ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №4, 2006 Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ВНУТРЕННЕМУ ИЛИ ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙ ИЛИ СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКЕ НА ДРУГОМ КОНТУРЕ

Алексанян Д.Р.

Դ.Ռ. Ալեքսանյան
Ներքին կամ արտաքին եզրերով ամրակցված օղակաձև սալի կայունության խնդիրը, երբ մյուս եզրի վրա ազդում է ձգող կամ սեղմող հավասարաչափ բաշխված բեռ

Դիտարկված է շրջանային օղակձև սալի կայունության խնդիրը, երբ սալի եզրերից մեկը միջին հարթության մեջ ամրացված է, իսկ մյուս եզրով սալը ենթարկված է շառավղի ուղղությամբ ձգող կամ սեղմող հավասարաչափ բշխված ուժերի ազդեցության: Սալի նյութի Պուասոնի գործակցից, սալի երկրաչափական պարամետրերից և ազդող ուժերի բնույթից կախված դիտարկված են օղակային սալի հարթ ձևի կայունության, ինչպես նաև կայունության կորուստի հնարավոր դեպքերը: Վերջին դեպքում որոշված են սալի ընդլայնական տեղափոխությունները:

D.R. Aleksanyan
The stability problem of the circular ring plate jammed on internal or external contours under the evenly distributed stretching or compressing load influences on the other contour.

Рассмотрена задача устойчивости круговой кольцевой пластинки, когда одна из границ пластинки защемлена в срединной плоскости, а другая граница подвержена действию равномерно распределенных растягивающих или сжимающих радильных сил.

В зависимости от значения коэффициента Пуассона материала пластинки, геометрических параметров пластинки и характера действующих сил рассмотрены возможные случаи устойчивости и также случаи потери плоской формы кольцевой пластинки. В последнем случае определены поперечные перемещения пластинки.

Рассматривается однородная кольцевая пластинка толщиной h, внутренний контур $r = c$ которой (или внешний $r = a$) защемлен, а другой контур нагружен равномерно распределенной растягивающей или сжимающей силой P в срединной плоскости пластины.

1. Единственное отличное от нуля составляющее вектора перемещения и радиального направления осесимметричного плоского напряженного состояния и эквивалентные напряжениям усилия определяются формулами [1-2]

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r}$$
$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) \qquad c \le r \le a \tag{1.1}$$
$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right), \qquad N_{r\theta} = 0$$

где E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки.

На контурах $r = c$ и $r = a$ имеются следующие граничные условия:

$$U\Big|_{r=c} = 0\,, \qquad N_r\Big|_{r=a} = P_2 \tag{1.2}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2), на основании (1.1) для внутренних усилий получим следующие соотношения:

$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[c_1(1+\nu) - \frac{c_2}{r_2}(1-\nu)\right] = \frac{P_2}{1+\ell^2\nu^*}\left(1+\nu^*\frac{c^2}{r^2}\right)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[c_1(1+\nu) + \frac{c_2}{r_2}(1-\nu)\right] = \frac{P_2}{1+\ell^2\nu^*}\left(1-\frac{\nu^* c^2}{r^2}\right) \tag{1.3}$$

где

$$\ell = \frac{c}{a} < 1, \qquad \nu^* = \frac{1-\nu}{1+\nu} < 1$$

Очевидно, что при $P_2 > 0$, когда внутренние усилия положительны, плоская форма равновесной пластинки устойчива. В случае $P_2 < 0$ внутренние усилия отрицательны и возможна потеря плоской формы пластинки.

При $P_2 = -P$, $P > 0$ поперечное перемещение пластинки определяется из уравнения

$$\Delta\Delta w + \frac{P}{(1+\ell^2\nu^*)D}\left[\left(1+\frac{\nu^* c^2}{r^2}\right)\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{c^2}{r^2}\left(1-\frac{\nu^* c^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\,\frac{dw}{dr}\right] = 0 \tag{1.4}$$

где D – цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,, \quad \Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}$$

или обозначая

$$\beta^2 = \frac{P}{(1+\ell^2\nu^*)D}\,, \qquad d^2 = \nu^* c^2$$

$$\Delta\Delta w + \beta^2\left[\left(1+\frac{d^2}{r^2}\right)\frac{dw}{d\,r} + 1\left(1-\frac{d^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\,\frac{dw}{dr}\right] = 0 \tag{1.5}$$

Замена переменной $\beta r = x$ приводит к уравнению

$$\Delta_x\Delta_x w + \left(1+\frac{\beta^2 d^2}{x^2}\right)\frac{d^2 w}{d\,x^2} + \left(1-\frac{\beta^2 d^2}{x^2}\right)\frac{1}{x}\,\frac{dw}{dx} = 0 \tag{1.6}$$

где

$$\Delta_x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}$$

Обозначая $w'(x) = z(x)$, уравнение (1.6) можно представить в виде

$$x^3 z''' + 2x^2 z'' - x(\xi^2 - x^2)z' + (\xi^2 + x^2)z = 0 \tag{1.7}$$

где

$$\xi^2 = 1 - \beta^2 d^2$$

После некоторых преобразований получим

$$x\left[x^2z''+xz'-(\xi^2-x^2)z\right]'-(x^2z''+xz'-(\xi^2-x^2)z=0 \tag{1.8}$$

Интегрируя (1.8), получим

$$x^2z''+xz'-(\xi^2-x^2)z=q_o x \tag{1.9}$$

общее решение которого представим в виде [3]

$$z=C_1(x)J_\xi(x)+C_2(x)Y_\xi(x) \tag{1.10}$$

где $J_\xi(x)$ и $Y_\xi(x)$ – функции Бесселя первого и второго родов, а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются методом вариации произвольных постоянных.

Для перемещения $w(x)$ получим

$$\begin{aligned} w &= \int\left[\overline{C}_1 J_\xi(x)+\overline{C}_2 Y_\xi(x)\right]dx+ \\ &+\frac{\pi q_o}{2}\int\left[Y_\xi(x)\int J_\xi(x)dx-J_\xi(x)\int Y_\xi(x)dx\right]dx+C_o \end{aligned} \tag{1.11}$$

2. В случае, когда внешний контур пластинки $r=c$ нагружен равномерно распределенной нагрузкой P_1, имеем

$$U\big|_{r=a}=0_1 \qquad N_r\big|_{r=c}=P_1$$

$$N_r=\frac{P_1}{1+\overline{\ell}^2\nu^*}\left(1+\frac{\nu^*a^2}{r^2}\right), \quad c\le r\le a$$

$$N_\theta=\frac{P_1}{1+\overline{\ell}^2\nu^*}\left(1-\frac{\nu^*a^2}{r^2}\right), \quad N_{r\theta}=0 \tag{2.1}$$

где

$$\overline{\ell}=\frac{a}{C}>1$$

Из (2.1) следует, что при $P_1>0 \quad N_r>0 \quad \forall r\in[c,a]$, а N_θ может быть знакопеременным в зависимости от значений параметров $c,\ a,\ a^2\ \nu^*$.

а) Если $a^2\ \nu^*<c^2$, то $r^2-a^2\ \nu^*>0$ для $\forall r\in[c,a]$, т. е пластинка достаточно “узкая”, тангенциальное усилие $N_\theta>0$ и потеря устойчивости пластинки невозможны.

б) Если $c^2<a^2\ \nu^*<a^2$, усилие $N_\theta<0$, при $c^2<r^2<a^2\ \nu^*$, а при $a^2\nu^*<r^2<a^2 \quad N_\theta>0$, т. е. в окрестности внутреннего и внешнего контуров возникают зоны сжатия и растяжения, что указывает на возможность потери устойчивости плоской формы пластинки.

Из (2.1) следует также, что при $P_1<0 \quad N_r<0 \quad \forall r\in[c,\ a]$, а N_θ может быть знакопеременным:

а) если $a^2\nu^*<c^2$, то $r^2-a^2\nu^*>0 \qquad \forall r\in[c,\ a], \qquad N_\theta<0$

б) если $c^2 < a^2\nu^* < a^2$ $\quad N_\theta > 0$ при $c^2 < r^2 < a^2\nu^*$, а при $a^2\nu^* < c^2 < a^2$ $\quad N_\theta < 0$.

Поперечное перемещение пластинки w при $P_1 > 0$ удовлетворяет уравнению

$$D\Delta w = \frac{P_1}{1+\overline{\ell}^2\nu^*}\left[\left(1+\frac{\nu^* a^2}{r^2}\right)\frac{d^2 w}{dr^2} + \left(1-\frac{a^2\nu^*}{r^2}\right)\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] \tag{2.2}$$

$$(P_1 > 0, \quad c \le r \le a, \quad c^2 < a^2\nu^* < a^2)$$

Уравнение (2.2) представим в виде

$$\Delta\Delta w - \beta_1^2\left(1+\frac{d_1^2}{r^2}\right)\frac{d^2 w}{d r^2} - \left(1-\frac{d_1^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\,\frac{d\,w}{d\,r} = 0 \tag{2.3}$$

где

$$\beta_1^2 = \frac{P_1}{(1+\overline{\ell}^2\nu^*)D}, \quad d_1^2 = \nu^* a^2$$

После замены переменной $\beta_1 r = x_1$ уравнение (2.3) примет вид

$$\Delta_x\Delta_x w - \left(1+\frac{\beta_1^2 d_1^2}{x_1^2}\right)\frac{d^2 w}{d\,x_1^2} - \left(1-\frac{\beta_1^2 d_1^2}{x_1^2}\right)\frac{1}{x_1}\,\frac{d\,w_1}{d\,x_1} = 0 \tag{2.4}$$

Обозначая $w'(x_1) = z(x_1)$, получим

$$x_1\left[x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2)z\right]' - \left[x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2)z\right] = 0 \tag{2.5}$$

где

$$\eta^2 = 1+\beta_1^2 d_1^2$$

Интегрируя (2.5), получим

$$x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2)z = Cx_1 \tag{2.6}$$

общее решение которого представим в виде

$$z = C_1(x_1)I_\eta(x_1) + C_2(x_1)K_\eta(x_1) \tag{2.7}$$

где $I_\eta(x_1)$, $K_\eta(x_1)$ –цилиндрические функции мнимого аргумента с вещественным индексом η.

Для поперечного перемещения w получим

$$\begin{aligned} w = \overline{C}_o &+ \int\left[\overline{C}_1 I_\eta(x_1) + \overline{C}_2 K_\eta(x_1)\right]dx_1 + \\ &+ C\int\left[I_\eta(x_1)\int K_\eta(x_1)d\,x_1 - K_\eta(x_1)\int I_\eta(x_1)dx_1\right]d\,x_1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

В случае сжимающей внешней нагрузки $P_1 < 0$ $\quad w(r)$ удовлетворяет уравнению

$$D\,\Delta\Delta w + \frac{|P_1|}{1+\overline{\ell}^2\nu^*}\left[\left(1+\frac{\nu^* a^2}{r^2}\right)\frac{d^2 w}{d\,r^2} + \left(1-\frac{\nu^* a^2}{r^2}\right)\frac{d\,w}{d\,r}\right] = 0$$

или

$$\Delta\Delta w+\beta_1^2\left[\left(1+\frac{d_1^2}{r^2}\right)\frac{d^2w}{dr^2}+\left(1-\frac{d_1^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\,\frac{dw}{dr}\right]=0 \qquad (2.9)$$

где

$$\beta_1^2=\frac{\left|\overline{P}_1\right|}{(1+\overline{\ell}^2\nu^*)D} \qquad d_1=a^2\nu^*$$

Полученное уравнение можно привести к виду

$$x_1^3z''+2x_1^2z''-x_1z'+z+x_1^3z'+\beta_1^2d_1^2x_xz'+x_1^2z-\beta_1^2d_1^2x_xz=0 \qquad (2.10)$$

где

$$x_1=\beta_1r\,, \qquad z=w'$$

После некоторых преобразований получим уравнение

$$x_1\left[x_1^2z''+x_1z'-(\xi_1^2-x_1^2)z\right]'-\left[x_1^2z''+x_1z'-(\xi_1^2-x_1^2)z\right]=0 \qquad (2.11)$$

где

$$\xi_1^2=1-\beta_1^2d_1^2$$

Интегрируя (2.11), будем иметь

$$x_1^2z''+x_1z'-(\xi_1^2-x_1^2)z=\overline{H}_0x_1 \qquad (2.12)$$

Общее решение (2.12) представим в виде

$$z=C_1(x_1)J_{\xi_1}(x_1)+C_2(x)Y_{\xi_1}(x_1) \qquad (2.13)$$

где $J_{\xi_1}(x_1)$; $Y_{\xi_1}(x_1)$–функции Бесселя первого и второго родов, $C_1(x_1)$, $C_2(x_1)$ определяются методом вариации постоянных.

Для прогиба w получим формулу

$$w=\int\left[C_1J_{\xi1}(x_1)+C_2Y_{\xi1}(x_1)\right]dx_1+\frac{\pi H_o}{2}\int\left[Y_{\xi1}(x_1)\int J_{\xi1}(x_1)dx_1-\right.$$
$$\left.-J_{\xi_1}(x_1)\int Y_{\xi_1}(x_1)\,dx_1\right]dx_1+E_o \qquad (2.14)$$

Для функции $w(x_1)$ рассмотрим следующие случаи граничных условий:

1. Контур $r=a$ защемлен , а контур $r=c$ свободен:

$$w\big|_{r=a}=0\,, \qquad \frac{dw}{dr}\Big|_{r=a}=0$$

$$M_r\big|_{r=c}=0\,, \qquad Q_r\big|_{r=c}=0$$

2. Контур $r=a$ шарнирно закреплен, а контур $r=c$ свободен.

В этом случае только второе из уравнений (2.15) заменяется условием $M_r=0$ при $r=a$, а другие остаются без изменения.

Изгибающие моменты и поперечные силы выражаются при помощи функции прогиба w формулами

$$M_r = -D\left(\frac{d^2 w}{d r^2} + \nu \frac{1}{2}\frac{dw}{d r}\right), \quad Q_r = -D\frac{d}{d r}(\Delta w) \tag{2.16}$$

Используя обозначение $\beta_1 r = x_1$ и $w'(x) = z(x_1)$ представим (2.16) в виде [4]

$$M_r = -D\beta_1^2\left[z' + \frac{1}{x_1}z\right], \quad Q_r = -D\beta_1^3\left[z'' + \frac{1}{x_1}z' - \frac{1}{x_1^2}z\right] \tag{2.17}$$

Соответственно с этим граничные условия (2.15) преобразуются к виду

$$w\big|_{x_1=\beta_1 a} = 0, \quad z\big|_{x_1=\beta_1 a} = 0$$

$$x_1 z' + \nu z\big|_{x_1=\beta_1 c} = 0, \quad x_1^2 z'' + x_1 z' - z\big|_{x_1=\beta_1 c} = 0 \tag{2.18}$$

Функции $z(x_1)$ и $w(x_1)$ удобно представить в виде

$$z(x_1) = C_1 J_{\xi_1}(x_1) + C_2 Y_{\xi_1}(x_1) + \frac{\pi H_o}{2}\left[Y_{\xi_1}(x_1)\int_{\beta_1 a}^{x_1} J_{\xi_1}(x_2)d\,x_2 - \right.$$

$$\left. - J_{\xi_1}(x_1)\int_{\beta_1 a}^{x_1} Y_{\xi_1}(x_2)d\,x_2\right]$$

$$w(x_1) = \int_{\beta_1 a}^{x_1}\left\{C_1 J_{\xi_1}(x) + C_2 Y_{\xi_1}(x) + \frac{\pi H_o}{2}\left[Y_{\xi_1}(x)\int_{\beta_1 a}^{x} J_{\xi_1}(x_2)d\,x_2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - J_{\xi_1}(x)\int_{\beta_1 a}^{x} Y_{\xi_1}(x_2)d\,x_2\right]\right\}dx + E_o \tag{2.19}$$

Удовлетворив граничным условиям (2.18), на основе (2.19) для неопределенных постоянных C_1, C_2, E_o, H_o получим следующую систему линейных однородных уравнений(

$$E_o = 0$$

$$C_1 J_{\xi_1}(\beta_1 a) + C_2 Y_{\xi_1}(\beta_1 a) = 0$$

$$C_1 J'_{\xi_1}(\beta_1 c) + C_2 Y_{\xi_1}(\beta_1 c) + \frac{\pi H_o}{2}\left[Y'_{\xi_1}(\beta_1 c)\int_{\beta_1 a}^{\beta_1 c} J'_{\xi_1}(x_2)d\,x_2 - \right.$$

$$\left. - J'_{\xi_1}(\beta_1 c)\int_{\beta_1 a}^{\beta_1 c} Y_{\xi_1}(x_2)d\,x_2\right] + \frac{H_o \nu}{\beta_1^2 a^2 (1 + \overline{\ell}^2 \nu^*)} = 0$$

$$C_1 J_{\xi_1}(\beta_1 c) + C_2 Y_{\xi_1}(\beta_1 c) + \frac{\pi H_o}{2}\left[Y_{\xi_1}(\beta_1 c)\int_{\beta_1 a}^{\beta_1 c} J_{\xi_1}(x_2)\,d\,x_2 - \right.$$

$$\left. - J_{\xi_1}(\beta_1 c)\int_{\beta_1 a}^{\beta_1 c} Y_{\xi_1}(x_2)\,d\,x_2 \right] - \frac{H_o}{\beta_1 c(1+\overline{\ell}^2 \nu^*)} = 0 \tag{2.20}$$

Для второго случая граничных условий будем иметь аналогичную систему уравнений относительно постоянных C_1, C_2, E_o, H_o, которую можно получить из (2.20), заменив в ней второе уравнение, третьим уравнением и заменив $\beta_1 c$ на $\beta_1 a$.

Из условия существования нетривиального решения системы (2.20) получим уравнение, определяющее интересующие нас критическое значение параметра рассматриваемой задачи устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334с.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 807с.
3. Ватсон Г. Теория бесселевых функций М.: Гостехиздат, 1949.
4. Хачатрян А. А. Об устойчивости кольцевой пластинки под действием растягивающих сил, приложенных по внутреннему контуру. // Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т. 50. №2. С.46-53.

Русско-Армянский (Славянский)
Государственный университет (РАУ)

Поступила в редакцию
31.03.2006