\eta = \theta^{-1}\left(1+\varepsilon^2\xi^{-2}\right) \tag{4.3}$$

существенно зависит от параметра ξ и не для всех ξ удовлетворяет условию затухания (2.5). Решение (4.3) будет удовлетворять условию затухания, если параметр, характеризующий длину волны, удовлетворяет условию

$$\xi > |\varepsilon|\left(\theta-1\right)^{-1} \tag{4.4}$$

Другое существенное отличие от случая □=0 состоит в определении начала моды в зависимости от параметра ξ. Из (4.1) следует, что обобщение на случай неоднородного слоя возможно только при условии $\varepsilon < 0$ в виде

$$(kh)_n = \frac{1}{\sqrt{\theta-1}}\sqrt{(\frac{2n-1}{2}\pi)^2+\varepsilon^2(1+\frac{\theta}{\gamma^2})} \tag{4.5}$$

Наконец, в случае $\chi^2 < 0$ уравнение (4.1) приводится к виду

$$\operatorname{th}\sqrt{\varepsilon^2-(\theta\eta-1)\xi^2} = -\frac{\sqrt{\varepsilon^2-(\theta\eta-1)\xi^2}}{\gamma\xi\sqrt{1-\eta}-\varepsilon} \tag{4.6}$$

Чтобы уравнение (4.6) имело решение, очевидно, необходимо выполнение условия $\varepsilon < 0$. Если использовать приближение для случая малого аргумента функции th, то можно получить условие существования в виде

$$\varepsilon < -1 \tag{4 .7}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Mangin G.A. Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization // Advances in Applied Mechanics. 1983. V.23. P.373-374.
2. Белубекян М.В. Об условиях существования волн Лява с неоднородным слоем //. Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т.44. № 3. С.7-10.
3. Саакян С.Г., Варданян И.А. Сдвиговые поверхностные волны в некоторых вертикально-неоднородных упругих средах // Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. № 1. С.40-44.
4. Белубекян М.В., Казарян К.Б. К вопросу существования ПСВ в неоднородном упругом полупространствет // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 1. С.6-12.
5. Новацкий В. Теория упругости // М.: Мир, 1975. 872с.
6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
01.06.2006