ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №4, 2006 Механика

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ, КОГДА НА ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОДНО КАСАТЕЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ РАВНО НУЛЮ

Мгерян Д. Э.

Դ. Հ. Մհերյան
Տարածական մակերևութային ալիքների տարածումը, երբ կիսատարածության եզրի վրա շոշափողային տեղափոխություններից մեկը հավասար է զրոյի

Դիտարկվում է մակերևութային ալիքների տարածման եռաչափ խնդիր, տրանսվերսալ իզոտրոպ առաձգական կիսատարածությունում: Ենթադրվում է, որ կիսատարածության եզրի վրա զրոյի են հավասար նորմալ լարումը, շոշափող լարումներից մեկը և շոշափող տեղափոխություններից մեկը: Ստացվել է դիսպերսիոն հավասարում: Ստացվել են նաև մակերևութային ալիքի գոյության պայմաններ:

D. H. Mheryan
Three dimensional surface waves propagation, when at the boundary one of tangential displacements is equal to zero

The problem of propogation of elastic surface waves in a transversaly isotropic half – space is considered. At the boundary, the normal component of stresses, one of tangential stresses and one of tangential displacements are equal to zero, are supposed. The dispersion equation is obtained and conditions of existense of surface waves are obtained.

Рассматривается задача распространения упругих поверхностных волн в трансверсально-изотропном полупространстве. Предполагается, что на границе полупространства заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений. Получено дисперсионное уравнение. Показано, что в этом случае поверхностная волна обладает свойством дисперсии. Установлены также условия существования поверхностных волн.

1. В предыдущих работах рассматривались задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве с двумя вариантами условий на границе полупространства [1] и задача распространения упругих поверхностных волн в трансверсально-изотропной среде, когда на границе полупространства заданы условия равенства нулю всех трех напряжений [2].

Рассматривается трансверсально-изотропное упругое полупространство. Предполагается, что через все точки проходят параллельные плоскости упругой симметрии, в которых все направления являются упруго-эквивалентными (плоскости изотропии). Иначе говоря, в каждой точке имеется одно главное направление и бесконечное множество главных направлений в плоскости, нормальной к первому. Такое тело можно рассматривать как тело, через каждую точку которого проходит ось упругой симметрии бесконечно высокого порядка – ось вращения.

Предполагается, что плоскость, ограничивающее полупространство, является плоскостью изотропии. Ось z направлена нормально к плоскости изотропии, а оси

x и y произвольны в этой плоскости. В таком случае полупространство в прямоугольной декартовой координатной системе занимает область

$$(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 \le z < \infty).$$

Система уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид :

$$\begin{aligned}
&c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\\
&+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\\
&+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&c_{44}\Delta_2 w+c_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}\tag{1.1}$$

здесь u, v, w –проекции вектора перемещения на оси координат $x, y, z,$ соответственно, c_{ij} –пять упругих независимых констант трансверсально-изотропной среды, ρ –плотность материала, Δ_2 – двумерный оператор Лапласа.

Для касательных проекций u, v по аналогии с задачей плоской деформации [3] вводится преобразование

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad \mathrm{v}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\tag{1.2}$$

Отметим, что преобразование (1.2) было использовано также в пространственной задаче статики трансверсально-изотропного пьезоэлектрика [4].

При постановке задачи нахождения поверхностной волны необходимо удовлетворить условиям затухания

$$\lim_{z\to\infty} u=0,\quad \lim_{z\to\infty}\mathrm{v}=0,\quad \lim_{z\to\infty} w=0\tag{1.3}$$

С помощью преобразования (1.2) и с учетом условия затухания (1.3) получается:

$$\begin{aligned}
&u=-i[k_1(A_1e^{-p_1\Gamma z}+A_2e^{-p_2\Gamma z})+k_2Be^{-p_3\Gamma z}]\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y)\\
&\mathrm{v}=-i[k_2(A_1e^{-p_1\Gamma z}+A_2e^{-p_2\Gamma z})-k_1Be^{-p_3\Gamma z}]\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y)\\
&w=\frac{c_{44}\Gamma}{c_{13}+c_{44}}\left[\frac{p_1^2-\theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_1}A_1e^{-p_1\Gamma z}+\frac{p_2^2-\theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_2}A_2e^{-p_2\Gamma z}\right]\times\\
&\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y)
\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$0<\eta<\min(1,\alpha_3^{-1},\theta^{-1})\tag{1.5}$$

где $$\theta = \frac{c_{44}}{c_{11}}, \eta = \frac{\omega^2}{c_2^2 \Gamma^2}, \ \Gamma^2 = k_1^2 + k_2^2, \ \alpha_3 = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \left\{ \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \theta)\eta \pm \sqrt{\left[\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \theta)\eta\right]^2 - \alpha_2 (1-\eta)(1-\theta\eta)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$p_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \sqrt{1 - \alpha_3 \eta} \tag{1.6}$$

$$\alpha_1 = \frac{c_{33}c_{11} - c_{13}(c_{13} + 2c_{44})}{2c_{11}c_{44}}, \ \alpha_2 = \frac{c_{33}}{c_{11}}, \ c_1^2 = \frac{c_{11}}{\rho}, \ c_2^2 = \frac{c_{44}}{\rho}$$

Получение выражений (1.4) и (1.5) более подробно приводится в [2].

2. Принимается, что на плоскости, ограничивающей полупространство, заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{33} = 0, \ \sigma_{31} = 0, \ \mathrm{v} = 0 \ \text{при} \ z = 0 \tag{2.1}$$

Граничные условия (2.1) в перемещениях имеют вид:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{c_{13}}{c_{33}}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ \mathrm{v} = 0 \tag{2.2}$$

Подстановка (1.4) в граничные условия (2.2) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, B:

$$\begin{gathered}
\left[\left(1+\xi^2\right)\left(p_1^2 - \theta^{-1}\left(1-\theta\eta\right)\right) + \alpha_4 + \alpha_4\xi^2\right] A_1 + \\
+\left[\left(1+\xi^2\right)\left(p_2^2 - \theta^{-1}\left(1-\theta\eta\right)\right) + \alpha_4 + \alpha_4\xi^2\right] A_2 = 0 \\
\left[\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_1} - \alpha_5 p_1 - \alpha_5 \xi^2 p_3\right] \mathrm{A}_2 + \\
+\left[\frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_2} - \alpha_5 p_1 - \alpha_5 \xi^2 p_3\right] A_2 = 0
\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $$\xi = k_2 k_1^{-1}, \ \alpha_4 = \frac{c_{13}(c_{13} + c_{44})}{c_{33}c_{44}}, \ \alpha_5 = \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{44}} \tag{2.4}$$

3. В частном случае изотропной среды $c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu$, $c_{44} = \mu$, $c_{12} = c_{13} = \lambda$, из (1.6) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $p_1 = \sqrt{1-\theta\eta} = \upsilon_1$, $p_2 = \sqrt{1-\eta} = \upsilon_2[2]$. В этом случае система (2.3) приводится к виду:

$$\begin{gathered}
(2-\eta)\grave{A}_1 + 2A_2 = 0 \\
(2\upsilon_1\upsilon_2 + \xi^2\upsilon_2^2)A_1 + (2 - \eta + \xi^2\upsilon_2^2)A_2 = 0
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Условие равенства нулю детерминанта этой системы после некоторых преобразований имеет вид:

$$R(\xi,\eta) = (2-\eta)^2 - 4\upsilon_1\upsilon_2 - \xi^2\eta\upsilon_2^2 \tag{3.2}$$

В частном случае $\xi = 0(k_2 = 0)$, уравнение (3.2) совпадает с классическим уравнением Рэлея. Нетрудно проверить, что корню уравнения (3.2) $\eta = 0$ соответствует тривиальное решение. Исключением корня $\eta = 0$ уравнение (3.2) приводится к виду:

$$R(\xi,\eta) = \eta - \frac{4(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}+\sqrt{1-\theta\eta}} - \xi^2\upsilon_2^2 = 0 \tag{3.3}$$

$$R(0,\xi) = -(2(1-\theta)+\xi^2) < 0,\ \ R(1,\xi) = 1 > 0 \tag{3.4}$$

Таким образом, при граничных условиях (2.1) поверхностная волна всегда существует в изотропной среде.

В табл.1 приводятся значения безразмерного параметра η, определяющие фазовую скорость поверхностной волны, в зависимости от ξ для коэффициента Пуассона $\upsilon = 0,25$ $(\theta = 1/3)$

Таблица1

ξ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	4.0	10.0
η	0.8452	0.8475	0.8537	0.8627	0.8733	0.8843	0.9293	0.9575

При $\xi = 0(k_2 = 0)$ получается известное значение фазовой скорости волны Рэлея. С возрастанием ξ безразмерный параметр фазовой скорости возрастает и стремится к единице при $\xi \to \infty$.

4.Условие равенства нулю детерминанта системы (2.3) после некоторых преобразований имеет вид:

$$\overline{R}(\eta,\xi) = (p_1 - p_2)\overline{R}_1(\eta,\xi) \tag{4.1}$$

где

$$\overline{R}_1(\eta,\xi) = (1+\xi^2)[R_1(\eta) + \alpha_5 p_3(p_1+p_2)p_1p_2\xi^2] \tag{4.2}$$

где $R_1(\eta)$ есть соответствующее выражение, приведенное в задаче распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной среде [2], в случае, когда на границе полупространства заданы условия равенства нулю всех трех напряжений [2]. То есть, когда $\xi = 0(k_2 = 0)$, получаются уравнения из [2].

Обозначим:

$$T = \left[\frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_2} - \alpha_5 p_2 - \alpha_5\xi^2 p_3\right] : \left[\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_1} - \alpha_5 p_1 - \alpha_5\xi^2 p_3\right]$$

$$A_1 = -TA_2,\ \ B = A_2\xi(1-T)$$

Следовательно,

$$u = -i[k_1(-TA_2e^{-p_1\Gamma z} + A_2e^{-p_2\Gamma z}) + k_2A_2\xi(1-T)e^{-p_3\Gamma z}] \times \exp i(\omega t - k_1x - k_2y)$$

$$\mathrm{v} = -i[k_2(-TA_2 e^{-p_1\Gamma z} + A_2 e^{-p_2\Gamma z}) - k_1 A_2 \xi(1-T) e^{-p_3\Gamma z}] \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

$$w = \frac{c_{44}\Gamma}{c_{13}+c_{44}}\left[\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_1}(-T)A_2 e^{-p_1\Gamma z} + \frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_2}A_2 e^{-p_2\Gamma z}\right]\times \tag{4.3}$$

$$\times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

Из (4.3) следует, что если $p_1 = p_2$, то $u \equiv \mathrm{v} \equiv w \equiv 0$ (то есть соответствует тривиальное решение), следовательно, параметр η можно найти, решив уравнение

$$\overline{R}_2(\eta,\xi) = R_1(\eta) + \alpha_5 p_3(p_1 + p_2) p_1 p_2 \xi^2 = 0 \tag{4.4}$$

Значения функции $\overline{R}_2(\eta,\xi)$ на концах интервала [0,1] имеют вид:

$$\overline{R}_2(0,\xi) = R_1(0) + \alpha_5 p_3(p_1 + p_2) p_1 p_2 \xi^2$$

$$\overline{R}_2(1,\xi) = R_1(1)$$

Известно, что $R_1(1) < 0$[2]. Если $R_1(0) = c_{11}c_{33} - c_{13}^2 > 0$ (положительный для тех материалов, которые мы исследуем), то $\overline{R}_2(0,\xi) > 0$.

$$\overline{R}_2(\alpha_3^{-1},\xi) = R_1(\alpha_3^{-1})\ [2].$$

Для Ti (титана) условия затухания – промежуток $(0;\alpha_3^{-1})$. Из $\overline{R}_2(\alpha_3^{-1},\xi) > 0 \Rightarrow$, что уравнение $\overline{R}_2(\eta,\xi) = 0$ не имеет действительных корней в промежутке $(0;\alpha_3^{-1})$.

Для Be(бериллия) условия затухания – промежуток $(0;\alpha_3^{-1})$. Из $\overline{R}_2(\alpha_3^{-1},\xi) < 0 \Rightarrow$, что уравнение $\overline{R}_2(\eta,\xi) = 0$ имеет действительный корень в промежутке $(0;\alpha_3^{-1})$.

В табл. 2,3,4 приводятся корни уравнения $\overline{R}_2(\eta,\xi) = 0$ в интервале условия затухания для некоторых трансверсально-изотропных материалов в зависимости от ξ. Характеристики материалов взяты из монографии [5].

Таблица 2

материал	усл. затух. (1.5)	ξ (k_1/k_2)	η
ZnO(окись цинка)	(0,1)	0.0	0.9131
ZnO(окись цинка)	(0,1)	0.2	0.9141
ZnO(окись цинка)	(0,1)	0.4	0.9171
ZnO(окись цинка)	(0,1)	0.8	0.9271
ZnO(окись цинка)	(0,1)	1.0	0.9331
ZnO(окись цинка)	(0,1)	5.0	0.9921
ZnO(окись цинка)	(0,1)	10.0	0.999
ZnO(окись цинка)	(0,1)	100.0	0.99999

Таблица 3

материал	усл. затух. (1.5)	ξ (k_1/k_2)	η
Be(бериллий)	(0;0,8172)	0.0	0.7443
Be(бериллий)	(0;0,8172)	0.2	0.7474
Be(бериллий)	(0;0,8172)	0.4	0.7555
Be(бериллий)	(0;0,8172)	0.8	0.7776
Be(бериллий)	(0;0,8172)	1.0	0.7877
Be(бериллий)	(0;0,8172)	5.0	0.8170
Be(бериллий)	(0;0,8172)	10.0	0.81722
Be(бериллий)	(0;0,8172)	100.0	0.81723

Таблица 4

материал	усл. затух. (1.5)	ξ (k_1/k_2)	η
Ti(титан)	(0;0,7537)	0.0	$\varnothing$
Ti(титан)	(0;0,7537)	0.2	$\varnothing$
Ti(титан)	(0;0,7537)	5.0	$\varnothing$

При $\xi = 0$ получается нам уже известное значение для задачи [2]. С возрастанием ξ безразмерный параметр фазовой скорости возрастает и стремится к 1 для ZnO, а для Be (бериллия) стремится к 0.8172. Для Ti (титана) поверхностная волна не существует, каким бы не было ξ.

Работа выполнена при финансовой поддержке NFSAT

Литература

1. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Трехмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т. 105. N4. С. 362 –369.
2. Белубекян В. М., Мгерян Д. Э. Пространственная задача распростра нения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т. 59. N2. С. 3-9.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Wang Z., Zheng B. The general solution of the three – dimensional prob- lems in piezoelectric media.// Int. J. Solids and Structures. 1995. Vol. 32. N1. PP. 105 – 115.
5. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.:Наука, 1977. 399 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.04.2006