

УДК 539.3

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРА И ВТУЛКИ В  
РЕЖИМЕ ГРАНИЧНОГО ТРЕНИЯ**

Шекян А. Л.

Ա. Լ. Շեկյան

**Գլանի և վռանի կոնտակտային փոխազդեցությունը սահմանային շփման ռեժիմում**

Դիտարկված է իր առանցքի շուրջը պտտվող կոշտ գլանի և արտաքին եզրով ամրացված առաձգական վռանի կոնտակտային փոխազդեցության հարթ խնդիրը շփման, մաշման և շփումից անջատված ջերմության առկայությամբ: Խնդիրը բերված է ոչ գծային հավասարումների համակարգի և վերջինիս հետազոտությունը կատարված է սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա: Բերված է թվային օրինակ:

A.L. Shekyan

**The Contact interaction of cylinder and bush in conditions of boundary friction**

A plane problem of the contact interaction of uniformly rotating about its axis nondeformable cylinder with a rigidly closed up elastic bush in response to friction, wear and heat excretion from friction is considered. The problem is reduced to the solution of nonlinear equations, the examination of which follows by compressed reflecton principles. Numerical example is presented.

Рассмотрена плоская задача контактного взаимодействия вращающегося жесткого цилиндра с упругой втулкой, заземленной внешним краем с учетом трения, износа и температуры выделения от трения. Задача приведена к исследованию систем нелинейных уравнений, которые проведены с использованием принципа сжимающих отображений. Проведен численный пример.

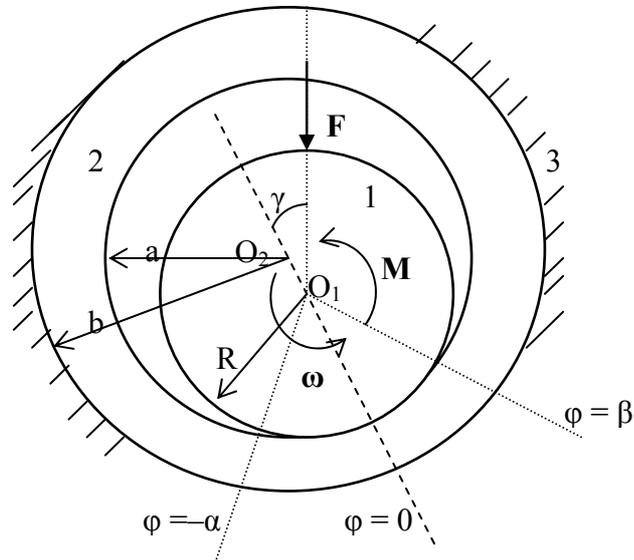
Контактным задачам в трибологии посвящены многочисленные исследования [1-7]. Повышенный интерес к задачам этой области обусловлен как математической корректностью формулировки задач и достоверностью их решения, так и применением результатов исследований в расчетах при проектировании узлов трения инженерных конструкций.

В настоящей работе проводится теоретическое исследование задачи контактного взаимодействия цилиндра и втулки в режиме граничного трения [8] с учетом факторов деформируемости, износа и тепловыделения от трения. Решение этой задачи сведено к решению замкнутой системы нелинейных уравнений и на основе принципа сжимающих отображений проведено ее полное математическое исследование. Получено приближенное аналитическое решение задачи и построены графики, отражающие ход изменений основных механических величин в зависимости от характерных параметров задачи.

**§1. Постановка задачи и вывод основных уравнений.**

Пусть длинный жесткий круговой цилиндр с радиусом  $R$  под действием внешних сил равномерно вращается вокруг своей оси и вдоль своих образующих вдавливается во внутреннюю цилиндрическую поверхность с радиусом  $a$  упругой втулки 2, заземленный по своей внешней цилиндрической поверхности с радиусом  $b$  ( $R < a < b$ ) с неподвижной недеформируемой обоймой 3 (фиг. 1). Считаем, что цилиндр и втулка находятся в режиме граничного трения [8,9] с

постоянным коэффициентом трения  $f$  и с учетом фактора износа и тепловыделения от трения.



Фиг.1

Требуется определить законы распределения нормальных и касательных контактных напряжений, действующих между телами 1 и 2, положение и размеры области контакта, меру и направление погружения цилиндра во втулку, а также потери в узле трения.

При таких предположениях условие равенства радиальных перемещений в зоне трения  $\varphi \in [-\alpha; \beta]$  имеет вид

$$U_w + U_T + U_P + U_\tau = \delta - a + \sqrt{R^2 + 2R(a - R)\cos\varphi + (a - R)^2} \quad (1)$$

где радиальные перемещения  $U_w$ ,  $U_T$ ,  $U_P$  и  $U_\tau$  обусловлены износом, температурной деформацией и упругой деформацией, возникающих от действия контактного давления  $\overline{p}(\varphi)$  и контактного касательного напряжения  $\tau(\varphi)$  соответственно,  $\delta$  – мера погружения цилиндра во втулку,  $\alpha$  и  $\beta$  – координаты, соответствующие началу и концу области трения.

Известно [7], что если угловая скорость цилиндра  $\omega > 5$  рад/с, то температурное поле в рассматриваемом узле трения близко к осесимметричному. Исходя из этого, считаем, что цилиндр и обойма находятся в однородных температурных полях с некоторыми постоянными температурами  $T_1$  и  $T_0$ , соответственно, притом рост температуры цилиндра ( $T_1 - T_0$ ) пропорционален средней мощности сил трения [7]

$$T_1 - T_0 = K_1 \omega R^2 \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) d\varphi \quad (2)$$

где  $K_1$  – температурный эквивалент мощности сил трения.

При таких предположениях закон распределения температуры  $T(r)$  радиальных температурных перемещений  $U_T(r)$  и температурных нормальных напряжений  $\sigma_T(r)$  во втулке определяются формулами [10]:

$$T(r) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, \quad a \leq r \leq b \quad (3)$$

$$U_T(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{1}{r} \int_a^r T(r) r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (4)$$

$$\sigma_T(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr + \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{C_2}{r^2} - \frac{C_1}{1-2\nu} \right) \quad (5)$$

где  $E$ ,  $\nu$  и  $\alpha_T$  –упругие постоянные и коэффициент температурного расширения материала втулки, а  $C_1$  и  $C_2$  –постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий

$$U_T(b) = 0, \quad \sigma_T(a) = 0 \quad (6)$$

Теперь, используя (3)–(6), окончательно для входящего в формулу (1)  $U_T$  получим

$$U_T = \frac{(1+\nu)(T_1 - T_0)\alpha_T a}{1-2\nu+\varepsilon} \left( \varepsilon^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\ln\varepsilon} \right) \quad (7)$$

где  $\varepsilon = a/b$ .

Перемещения, возникающие вследствие износа рабочих поверхностей тел, в случае абразивного износа определяются формулой [1]

$$U_w = K_2 \omega R \tau(\varphi) t, \quad \varphi \in [-\alpha; \beta] \quad (8)$$

где  $K_2$ –коэффициент износостойкости пары трущихся тел,  $t$ –время изнашивания.

Наконец, упругие перемещения  $U_p$  определяем на основе обобщенной гипотезы Винклера [7,11]

$$U_p = (b-a) \left[ \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} p(\varphi) \right]^m, \quad \varphi \in [-\alpha; \beta], \quad 0 < m \leq 1 \quad (9)$$

а перемещения  $U_\tau$  –на основе приближенной формулы [12]

$$U_\tau = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} R \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) \operatorname{sgn}(\varphi - \theta) d\theta, \quad \varphi \in [-\alpha; \beta] \quad (10)$$

Условия равновесия цилиндра имеют вид

$$\int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \sin(\varphi + \gamma) + \tau(\varphi) \cos(\varphi + \gamma)] d\varphi = 0 \quad (11)$$

$$R \int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \cos(\varphi + \gamma) - \tau(\varphi) \sin(\varphi + \gamma)] d\varphi = F \quad (12)$$

$$R^2 \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) d\varphi = M \quad (13)$$

где  $F$  и  $M$ –соответственно, внешняя радиальная сила и вращающий момент пары, действующие на единицу длины цилиндра, ( $\gamma$ –угол между линией действия силы

$F$  с линией, проходящей через центры  $O_1$  и  $O_2$  (фиг. 1).

При решении задачи будем пользоваться также законом Кулона

$$\tau(\varphi) = fp(\varphi), \quad \varphi \in [-\alpha; \beta] \quad (14)$$

и условиями непрерывности контактных напряжений

$$p(-\alpha) = 0, p(\beta) = 0 \quad (15)$$

Таким образом, для определения  $p(\alpha)$ ,  $\tau(\varphi)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $M$  и  $T_1$  имеются соотношения (1), (2) и (11)-(15), которые, как выясняется ниже, образуют полную систему уравнений относительно указанных неизвестных.

## §2. Исследование полученной системы уравнений

Полное математическое исследование системы уравнений задачи проводим на основе принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций [13]. Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha + \varphi}{\alpha + \beta}, q(\xi) = \frac{b-a}{R} \left[ \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} p(\varphi) \right]^m, \quad \psi = \frac{a-R}{R} \\ \lambda_1 &= \frac{(1-\nu)Ea\omega RfK_1\alpha_T}{(1-2\nu)(1-2\nu+\varepsilon^2)} \left[ \varepsilon^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{2 \ln \varepsilon} \right] \left( \frac{R}{b-a} \right)^{1/m}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{R} \\ \lambda_2 &= \frac{(1-\nu)}{2} (\alpha + \beta) \left( \frac{R}{b-a} \right)^{1/m} f, \quad \lambda_3 = \frac{(1-\nu)E\omega f t K_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{R}{b-a} \right)^{1/m} \\ F_0 &= \frac{(1-\nu)(1+\nu)F}{(\alpha + \beta)(1-\nu)RE} \left( \frac{b-a}{R} \right)^{1/m}, \quad M_0 = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)M}{(\alpha + \beta)(1-\nu)R^2 Ef} \left( \frac{b-a}{R} \right)^{1/m} \end{aligned} \quad (16)$$

Из соотношения (1) с учетом (2), (7)-(10) и (14) получим

$$\begin{aligned} q(\xi) &= \delta_0 - 1 - \psi + \sqrt{1 + 2\psi \cos[-\alpha + (\alpha + \beta)\xi] + \psi^2} - \\ &- \int_0^1 [\lambda_1 + \lambda_2 \operatorname{sgn}(\xi - \eta)] q^m(\eta) d\eta - \lambda_3 q^m(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

а условия (15) принимают вид

$$q(0) = 0, \quad q(1) = 0 \quad (18)$$

Заметим, что в трех соотношениях (17), (18) входят четыре неизвестные  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta_0$  и  $q(\xi)$ .

Учитывая это обстоятельство и структуру остальных уравнений задачи, временно, в уравнениях задачи считаем неизвестной также силу  $F$  и вместе с этим одновременно считаем заданным жесткое перемещение цилиндра, принимая для него некоторое значение  $\delta$  из области его изменения  $0 < \delta \ll b - a$ . Тогда уравнения (17), (18) образуют замкнутую систему уравнений относительно  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $q(\xi)$ . Коль скоро будет известно решение этой системы, с помощью (16) определится закон распределения контактных давлений

$$p(\varphi) = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{R}{b-a} q(\xi) \right]^{1/m} \quad (19)$$

а затем с помощью (14), (13) и (2) последовательно определяются  $\tau(\varphi)$ ,  $M$ ,  $T$ . Далее, из соотношения (11) определяется угол наклона (

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \sin \varphi + \tau(\varphi) \cos(\varphi)] d\varphi}{\int_{-\alpha}^{\beta} [\tau(\varphi) \sin \varphi - p(\varphi) \cos \varphi] d\varphi} \quad (20)$$

а условие (12) служит для определения той силы  $F$ , которая соответствует принятому значению  $\delta$ . Установленную таким образом зависимость  $F$  от  $\delta$  можно трактовать как зависимость  $\delta$  от  $F$ , что соответствует требованиям задачи.

Теперь приступим к определению  $\alpha, \beta$  и  $q(\xi)$  из (17) и (18). При условии (18) на основе (17) получаем формулы:

$$\alpha = \arccos \left\{ \left[ \frac{1 + \psi - \delta_0}{\sqrt{2\psi}} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{2\psi}} \int_0^1 q^{\frac{1}{m}}(\xi) d\xi \right]^2 - \frac{1 + \psi^2}{2\psi} \right\} \quad (21)$$

$$\beta = \arccos \left\{ \left[ \frac{1 + \psi - \delta_0}{\sqrt{2\psi}} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{2\psi}} \int_0^1 q^{\frac{1}{m}}(\xi) d\xi \right]^2 - \frac{1 + \psi^2}{2\psi} \right\}$$

которые вместе с (17) имеют наиболее удобную форму для определения неизвестных  $\alpha, \beta$  и  $q(\xi)$  методом последовательных приближений.

Введя вектор  $\vec{x} = \{\alpha, \beta, q(\xi)\}$  и представляя систему уравнений (21), (17) в векторном виде  $\vec{x} = A(\vec{x})$ , решение этой системы сводится к определению неподвижной точки оператора  $A$ . Пусть в множестве  $X$ , каждый элемент которого является совокупностью двух произвольных чисел  $\alpha, \beta$  и непрерывной в  $\xi \in [0; 1]$  функции  $q(\xi)$ , введена метрика формулой

$$\rho(\vec{x}_1; \vec{x}_2) = |\alpha_1 - \alpha_2| + |\beta_1 - \beta_2| + \max_{0 \leq \xi \leq 1} |q(\xi_1) - q(\xi_2)| \quad (22)$$

где  $\vec{x}_i = \{\alpha_i, \beta_i, q_i(\xi)\}$ , ( $i=1, 2$ )—два произвольных элемента из  $X$ . Тогда множество  $X$  становится полным метрическим пространством. Пусть, далее,  $S(o, r)$ —замкнутый шар [13] в пространстве  $X$  с центром  $o\{0, 0, 0\}$  и с радиусом  $r$ . Способом, предложенным в [4], можно доказать, что существует область изменения характерных параметров задачи, где оператор  $\vec{y} = A(\vec{x})$  отображает шар  $S$  в себе и в нем является сжимающим. Тогда для любого начального элемента  $\vec{x}_0 \in S$ , формулами

$$\vec{x}_{i+1} = A(\vec{x}_i), \quad (i=0; 1; 2; \dots) \quad (23)$$

получается последовательность  $\{\vec{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ , которая по метрике (22) стремится к некоторому пределу  $\vec{x}^*$ , являющемуся неподвижной точкой оператора  $A$ . Следовательно,  $\vec{x}^*$  соответствует единственному решению системы уравнений

(17), (21). Принимая  $\bar{x}_0 = 0$ , на основе (23), (17) и (21) можно получить следующие приближенные аналитические выражения для  $\alpha, \beta$  и  $q(\xi)$ :

$$\alpha = \arccos \left\{ \left[ \frac{1 + \psi - \delta_0}{\sqrt{2\psi}} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{2\psi}} \delta_0^{\frac{1}{m}} \right]^2 - \frac{1 + \psi^2}{2\psi} \right\}$$

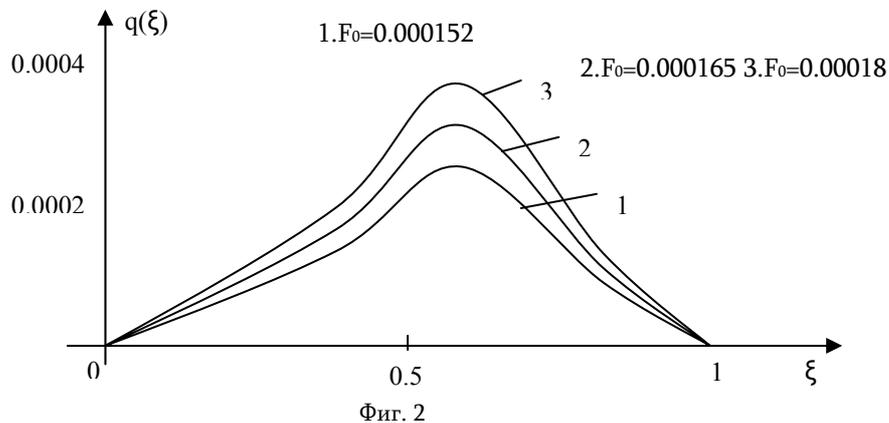
$$\beta = \arccos \left\{ \left[ \frac{1 + \psi - \delta_0}{\sqrt{2\psi}} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{2\psi}} \delta_0^{\frac{1}{m}} \right]^2 - \frac{1 + \psi^2}{2\psi} \right\} \quad (24)$$

$$q(\xi) = \delta_0 - 1 - \psi + 1 + 2\psi \cos[-\alpha + (\alpha + \beta)\xi] + \psi^2 -$$

$$- [\lambda_1 + \lambda_2(2\xi - 1) + \lambda_3] \delta_0^{\frac{1}{m}}, \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

### 3. Анализ числовых результатов

На основе соотношений (17), (21), (23), для следующих значений характерных параметров  $m = 1; \psi = 0,005; \lambda_1 = 0,85; \lambda_2 = 0,1; \lambda_3 = 0,015$  получены значения  $\alpha, \beta$  и  $q(\xi)$ . При этом принимается  $\delta_0 = 0,0029; 0,003; 0,0031; 0,0032$  с помощью формул (2), (12), (13) и (20) получены остальные неизвестные. По результатам вычислений построены графики безразмерного контактного давления  $q(\xi)$  (фиг.2) и приведены значения основных характеристик задачи (табл.1), в которых показан ход изменения этих величин в зависимости от безразмерной силы  $F_0$ .



Как видно из этих результатов, соблюдаются характерные закономерности, установленные экспериментально для подшипников скольжения [9]. А именно, значения  $\alpha$  (показывают о небольшом отклонении жесткого перемещения цилиндра от точного направления силы  $F$  в ту сторону, по которой движутся граничные точки цилиндра в зоне трения. Кроме того, для всех конкретных случаев  $\alpha$  значительно превышает  $\beta$ , а точка, в которой контактное давление принимает

свой максимум, находится примерно в середине той части контактной области, которая охвачена углом ( (фиг. 1).

Таблица 1

$F_0 \times 10^{-4}$	1.52	1.6	1.65	1.8
$\delta_0 \times 10^{-3}$	2.9	3	3.1	3.2
$\alpha$	30° 40'	32°	34°	36°
$\beta$	17°	18° 50'	20° 15'	21° 20'
(	3° 50'	3° 30'	3°	2° 20'

Автор выражает благодарность профессору С. М. Мхитаряну за постановку задачи и руководство работой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П. Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины. // МТТ, 1978. №4. С. 60-67.
2. Александров В. М. Контактная задача для тел с покрытиями с учетом нелинейного трения, износа и тепловыделения от трения. //МТТ. 2003. .№4. С. 128-135.
3. Акопян В. Н., Мхитарян С. М. К осесимметричной контактной задаче теории упругости при наличии износа. // Докл. АН Арм. ССР. 1982. Т. 75. №3. С. 140-144.
4. Мхитарян С. М., Шекиян Л. А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т. 30. № 3. С. 15-32.
5. Александров В. М., Коваленко Е. В. Плоские контактные задачи теории упругости для класических областей при наличии износа. //ПМТФ. 1980. №3. С. 163-172.
6. Горячева И. Г., Торская Е. В. Контактные задачи при наличии износа для тел с переменным по поверхности коэффициентом износостойкости. //Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 185-194.
7. Богатин О. Б., Коров В. А., Тихонов А. Г. Проблемы моделирования нестационарного термоконтактного взаимодействия в трибосистемах. //Трение и износ.1992. Т.13. №1. С. 172-184.
8. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526с.
9. Детали машин. Справочник. Т. 1. М.: Машиностроение. 1968. 440с.
10. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука.1979. 560с.
11. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
12. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510с.
13. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 360с.

