

УДК 534.14.014.2

О ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПУЛЬСАЦИЯХ СФЕРИЧЕСКОГО
ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Оганян Г. Г., Саакян С. Л.

Գ.Գ. Օհանյան, Ս.Լ.Սահակյան

Անստեղծի հեղուկում գնդաձև գազային պղպջակի ոչ գծային բարձրամասնի մասին

Ստացված է մաթեմատիկական հեղուկում պղպջակի ոչ գծային ստիպողական տատանումները նկարագրող հավասարումը: Հարմոնիկ անալիզի մեթոդների միջոցով հետազոտված են առաջնային (գլխավոր) և երկրորդական ռեզոնանսների դեպքերը, երբ արտաքին հարուցումը տրվում է սինուսոիդալ տեսքով: Առաջինի համար դուրս է բերված ռեզոնանսային կորի հավասարումը, որի ուսումնասիրությունը թույլ է տալիս հետևել ամպլիտուդի հնարավոր թռիչքաձև փոփոխություններին: Երկրորդական ռեզոնանսների պարագայում գտնված են գրգռված շառավղի ըստ ժամանակի փոփոխման օրենքները:

G.G. Oganyan, S.L. Sahakyan

On nonlinear Pulsation of spherical Gas-bubble in noncompressible Fluid

Here is considered the problem of forced oscillation of spherical gas-bubble in viscous noncompressible Fluid. The nonlinear equation of oscillation of single bubble is obtained. The primary and secondary resonances are investigated, when the external strength is changed within sine low.

На основе упрощенной модели движения безграничной разреженной газожидкостной смеси, предложенной в [1], получено уравнение, описывающее нелинейные вынужденные колебания пузырька. При синусоидальном внешнем возбуждении исследованы случаи первичного и вторичных резонансов. Для первого из них выведено уравнение резонансной кривой (частотно-амплитудной характеристики), а для остальных резонансов выявлены законы изменения во времени возмущенного радиуса пузырька.

1. **Исходные уравнения. Прямое разложение.** Пусть одиночный газовый пузырек сферической формы находится в безграничной вязкой жидкости. В отсутствие эффектов сжимаемости, поверхностного натяжения и теплообмена радиальное движение системы пузырек-жидкость опишется системой уравнений [1]

$$p_2 - p_1 = \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt}, \quad \rho_1 = \text{const} \quad (1.1)$$
$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad \gamma = \frac{c_{p2}}{c_{v2}}$$

Здесь t – время, p – давление, ρ – плотность, R – радиус пузырька, c_p и c_v – удельные теплоемкости, γ – показатель адиабаты, μ – динамическая вязкость жидкости. Индексы 1, 2 и 0 отнесены, соответственно, к жидкости, газу и состоянию покоя (равновесия).

Будем полагать, что в любой момент времени отклонения параметров течения от своих значений в состоянии равновесия малы

$$\begin{aligned} p_2 &= p_0(1 + p'_2), & p_1 &= p_0(1 + p'_1) \\ \rho_2 &= \rho_{20}(1 + \rho'_2), & R_2 &= R_0(1 + R'_2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь штрихи отнесены к избыточным значениям параметров и в дальнейшем опускаются. Подставляя разложения (1.2) в систему (1.1), упростим ее, оставляя в рассмотрении, помимо линейных, слагаемые с квадратичной нелинейностью. В рассматриваемом приближении, в случае пренебрежения взаимным влиянием эффектов вязкости, дисперсии и нелинейности, система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{3\gamma}{\omega_{ar}^2} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\mu}{p_0} \frac{dR}{dt} - p_2 + p_1 &= 0, & \omega_{ar}^2 &= \frac{3\gamma p_0}{\rho_1 R_0^2} \\ p_2 &= -3\gamma R + \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2} R^2, & \rho_2 &= -3R + 6R^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ω_{ar} –линейная частота свободных (собственных) колебаний пузырька (адиабатическая частота Миннаерта). При упрощении уравнений состояния и сохранения массы газа в нелинейные слагаемые подставлены соотношения линейной акустики. Исключая в системе (3.1) избыточное давление p_2 , получим

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \omega_{ar}^2 R &= -2\delta\dot{R} + \alpha R^2 - \frac{\omega_{ar}^2}{3\gamma} p_1(t) \\ \delta &= \frac{2}{3\gamma} \frac{\mu}{p_0} \omega_{ar}^2, & \alpha &= \frac{3\gamma+1}{2} \omega_{ar}^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь точки над искомой функцией R и в последующем над другими функциями означают дифференцирование по t . Пусть в жидкости вдали от пузырька возмущение давления $p_1(t)$ совершает периодические колебания с заданной частотой ω и амплитудой p_m . Уравнение (1.4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \omega_{ar}^2 R &= -2\delta\dot{R} + \alpha R^2 - \omega_{ar}^2 F \cos \omega t \\ p_1 &= 3\gamma F \cos \omega t = p_m \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.5)$$

Приближенное решение уравнения (1.5) ищется в виде разложения по степеням малого безразмерного параметра ε

$$R(t) = \varepsilon r_1(t) + \varepsilon^2 r_2(t) + \varepsilon^3 r_3(t) \quad (1.6)$$

В результате применения прямого разложения к уравнению (1.5) определяются функции r_1, r_2 , откуда, в силу представления R в виде (1.6), получим

$$\begin{aligned} R &= a(1 - \delta t) \cos \varphi - \frac{\omega_{ar}^2 F}{\omega_{ar}^2 - \omega^2} \left(\cos \omega t + \frac{2\delta\omega}{\omega_{ar}^2 - \omega^2} \sin \omega t \right) + \\ &+ \frac{\alpha}{2} \left[\frac{a^2}{\omega_{ar}^2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) + \frac{\omega_{ar}^2 F^2}{(\omega_{ar}^2 - \omega^2)^2} \left(1 - \frac{\omega_{ar}^2}{\omega_{ar}^2 - 4\omega^2} \cos 2\omega t \right) \right] + \\ &+ \frac{2aF\omega_{ar}^2 \cos(\omega t - \varphi)}{\omega(\omega - 2\omega_{ar})(\omega_{ar}^2 - \omega^2)} \left(1 + \frac{\omega - 2\omega_{ar} \cos(\omega t + \varphi)}{\omega + 2\omega_{ar} \cos(\omega t - \varphi)} \right) \Big] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $a = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ – амплитуда и фаза колебаний, $\varphi = \omega_{ar}t + \beta$. Очевидно, что выписанное решение (1.7) не является равномерно пригодным разложением второго порядка, поскольку содержит как секулярный (вековой) член, так и дроби со знаменателями, из которых определяются резонансные частоты колебаний.

2. Основной (первичный) резонанс $\omega \approx \omega_{ar}$. В прямом разложении (1.7) при $\omega \rightarrow \omega_{ar}$ значение R неограниченно возрастает. Однако, в этом случае все большую роль начинают играть диссипативный член и нелинейное слагаемое в возвращающей силе, что приводит к изменению порядков, приписываемым величинам различных членов уравнения (1.5). Поэтому теперь будем полагать, что величина внешней силы p_1 одного порядка с диссипативным членом, т.е. $p_1 \sim \varepsilon^3$, $|\delta| \sim \varepsilon^2$, $R \sim \varepsilon$. Для исследования явления резонанса используется асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского [2], являющийся одним из вариантов обобщенного метода усреднения. Подставляя разложение (1.6) в уравнение (1.5), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В первом приближении получим однородное уравнение, решением которого является функция

$$r_1 = a \cos(\omega_{ar}t + \beta) = a \cos \varphi \quad (2.1)$$

Здесь, в отличие от решения (1.7), амплитуда a и фаза β полагаются медленно меняющимися функциями времени, что позволяет представить их в виде

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad \dot{\beta} = \varepsilon \phi_1(a) + \varepsilon^2 \phi_2(a) + \dots, \quad \varphi = \dot{\omega}_{ar} + \dot{\beta} \quad (2.2)$$

Полагая, как обычно [2,3], что a и φ являются новыми независимыми переменными, производные по t выразим через частные производные по a и φ . Опуская выкладки, аналогичные приведенным в [3], из требования отсутствия секулярных членов в общем решении уравнения второго приближения, получим $A_1 = 0$, $\Phi_1 = 0$. Само второе приближение решения (1.6) предстанет в виде

$$r_2 = \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right)$$

Из уравнения третьего приближения относительно r_3 , в силу требования об отсутствии секулярных членов в общем решении, можно определить функции A_2 и ϕ_1 , подстановка которых в разложение (2.2) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\delta a + \frac{\omega_{ar}}{2} F \sin(\sigma t + \beta), \quad \sigma = \omega_{ar} - \omega \\ \dot{\varphi} &= \omega_{ar} - \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^3} a^2 + \frac{\omega_{ar}}{2} \frac{1}{a} F \cos(\sigma t + \beta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где σ – линейная расстройка частоты, при этом третье приближение решения (1.6) запишется в виде

$$r_3 = \frac{1}{48} \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^4} a^3 \cos 3\varphi$$

Необходимо отметить важный факт. Исследование колебаний иным способом–методом многих масштабов [3] вновь приводит к системе (2.3) и формулам для функций r_1 , r_2 , r_3 полностью идентичными вышеприведенным. Система уравнений (2.3) описывает модуляцию фазы и амплитуды в решениях r_1 , r_2 и r_3 , которые определяют в разложении (1.3) форму свободных колебаний. Она является неавтономной, поскольку время t явным образом входит в уравнения. Введением новой безразмерной переменной

$$v(t) = \sigma t + \beta, \dot{v} = \sigma + \dot{\beta}, \dot{\varphi} = \omega_{ar} - \sigma + \dot{v}$$

можно исключить явную зависимость уравнений от t и тем самым преобразовать систему (2.3) в автономную

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\delta a + \frac{\omega_{ar}}{2} F \sin v \\ a\dot{v} &= \sigma a - \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^3} a^3 + \frac{\omega_{ar}}{2} F \cos v \end{aligned} \quad (2.4)$$

Выведем уравнение резонансной кривой [4] или амплитудно-частотной характеристики [3], выявляющей зависимость амплитуды a_0 установившихся колебаний от расстройки частоты σ . Поскольку при установившихся колебаниях имеем $\dot{a} = 0$, $\dot{v} = 0$, то, согласно определению (1.4) коэффициента α , из системы (2.4) получим

$$\begin{aligned} (Ba_0^2)^3 - 2\sigma_1 (Ba_0^2)^2 + (\sigma_1^2 + \delta_1^2) Ba_0^2 &= \frac{1}{4} BF^2 \\ B &= \frac{5}{3} \left(\frac{3\gamma + 1}{4} \right)^2, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\omega_{ar}} = 1 - \frac{\omega}{\omega_{ar}} \\ \delta_1 &= \frac{\delta}{\omega_{ar}} \sim \varepsilon^2, \quad a_0 \sim \varepsilon, \quad F \sim \varepsilon^3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Полученное соотношение представляет собой безразмерное уравнение резонансной кривой. В плоскости (a_0, σ_1) уравнение касательной к исследуемой резонансной кривой имеет вид

$$\frac{da_0}{d\sigma_1} = \frac{a_0 (-\sigma_1 + Ba_0^2)}{\sigma_1^2 - 4Ba_0^2\sigma_1 + 3(Ba_0^2)^2 + \delta_1^2} \quad (2.6)$$

Приравняв нулю уравнение (2.6), получим зависимость максимального значения амплитуды от расстройки σ_1 , подстановка которой в соотношение (2.5) выявляет ее зависимость от величины внешнего воздействия

$$\left((a_0)_{\max} \right)^2 = \frac{\sigma_1}{B}, \quad (a_0)_{\max} = \frac{1}{2} \frac{F}{\delta_1}$$

Уравнение вертикальной касательной к резонансной кривой определится из условия $da_0/d\sigma_1 = \infty$, т.е. равенства нулю знаменателя в (2.6)

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 - 4Ba_0^2\sigma_1 + 3(Ba_0^2)^2 + \delta_1^2 &= 0 \\ \sigma_1^{(1,2)} &= 2Ba_0^2 \pm \sqrt{(Ba_0^2)^2 - \delta_1^2}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Комбинирование уравнений (2.5) и (2.7) позволяет получить алгебраическое соотношение

$$a_0^6 - \frac{\sigma_1}{B}a_0^4 + \frac{F^2}{8B^2} = 0$$

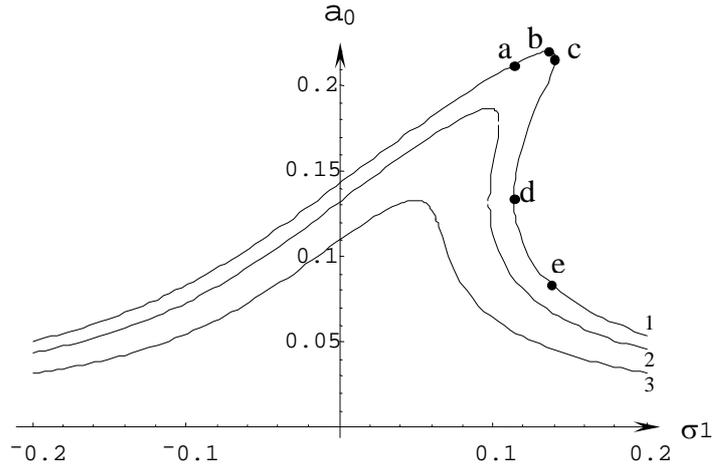
определяющее те значения a_0 , которые удовлетворяют как вертикальной касательной, так и резонансной кривой. Из требования $\sigma_1^{(1)} = \sigma_1^{(2)}$, т.е. равенства нулю дискриминанта в (2.7), находят значения критической амплитуды и внешнего воздействия

$$\begin{aligned}\left((a_0)_{crit}\right)^2 &= \frac{\delta_1}{B} = \frac{\sigma_1}{2B}, \quad \sigma_1 = 2\delta_1 \\ F_{crit}^2 &= \frac{\sigma_1}{B} = \frac{8}{B}\delta_1^3 = \frac{4}{5} \frac{96}{(3\gamma+1)^2} \frac{\delta^3}{\omega_{ar}^3}\end{aligned}\quad (2.8)$$

начиная с которых на резонансной кривой появляется гистерезис. При значениях $F < F_{crit}$ резонансная кривая однозначна.

На фиг.1 представлены резонансные кривые амплитуд пульсаций воздушного пузырька в воде, построенные по формулам (2.5)-(2.8) при исходном давлении $p_0 = 0.1$ МПа. Они указывают, что каждому размеру пузырька соответствует своя критическая величина внешнего воздействия F_{crit} , начиная с которой ($F \geq F_{crit}$) проявляется гистерезис. Действительно, на кривых 1, 2 имеют место неоднозначность амплитуд, поскольку одним и тем же значениям параметра расстройки частот σ_1 соответствует несколько значений амплитуды a_0 . В качестве иллюстрации остановимся на кривой 1 фиг.1. Передвижение по ней вдоль отрицательного направления оси σ_1 , соответствующее увеличению частоты ω вынуждающей силы, приводит к медленному увеличению амплитуды. По достижению значений $\sigma_1 = 0.11407$, $a_0 = 0.13395$ (точка d) происходит скачкообразное увеличение амплитуды до величины $a_0 = 0.21239$ (точка a). Дальнейшее увеличение частоты ω (уменьшение σ_1) приводит к уменьшению амплитуды установившихся пульсаций. Передвижение по резонансной кривой 1 фиг.1 вдоль положительного направления оси σ_1 , равнозначное уменьшению вынуждающей частоты ω , приводит к медленному возрастанию амплитуды a_0 до максимального значения $(a_0)_{max} = 0.21977$ при $\sigma_1 = 0.13604$ (точка b). По достижении точки c ($\sigma_1 = 0.14058$, $a_0 = 0.21578$) происходит скачкообразное

уменьшение амплитуды до величины $a_0 = 0.08184$ (точка e). При дальнейшем увеличении σ_1 (уменьшении частоты ω) имеет место плавное уменьшение амплитуды. Кривая 3 иллюстрирует случай отсутствия гистерезиса, когда величины вынуждающих сил меньше критических ($F < F_{crit}$). С увеличением размера пузырька ее собственная частота убывает, что, в силу формулы (2.8), уменьшает критическую величину внешнего воздействия.



Фиг.1. Резонансные кривые для воздушного пузырька в воде при исходных данных: $p_0 = 0.1$ МПа, $R_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ м ($\delta_1 = 0.04884$). Кривая 1 соответствует значению $F = 2.1467 \cdot 10^{-2}$, 2 - $F = F_{crit} = 1.82 \cdot 10^{-2}$, 3 - $F = 1.2994 \cdot 10^{-2}$.

3. Вторичные резонансы. При их исследовании удобно пользоваться методом Ван-дер-Поля. Для компактной записи результатов последующих выкладок представление искомого решения в комплексной форме предпочтительнее действительной. Полагается, что решение нелинейного уравнения (1.5) и его производная внешне имеют одинаковый вид с решением линейного неоднородного уравнения и его производной:

$$R(t) = Ae^{i\omega_{ar}t} + \Lambda e^{i\omega t} + (k.c.), \quad A = \frac{a}{2} e^{i\beta}, \quad \Lambda = \frac{\omega_{ar}^2}{\omega^2 - \omega_{ar}^2} \frac{F}{2} \quad (3.1)$$

$$\dot{R} = i\omega_{ar} A e^{i\omega_{ar}t} + i\omega \Lambda e^{i\omega t} + (k.c.) \quad (3.2)$$

Здесь комплексная амплитуда $A(t)$ и фаза $\beta(t)$ являются медленно-меняющимися функциями времени, символ $(k.c.)$ означает совокупность комплексно-сопряженных функций. Дифференцируя (3.1) и сравнивая полученный результат с (3.2), приходим к связи между производными от комплексно-сопряженных амплитуд

$$\dot{A} = -Ae^{2i\omega_{ar}t} \quad (3.3)$$

Не вдаваясь в подробности выкладок, укажем, что подстановка функции (3.1) в уравнение (1.5) и учет связи (3.3) приводит к искомому уравнению первого приближения для комплексной амплитуды

$$\begin{aligned}
i\dot{A} = & -i\delta \left(A e^{i\omega_{ar}t} + \frac{\omega}{\omega_{ar}} \Lambda e^{i\omega t} + (k.c.) \right) e^{-i\omega_{ar}t} + \frac{\alpha}{\omega_{ar}} (A\bar{A} + \Lambda\bar{\Lambda}) e^{-i\omega_{ar}t} + \\
& + \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \left(A\Lambda (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{\Lambda^2}{2} [e^{i(2\omega - \omega_{ar})t} + e^{-i(2\omega + \omega_{ar})t}] \right) + \\
& + \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \left(\bar{A}\Lambda [e^{i(\omega - 2\omega_{ar})t} + e^{-i(\omega + 2\omega_{ar})t}] + \frac{1}{2} (A^2 e^{i\omega_{ar}t} + \bar{A}^2 e^{-3i\omega_{ar}t}) \right)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

При исследовании различных случаев вторичного резонанса из (3.4) можно получать уравнения первого приближения для действительной амплитуды и фазы.

а. Случай $\omega \approx 0$. Полагая $\omega = \sigma$, $\sigma \sim \varepsilon^2$, в уравнении (3.4) оставим в рассмотрение лишь медленно меняющиеся члены

$$i\dot{A} = -i\delta A + \frac{\alpha}{\omega_{ar}} A\Lambda (e^{i\sigma t} + e^{-i\sigma t})$$

В силу определений из (3.1), отделение действительной и мнимой частей приводит к уравнениям относительно $a(t)$ и $\beta(t)$, интегрирование которых дает

$$a = c e^{-\delta t}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \frac{\omega_{ar}^2}{\omega_{ar}^2 - \sigma^2} \frac{F}{\sigma} \sin \sigma t, \quad c = \text{const}$$

Решение (3.1) предстанет в виде

$$\begin{aligned}
R = & a_0 e^{-\delta_1 \omega_{ar} t} \cos \left(\omega_{ar} t + \frac{3\gamma + 1}{2} \frac{F}{1 - \sigma_1^2} \frac{\sin(\sigma_1 \omega_{ar} t)}{\sigma_1} \right) - \\
& - \frac{F}{1 - \sigma_1^2} \cos(\sigma_1 \omega_{ar} t), \quad \delta_1 = \frac{\delta}{\omega_{ar}}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\omega_{ar}}
\end{aligned} \quad (3.5)$$

На фиг.2 решению (3.5) соответствует кривая 1 ($a_0 = 0.1$, $F = 0.016$, $\sigma_1 = 0.01$, $\delta_1 = 4.884 \cdot 10^{-3}$).

б. Случай $\omega \approx \omega_{ar}/2$. Супергармонический резонанс на частоте $\omega_{ar}/2$. Чтобы подчеркнуть близость удвоенной вынуждающей частоты к собственной, введем в рассмотрение параметр σ расстройки частоты: $2\omega = \omega_{ar} + \sigma$. Удерживая в (3.4) медленно меняющиеся члены, получим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$i\dot{A} = -i\delta A + \frac{\alpha}{2\omega_{ar}} \Lambda^2 e^{i\sigma t}$$

общим решением которого является функция

$$A = ce^{-\delta t} - \frac{i}{\delta + i\sigma} \frac{\alpha}{2\omega_{ar}} \Lambda^2 e^{i\sigma t}, \quad \frac{1}{\delta + i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \sigma^2}} e^{-i \arctg \frac{\sigma}{\delta}}, \quad c = \frac{a_0}{2} e^{i\beta_0}$$

где c – комплексная постоянная. Отсюда следует, что решение (3.1) предстанет в виде

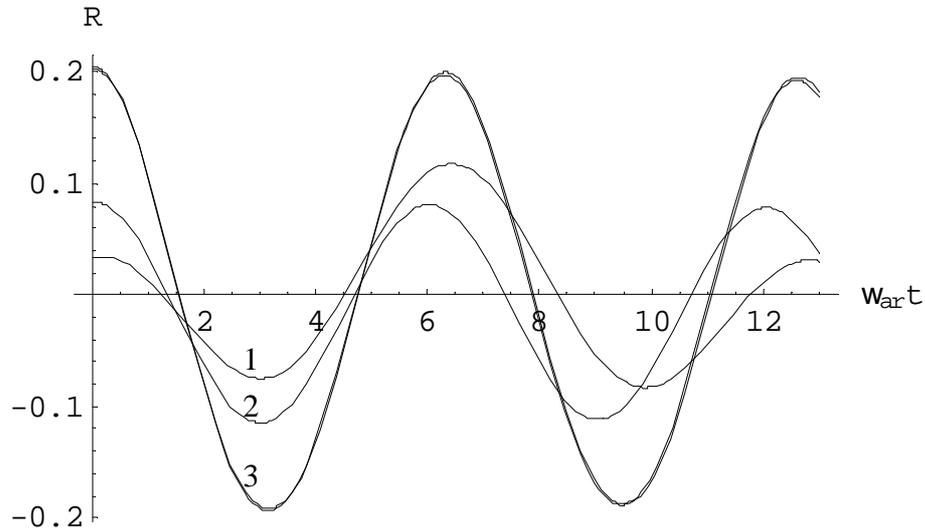
$$R = a_0 e^{-\delta_1 \omega_{ar} t} \cos(\omega_{ar} t + \beta_0) + \frac{4F}{(1 + \sigma_1^2)^2 - 4} \cos\left(\frac{1 + \sigma_1}{2} \omega_{ar} t\right) + \frac{2(3\gamma + 1)}{\sqrt{\delta_1^2 + \sigma_1^2}} \frac{F^2}{\left[(1 + \sigma_1^2)^2 - 4\right]^2} \sin\left((1 + \sigma_1) \omega_{ar} t - \arctg \frac{\sigma_1}{\delta_1}\right) \quad (3.6)$$

На фиг.2 решению (3.6) соответствует кривая 2

$$(a_0 = 0.1, \beta_0 = 0, F = 0.016, \sigma_1 = 0.01, \delta_1 = 4.884 \cdot 10^{-3}).$$

в. Случай $\omega \approx 2\omega_{ar}$. Субгармонический резонанс на частоте $2\omega_{ar}$. Для количественного описания близости вынуждающей частоты к удвоенной собственной вновь вводится параметр σ расстройки частоты: $\omega = 2\omega_{ar} + \sigma$. Оставляя в (3.4) лишь медленно меняющиеся члены, получим неоднородное уравнение с переменным коэффициентом

$$\dot{A} + \delta A = -i \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \bar{A} \Lambda e^{i\sigma t}$$



Фиг.2. Графики решений при вторичных резонансах.

Кривая 1 соответствует решению (3.5); 2 – решению (3.6); 3 – решениям (3.8) и (3.9).

Подстановкой $A = Be^{i\sigma t/2}$ оно преобразуется в неоднородное с постоянным коэффициентом

$$\dot{B} + \left(\delta + i \frac{\sigma}{2} \right) B = -i \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \Lambda \bar{B}$$

Опуская выкладки, выпишем общее решение

$$B = \left[1 - i \sqrt{\frac{F+E}{F-E}} \right] b_1 e^{\kappa_1 \omega_{ar} t} + \left[1 + i \sqrt{\frac{F+E}{F-E}} \right] b_2 e^{\kappa_2 \omega_{ar} t}, \quad b_{1,2} = \text{const} \quad (3.7)$$

$$\kappa_{1,2} = -\delta_1 \pm \frac{3\gamma+1}{4} \frac{\sqrt{F^2 - E^2}}{(2+\sigma_1)^2 - 1}, \quad E = \frac{2\sigma_1}{3\gamma+1} \left[(2+\sigma_1)^2 - 1 \right]$$

При фиксированных значениях σ_1 , δ_1 условие конечности решения (3.7) при $t \rightarrow \infty$ налагает на величину вынуждающей силы F ограничения, в соответствии с которыми решение (3.7) записывается в разных формах. Действительно, если

$$E \leq F \leq E \sqrt{1 + \left(\frac{2\delta_1}{\sigma_1} \right)^2}$$

величины $\kappa_{1,2}$ являются действительными и неположительными ($\kappa_{1,2} \leq 0$) и тогда решение (3.1) запишется в виде

$$R(t) = 2 \left(b_1 e^{\kappa_1 \omega_{ar} t} + b_2 e^{\kappa_2 \omega_{ar} t} \right) \cos \left(1 + \frac{\sigma_1}{2} \right) \omega_{ar} t + \frac{F \cos(2 + \sigma_1) \omega_{ar} t}{(2 + \sigma_1)^2 - 1} +$$

$$+ 2 \sqrt{\frac{F+E}{F-E}} \left(b_1 e^{\kappa_1 \omega_{ar} t} - b_2 e^{\kappa_2 \omega_{ar} t} \right) \sin \left(1 + \frac{\sigma_1}{2} \right) \omega_{ar} t \quad (3.8)$$

На фиг.2 решению (3.8) соответствует кривая 3 ($\sigma_1 = 0.01$, $\delta_1 = 4.884 \cdot 10^{-3}$, $F = 0.016$, $b_1 = b_2 = 0.05$).

В случае $F < E$ величины $\kappa_{1,2}$ являются комплексными и поэтому решение (3.1) предстанет в виде функции

$$R(t) = 2b_1 e^{-\delta_1 \omega_{ar} t} \left(1 - \sqrt{\frac{E+F}{E-F}} \right) \cos \left[1 + \frac{\sigma_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{F^2}{E^2}} \right) \right] \omega_{ar} t +$$

$$+ 2b_2 e^{-\delta_1 \omega_{ar} t} \left(1 + \sqrt{\frac{E+F}{E-F}} \right) \cos \left[1 + \frac{\sigma_1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{F^2}{E^2}} \right) \right] \omega_{ar} t + \quad (3.9)$$

$$+ \frac{F}{(2 + \sigma_1)^2 - 1} \cos(2 + \sigma_1) \omega_{ar} t$$

Решение (3.9) при значениях $\sigma_1 = 0.01$, $\delta_1 = 4.884 \cdot 10^{-3}$, $b_1 = b_2 = 0.05$; $F = 0.01$ практически совпадает с (3.8) и на фиг.2 ему соответствует кривая 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
3. Nayfeh A.S. Introduction to perturbation techniques etc.: Wiley. 1981.= Найфе А. Введение в теорию возмущений. М.: Мир, 1984. 535с.
4. Рабинович Н.И., Трубецкой Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 456с.

Институт механики НАН РА
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
26.01.2006