ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №4, 2006 Механика

УДК 539.3

О ГАРМОНИЧЕСКИХ И БИГАРМОНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Хачикян А.С.

Ա.Ս. Խաչիկյան
Հարմոնիկ և բիհարմոնիկ հավասարումների բերվող ոչ դասական եզրային պայմաններով խնդիրների մասին

Դիտարկվում են առաձգականության տեսության հարմոնիկ և բիհարմոնիկ հավասարումների բերվող խնդիրներ, երբ դիտարկվող տիրույթի մի մասի վրա եզրային պայմանները գերորոշված են, իսկ մնացած մասի վրա նրանք թերորոշված են: Ցույց է տրվում, որ ընդունված մոդելի շրջանակներում իրական ֆիզիկական խնդրի լուծումը հնարավոր չէ կառուցել առանց եզրային պայմանների որոշ լրացման:

A.S. Khachikyan
On the Problems Reduced to Harmonic and Biharmonic Equations with Nonclassic Boundary Conditions

The problems of elasticity theory reduced to harmonic and biharmonic equations are considered. It is assumed that boundary conditions on the one part of boundaries of the region being under consideration are overdetermined and on the other part they are insufficiently determined. The impossibility of the construction of real problems solutions without of some redefinition of the boundary conditions is demonstrated.

Рассматриваются гармонические и бигармонические задачи теории упругости, когда на части границы рассматриваемой области граничные условия переопределены, а на остальной части границы области они недоопределены. Показывается, что достижение решения истинной физической задачи в рамках принятой модели невозможно без некоторого доопределения граничных условий.

1. Введение

Развитие науки и техники, особенно техники наблюдений и измерений, доступность результатов спутниковых наблюдений, измерений методом GPS, томографии, ультразвуковой диагностики и других методов, часто приводит к новой ситуации в подлежащих исследованию задачах математической физики. Оказывается, что на одной части поверхности исследуемой области могут быть известны больше данных, чем требуется по классическим постановкам краевых задач, а на остальной части поверхности (данных меньше, или краевые условия вовсе не определены. Первые такие задачи рассматривались в связи с определением температуры на недоступных для измерений поверхностях [1]. Такая ситуация создается и при определении напряженного состояния земной коры, когда известны внешная нагрузка на поверхности в виде атмосферного давления и, благодаря GPS измерениям, перемещения точек поверхности [2]. Такая ситуация возникает и во многих задачах геофизики, электроразведки.

Исторически такие задачи были отнесены к классу “некорректных по Адамару” задач математической физики и даже считались лишенными физического смысла [3]. В дальнейшем были разработаны методы регуляризации, его модификации и аналоги [4 -7], которые, в принципе, помогли преодолеть вычислительные трудности при построении приближенных решений этих задач.

Проблема заключается в том, что, хотя может существовать единственное решение задачи (в определенном классе функций), не существует непрерывной зависимости решений от исходных данных. На этом основании задачу и назвали “некорректной”. В условиях практических задач исходные данные являются результатом интерполяции данных дискретных измерений или реализацией некоторых процессов и всегда известны с определенной (вообще говоря, поддающейся оценке) точностью. Аналитические или численные решения этих задач могут сколь угодно отличаться от их действительного значения. Причем, таких решений, отличающихся от истинного, очевидно, существует неограниченное количество.

Методы регуляризации позволяют строить решения (численные), непрерывно зависящие от исходных функций и, при достаточно малом значении параметра регуляризации, стремящиеся к решению исходной задачи, то есть к решению, удовлетворяющему дифференциальному уравнению и граничным условиям задачи. Однако это не означает, что эти регуляризованные решения так же, как и аналитические решения, не могут сколь угодно отличаться от истинных решений, соответствующих реальным физическим задачам. Поэтому предлагается выбрать метод регуляризации (квазиобращения) исходя из “физических соображений” [6, стр. 315], или выбросить “большие значения” искомой функции на “малой” окрестности границы области [6, стр. 230]. Какие могут быть “физические соображения” и что означают “большие значения” и “малая окрестность” в контексте решения реальной физической задачи неясно (невозможно точно сформулировать).

Рассматриваемые задачи очень разнообразны как в физическом отношении, так и в математическом. Они встречаются и для параболических, и для гиперболических, и для эллиптических уравнений. Мы рассмотрим здесь лишь уравнения эллиптического типа, имея в виду статические задачи теории упругости. Кроме того, мы избегаем строгой математической постановки задач, представляя (эвристически) на примерах суть вопроса.

Ниже мы обсуждаем отношения к искомому решению реальной физической задачи “некорректных по Адамару” аналитических решений задач для гармонических и бигармонических уравнений с неклассическими граничными условиями и соответствующих им регуляризованных решений этих задач. Во всем дальнейшем мы предполагаем, что заданные граничные значения функций таковы, что решения соответствующих задач существуют и единственны в классе L_2 функций и “некорректность” задачи заключается только в отсутствии непрерывной зависимости решений от исходных данных.

2. Построение аналитических решений

Покажем на нескольких примерах, что получение аналитических решений задач с неклассическими граничными условиями для классических областей аналогично известным решениям. В приведенных ниже задачах 1(4 интегралы сходятся в силу сделанных выше предположений о существовании единственных решений этих задач.

Задача 1. Определить гармоническую в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \le y \le b$ функцию $\Phi(x, y)$ при граничных условиях

$$\Phi = f(x), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0.$$

На границе $y = b, \quad -\infty < x < \infty$ граничные условия не определены.

Введя преобразование Фурье и функцию $\Phi(x, y)$ формулами

$$\overline{q}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\lambda x} dx, \qquad q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \operatorname{ch}\lambda y + B \operatorname{sh}\lambda y\right) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

и удовлетворяя преобразованным граничным условиям, получим

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{f} \operatorname{ch}\lambda y + \frac{\overline{g}}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y \right) e^{-i\lambda x} d\lambda .$$

Это решение существует согласно сделанным выше предположениям относительно поведения функций $f(x), \ g(x)$. Можно удостовериться, что при соответствующих граничных условиях это решение согласовано с решением с классическими граничными условиями. Аналогичное рассмотрение имеется в [9] с регуляризацией решения.

Задача 2. Определить гармоническую на полуплоскости $-\infty < x < \infty, \quad y \ge 0$ функцию $\Phi(x, y)$ при граничных условиях

$$\Phi = f(x), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x > 0.$$

На части границы полуплоскости $y = 0, \ x < 0$ граничные условия не определены.

Воспользовавшись интегральным преобразованием Меллина и полярными координатами и действуя аналогично, будем иметь

$$\overline{q}(p) = \int_{0}^{\infty} q(r) r^{p-1} dr, \qquad q(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \overline{q}(p) r^{-p} dp$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} \left(A \cos p\theta + B \sin p\theta\right) r^{-p} dp$$

$$\Phi\big|_{\theta=0} = f(r), \qquad A_1 = \overline{f}(p) = \int\limits_0^\infty f(r) r^{p-1} dr$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0} = g(r) \qquad B_1 = \frac{\overline{g}(p+1)}{p}$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)}\left[\overline{f}(p)\cos p\theta + \frac{\overline{g}(p+1)}{p}\sin p\theta\right] r^{-p} dp$$

Это решение также существует и единственно согласно сделанным выше предположениям относительно поведения функций $f(x)$, $g(x)$ и известного предположения о положении линии интегрирования (L).

Задача 3. Определить бигармоническую в полосе $-\infty < x < \infty, \quad 0 \le y \le b$ функцию напряжений $\Phi(x, y)$ при граничных условиях

$u = u_0(x), \;\; \mathrm{v} = \mathrm{v}_0(x), \;\; \sigma_{yy} = \sigma_0(x), \;\; \tau_{xy} = \tau_0(x)$ при $y = 0, \;\; -\infty < x < \infty$.

На грани $y = b$ граничные условия не определены.

Воспользуемся представлением бигармонической функции тремя гармоническими функциями Папковича-Найбера

$$2GU = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, \quad 2GV = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2$$

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 .$$

Причем, одна из трех гармонических функций может быть выбрана произвольно. Следуя [8], примем $\Phi_1 \equiv 0$. Полагая

$$2GU = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}$$

$$2GV = \chi\Phi_2 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}, \qquad \chi = 3 - 4\nu$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right]$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(A_0 \operatorname{ch}\lambda y + B_0 \operatorname{sh}\lambda y\right) e^{-i\lambda x}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(A_2 \operatorname{ch}\lambda y + B_2 \operatorname{sh}\lambda y\right) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

и удовлетворяя граничным условиям, получим

$$A_0 = -2iG\bar{U}_0\,, \quad B_0 = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} G\bar{V}_0 - \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{i\bar{\tau}_0}{\lambda}$$

$$A_2 = \frac{G\bar{V}_0}{1-\nu} - \frac{i\bar{\tau}_0}{2\lambda(1-\nu)}, \quad B_2 = \frac{\bar{\sigma}_0}{2\lambda(1-\nu)} - \frac{iG\bar{U}_0}{1-\nu}$$

Таким образом, неизвестные функции определены. Найденное решение существует при сделанных выше предположениях относительно поведения заданных в виде граничных значений функций. Можно легко проверить, что при соответствующем задании граничных функций это решение совпадает с классическим решением [8].

Задача 4. Определить бигармоническую на полуплоскости $y \geq 0$ функцию напряжений $\Phi(x, y)$ при граничных условиях

$$u = u_0(x), \quad \mathrm{v} = \mathrm{v}_0(x), \quad \sigma_{yy} = \sigma_0(x), \quad \tau_{xy} = \tau_0(x) \text{ при } y = 0, \quad 0 \leq x < \infty .$$

При $y = 0, \quad -\infty < x < 0$ граничные условия не определены.

Воспользуемся интегральным преобразованием Меллина и представлением бигармонической функции Папковича-Найбера. Пользуясь произвольностью одной из функций Папковича-Найбера и следуя [8], примем

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}$$

Представляя искомые функции в виде интегралов Меллина, удовлетворяя преобразованным граничным условиям и решая полученную алгебраическую систему, имеем

$$\Phi_0 = \frac{1}{2\pi r} \int_{(L)} \left[A_0 \cos(p-1)\theta + B_0 \sin(p-1)\theta \right] r^{1-p} dp$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \left[A_1 \cos p\theta + B_1 \sin p\theta \right] r^{-p} dp$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \left[-A_1 \sin p\theta + B_1 \cos p\theta \right] r^{-p} dp$$

$$A_0 = -\frac{1}{1+\chi} \left[2G\bar{u}_0(p) - \bar{\sigma}_0(p+1) \frac{\chi+1}{p(p-1)} \right]$$

$$A_1 = -\frac{1}{1+\chi} \left[2G\bar{u}_0(p) - \frac{\bar{\sigma}_0(p+1)}{p} \right]$$

$$B_1 = -\frac{1}{1+\chi} \left[\frac{\bar{\tau}_0(p+1)}{p} + 2G\bar{\mathrm{v}}_0(p) \right]$$

$$B_0 = -\frac{p+1}{p-1}\overline{\mathrm{v}}_0\left(p\right)\frac{2G}{1+\chi} + \frac{\overline{\tau}_0\left(p+1\right)}{p\left(p-1\right)}\frac{\chi - p}{1+p}$$

Относительно существования этого решения можно дословно повторить то, что сказано относительно решений задач 1(3.

3. О регуляризованных решениях

Отсутствие непрерывной зависимости решений от исходных данных создает большие неудобства, особенно при численном решении практических задач. Поэтому были развиты различные методы регуляризации [4-7], позволяющие построить численные решения, непрерывно зависящие от исходных данных.

Рассмотрим, в каком отношении находятся регуляризованные решения с решениями реальной физической задачи.

Задача 5. Пусть имеем прямоугольник

$$-1 < x < 1, \quad 0 < y < y_0$$

Ищем функцию $u\left(x,y\right)$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

При граничных условиях

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(x,0\right) = g\left(x\right)$$

где $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ – заданные функции.

Задача эта рассмотрена на стр. 242 [6].

Задача 5.1. Пусть при условиях задачи 5 реальному физическому процессу соответствуют точные значения граничных функций

$$f_1\left(x\right) = \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_1\log\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right] \qquad (1)$$

$$g_1\left(x\right) = -\frac{1}{x^2+1} - \frac{\varepsilon_1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1},$$ ε_1 (достаточно малая величина.

Точное, но “некорректное” решение этой задачи известно

$$u_1\left(x,y\right) = \log\left[x^2+\left(y-1\right)^2\right]^{1/2} + \varepsilon_1\log\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2\right]^{1/2} \qquad (2)$$

Задача 5.2. Пусть, снова имея условия задачи 5, в результате ошибки измерений граничные условия заданы в виде функций

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)$$
$$g_2(x) = -\frac{1}{x^2+1} \tag{3}$$

отличающихся от истинных физических значений (1) на малую величину $\varepsilon_0(\varepsilon_1)$, зависящей от точности измерений.

Точное, тоже “некорректное” решение задачи при этих граничных функциях также известно.

$$u_2(x,y) = \log\left[x^2+(y-1)^2\right]^{1/2} \tag{4}$$

Эта последняя задача подробно рассмотрена в [6]. Применением метода квазиобращения, получены численные решения, приближающиеся к $u_2(x,y)$ и непрерывно зависящие от исходных данных.

Подробное численное исследование этой задачи [6] показывает сильную зависимость точности решения от расположения относительно рассматриваемой области (прямоугольник $-1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le y_0$) точки с логарифмической особенностью.

Однако ясно, что это решение не представляет модель реального физического процесса (2).

Непрерывная зависимость построенного численного решения от исходных данных и точность решения рассматриваются относительно исходных данных (3) и решения (4), а не с истинными граничными данными (1) и описанием реального физического процесса (2). Отметим, что все сказанное останется в силе, если поменять местами (1) и (3).

При достаточно малом значении параметра регуляризации (квазиобращения) решение задачи стремится к решению (3), (4), а не к описанию реального физического процесса (1), (2). Оно может стремиться к решению (1), (2) при стремлении ошибки измерений к нулю, что нереально.

Фактически решение $u_2(x,y)$, которое аппроксимирует регуляризованное численное решение задачи, есть “некорректное” по Адамару аналитическое решение задачи. Ясно также, что варьируя положением и количеством точек с логарифмической особенностью, можно для истинной физической задачи 5.1 построить решения типа (4) в неограниченном количестве.

Таким образом, в обсуждаемых случаях (при существовании единственных решений), регуляризованные решения снимают трудности при численной реализации решения, но не решают проблему построения истенного физического решения и по сути своей равноценны “некорректным” по Адамару аналитическим решениям.

4. Заключение

Приступая к решению задачи с неклассическими граничными условиями, мы можем построить регуляризованные численные решения или построить аналитическое решение применительно к заданным (неточным) граничным условиям. Эти решения существуют и единственны по предположению, как в приведенных выше примерах, в классе L_2 функций. Вычислительные трудности, связанные с наличием особенностей для численных решений, в принципе, преодолены. В случае же аналитических решений, считаем наличие особенностей возможными, физически оправданными. Их можно интерпретировать как источники, стоки (тепла, жидкости), сосредоточенные силы и моменты, сильные концентрации напряжений и т.д.. Если же по физическим соображениям этих особенностей не должно быть, и если они дают “вклад” в заданные граничные условия в пределах “ошибки измерений”, то они могут быть просто вычтены из решения, при этом граничные условия не должны выходить за пределы известной точности измерений. При аналитических решениях с выделенными особенностями, в этом случае уточняется решение во всей области, а не только в окрестности особой точки, как в случае численных решений.

Понимание того, что регуляризованное решение не есть решение реальной (искомой) физической задачи, приводит к попыткам ее изменений. Существует множество предложений этих изменений: отбрасывание больших (бесконечных) значений в “малой” окрестности, предложение использовать “физические” соображения, предложение перерасчета данных на новый уровень (предложенный геофизиками для гравиметрической задачи).

А другие предложения изменений относятся к ограничению класса непрерывности искомых функций (C_1, C_2 и т.д.), однако, при этом возникают вопросы о существовании решений и “согласованности” исходных данных. Предложено также измерение вторых производных граничных значений.

Таким образом, можно считать, что аналитические решения (когда они существуют) типа приведенных в п. 2 и регуляризованные численные решения в физическом смысле равносильны. При этом ни один из них не гарантирует совпадение с реальным физическим решением. Каждой реализации или интерполяции дискретных данных физических измерений соответствует “свое” аналитическое решение и каждому алгоритму регуляризации соответствует “свое” решение. В обоих случаях мы можем иметь неограниченное множество разных решений.

При действительной физической реализации следует учесть, что в реальных задачах отклонения от действительных (истинных) решений могут иметь разные причины. Это, в первую очередь, зависит от того, насколько хорошо данная модель описывает исследуемый процесс, насколько верны принятые ограничения относительно среды (однородность, изотропность и т.д.), наличие в области сосредоточенных объектов (источников, стоков, сосредоточенных сил).

Естественным образом задача сводится к вопросу:

– Каким образом должны быть изменены граничные условия (в пределах ошибки измерений), чтобы полученные аналитические или регуляризованные численные решения “приближались” к истинному физическому решению,

или

– что еще должно быть задано (измерено, определено), чтобы решения (аналитические, регуляризованные численные) стремились к истинному физическому решению. Очевидно, что это может быть сделано только относительно каждой конкретной физической задачи или класса задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. К вопросу о методах определения температуры поверхности тела. // Журнал выч. мат. и матем. физ. (ВМ и МФ). 1967. Т. 7. № 4. С. 911-914.
2. Арутюнян А.Г., Тоноян В.С., Хачикян А.С. Распределение деформаций в зоне взаимодействия Аравийской и Евразиатской плит на основе данных GPS. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. № 3. С. 3-13.
3. Лавреньтев М.М. Предисловие к книге [6].
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
5. Лавреньтев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
6. Леттес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
7. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
9. Иванов В.К. Задача Коши для уравнений Лапласа в бесконечной полосе. // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. №1. С. 131-136.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
01.12.2005