ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №3, 2006 Механика

УДК 539.3

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ УПРУГИЙ СЛОЙ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ УПРУГИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Саркисян К.Г.

Կ.Հ. Սարգսյան
Պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների վերաբերյալ, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է դիէլեկտրիկ առաձգական շերտ՝ կտոր առ կտոր հաստատուն առաձգականության գործակցով

Աշխատանքում ուսումնասիրված են առաձգական պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության (6mm դասի հեքսագոնալ սիմետրիայի պիեզոէլեկտրիկ) սահքային կայունացած տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է փոքր հաստությամբ դիէլեկտրիկ առաձգական շերտ՝ կտոր առ կտոր հաստատուն առաձգականության գործակցով: Միջավայրի տատանումները առաջանում են դիէլեկտրիկ շերտի եզրային մակերևույթի վրա կիրառված տատանման գծային աղբյուրի հետևանքով: Օգտվելով Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության մեթոդից՝ խնդիրը հանգում է երկրորդ սեռի Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը բացարձակ ինտեգրելի ֆունկցիաների տարածությունում, որը թույլ է տալիս լուծում հաջորդական մոտավորության մեթոդով: Ցույց է տրվում, որ լարումները դիէլեկտրիկ շերտի ու պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության հպման տեղամասում և բաժանման գծերի վրա ունեն լոգարիթմական եզակիություն՝ պայմանավորված առաձգականության գործակիցների տարբերությամբ:

Ստացված են էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի, էլեկետրական պոտենցիալի և տեղափոխության համար ասիմպտոտական բանաձևեր կոնտակտի տեղամասի անվերջ հեռու կետերում, որոնք բաղկացած են Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքից և տատանման ծավալային ալիքը բնութագրող մասերից, ինչպես նաև ոչ ալիքային մասից (պայմանավորված պիեզոէֆեկտով):

K.H. Sargsyan
On the Gliding Vibrations of Piezoelectric Half-Space, when on the boundary surface a dielectric elastic layer with part-by-part constant elastic coefficient is fixed firmly

In work the problem about the shift established fluctuations piezoelectric semi-infinite space (piezoelectric a class 6mm hexagonal symmetry) on which boundary surface it is attached dielectric a layer of small thickness with part by part constant elastic factor is considered. Fluctuations of environment are raised with the help of a linear source vibration the dielectric layer enclosed on a surface. Using a method integrated Fourier, the problem is reduced to decision Fredholm of the integrated equation of the second sort, the admitting decision by a method consecutive approximation. It is shown, that on a contact site of a dielectric layer and piezoelectric semi-infinite space pressure on a line of the unit dielectric has logarithmic feature. Are received asymptotic formulas for an induction of an electric field, electric potentials and movings of far points of a site of contact.

В работе рассматривается задача о сдвиговых установившихся колебаниях пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический слой малой толщины с кусочно-постоянным упругим коэффициентом. Колебания среды возбуждаются с помощью линейного источника колебаний, приложенного на поверхности диэлектрического слоя. Используя метод интегрального преобразования Фурье, задача сводится к решению фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений. Показано, что на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства напряжения на линии раздела диэлектриков имеют логарифмическую особенность. Получены асимптотические формулы для индукции электрического поля, электрических потенциалов и перемещений далеких точек участка контакта.

Пусть упругая среда отнесена к прямоугольной декартовой координатной системе $x_1x_2x_3$. Плоскость $x_2 = 0$ является граничной поверхностью между пьезоэлектрическим полупространством и диэлектрическим слоем.

Ось x_2 направлена по глубине пьезоэлектрического полупространства. Ось x_3 совпадает с осью пьезоэлектрика класса 6mm гексагональной симметрии.

Рассмотрим динамическую контактную задачу для пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический бесконечный слой малой толщины ($k_2 h << 1$) с кусочно-постоянным упругим коэффициентом, причем коэффициент упругости при $|x_1| > a$ есть G_1, а при $|x_1| < a$ – G_2. Пьезоэлектрическое полупространство и диэлектрический слой подвергаются установившемуся колебанию под действием линейного источника $\mathrm{P}\delta(x_1)e^{-i\omega t}$, приложенного на граничной поверхности $x_2 = -h$ диэлектрического слоя, где $\delta(x_1)$ – функция Дирака, ω – частота колебаний, t – параметр времени. Считается, что граничная поверхность диэлектрика металлизирована. Задача заключается в определении контактного напряжения на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства.

Обозначим: амплитуды упругих перемещений для диэлектрического слоя при $|x_1| > a$ есть $u_1^{(2)}(x_1, x_2)$, а при $|x_1| < a$ есть $u_2^{(2)}(x_1, x_2)$, а для пьезоэлектрического полупространства – $u^{(1)}(x_1, x_2)$. Амплитуды электрических потенциалов пьезоэлектрического полупространства и диэлектрического слоя обозначим соответственно $\phi^{(1)}(x_1, x_2)$, $\phi^{(2)}(x_1, x_2)$.

Отметим, что временной множитель в перемещениях и потенциалах в соответствующих средах является функцией $e^{-i\omega t}$.

Тогда поставленная задача сводится к следующим контактной и граничной задачам [1]:

$$\Delta u^{(1)} + k^2 u^{(1)} = 0, \qquad \Delta\phi^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k^2 u^{(1)} \qquad -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < \infty \tag{1}$$

$$\Delta u_1^{(2)} + k_1^2 u_1^{(2)} = 0 \qquad \text{при } |x_1| > a \tag{2}$$

$$\Delta u_2^{(2)} + k_2^2 u_2^{(2)} = 0 \qquad \text{при } |x_1| < a \tag{3}$$

Условия контакта на $x_2 = 0$ имеют вид

$$c_{44} \left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} + e_{15} \left.\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = G \left.\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} \tag{4}$$

$$e_{15} \left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} - \varepsilon_{11} \left.\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = D(x_1, 0) \tag{5}$$

$$\left.u^{(1)}\right|_{x_2=0} = U(x_1, x_2), \quad \left.\phi^{(1)}\right|_{x_2=0} = \left.\phi^{(2)}\right|_{x_2=0} \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \frac{1}{G_1}\tau(x_1) \qquad \text{при } |x_1| > a \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \frac{1}{G_2}\tau(x_1) \qquad \text{при } |x_1| < a \tag{8}$$

Граничные условия на $x_2 = -h$ будут

$$\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=-h} = 0 \qquad \text{при } |x_1| > a \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=-h} = \frac{1}{G_2}P\delta(x_1) \qquad \text{при } |x_1| < a \tag{10}$$

$$\left.\phi^{(2)}\right|_{x_2=-h} = 0 \qquad -\infty < x_1 < \infty \tag{11}$$

И еще контактные условия на линии $x_1 = \pm a$

$$\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=\pm a} = \frac{1}{G_1}\tau_{xz} = \pm\frac{1}{G_1}z(x_2), \qquad \left.\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=\pm a} = \frac{1}{G_2}\tau_{xz} = \pm\frac{1}{G_2}z(x_2)$$

где $\tau(x_1)$ – контактные напряжения, действующие между диэлектрическим слоем и пьезоэлектрическим полупространством, $D(x_1, x_2)$ – индукция электрического поля, $U(x_1, x_2)$ – упругие перемещения диэлектрического слоя, $k^2 = \omega^2 / c_1^2(1+\chi^2)$, $c^2 = c_{44} / \rho_1$, $\chi^2 = e_{15}^2 / c_{44}\varepsilon_{11}$ – коэффициент электромеханической связи, e_{15} – пьезоэлектрическая постоянная, ε_{11}– коэффициент диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика, ρ_1–плотность пьезоэлектрика, c_{44} –коэффициент упругости пьезоэлектрика, $k_1^2 = \omega^2 / c_1^2$, $c_1^2 = G_1 / \rho_1$, $k_2^2 = \omega^2 / c_2^2$, $c_2^2 = G_2 / \rho_2$, G_1, ρ_1 и G_2, ρ_2 – соответственно коэффициенты упругости и плотность материала диэлектрического слоя при $|x_1| > a$ и $|x_1| < a$, G – модуль сдвига диэлектрического слоя.

Отметим, что из-за малой толщины диэлектрического слоя ($k_2 h << 1$) считается, что $D(x_1, x_2)$ по толщине слоя не изменяется, т.е. $D(x_1, x_2) = D\ (x_1, 0)$, тогда в силу $\left.\phi^{(2)}\right|_{x_2=-h} = 0$ получим

$$\phi^{(2)}(x_1; x_2) = -\frac{1}{\varepsilon_2}D(x_1, 0)(x_2 + h), \quad -\infty < x_1 < \infty \tag{12}$$

Теперь приступим к определению упругих перемещений диэлектрического слоя малой толщины при $-\infty < x_1 < \infty$ с помощью функции Хевисайда. Для этого введем следующие функции:

$$U_1\ (x_1, x_2) = \left(\theta(-x_1 - a) + \theta(x_1 - a)\right)\cdot u_1^{(2)}(x_1, x_2) \tag{13}$$

$$U_2\ (x_1, x_2) = \left(\theta(x_1 + a) - \theta(x_1 - a)\right)\cdot u_2^{(2)}(x_1, x_2)$$

Дифференцируя $U_1\ (x_1, x_2)$ по x_1, x_2 и $U_2\ (x_1, x_2)$ по x_1, x_2 два раза и суммируя, соответственно, получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\Delta U_1 + k_1^2 U_1 = \frac{z(x_2)}{G_1}\big(\delta(x_1+a)+\delta(x_1-a)\big)+U_1(a,x_2)\big(\delta'(x_1-a)-\delta'(x_1+a)\big)$$

$$\Delta U_2 + k_2^2 U_2 = -\frac{z(x_2)}{G_2}\big(\delta(x_1+a)+\delta(x_1-a)\big)+U_2(a,x_2)\big(\delta'(x_1+a)-\delta'(x_1-a)\big)$$

$$\text{при } -\infty < x_1 < \infty \tag{14}$$

Здесь имелись в виду следующие условия:

$$\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=-a} = \frac{1}{G_1}\tau_{xz} = -\frac{1}{G_1}z(x_2), \quad \left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = \frac{1}{G_1}\tau_{xz} = \frac{1}{G_1}z(x_2)$$

$$\left.\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=-a} = \frac{1}{G_2}\tau_{xz} = -\frac{1}{G_2}z(x_2), \quad \left.\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = \frac{1}{G_2}\tau_{xz} = \frac{1}{G_2}z(x_2)$$

$$U_1(-a,x_2) = U_1(a,x_2) = U_2(a,x_2), \quad \delta(-x_1-a) = \delta(x_1+a),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x_1-a)\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1-a)\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1-a)\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(-x_1-a)\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(-x_1-a)\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1+a)\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=-a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x_1+a)\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1+a)\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1+a)\left.\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=-a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x_1-a)\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1-a)\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1-a)\left.\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=a}$$

Ввиду малости толщины диэлектрического слоя ($k_2 h << 1$) полученные уравнения (14) интегрируем в интервале $[-h,0]$:

$$\frac{\partial^2 w_1(x_1)}{\partial x_1^2} + k_1^2 w_1(x_1) = \frac{X}{G_1 h}\big(\delta(x_1+a)+\delta(x_1-a)\big)+$$

$$+w_1(a)\big(\delta'(x_1-a)-\delta'(x_1+a)\big)+\frac{1}{hG_1}q_1(x_1) \qquad \text{при } -\infty < x_1 < \infty \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 w_2(x_1)}{\partial x_1^2} + k_2^2 w_2(x_1) = -\frac{X}{G_2 h}\big(\delta(x_1+a)+\delta(x_1-a)\big)+$$

$$+w_2(a)\big(\delta'(x_1+a)-\delta'(x_1-a)\big)-\frac{q_2(x_1)-P\delta(x_1)}{hG_2}$$

$$\text{при } -\infty < x_1 < \infty \tag{16}$$

где $w_1(x_1) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{0} U_1(x_1,x_2)\,dx_2$, $w_1(a) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{0} U_1(a,x_2)\,dx_2$,

$$X=\int_{-h}^{0} z(x_2)\,dx_2\,,\; w_2(x_1)=\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} U_2(x_1,x_2)\,dx_2$$

$$\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=\pm a}=\frac{1}{G_1}\tau_{xz}=\pm\frac{1}{G_1}z(x_2)\,,\;\left.\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=\pm a}=\frac{1}{G_2}\tau_{xz}=\pm\frac{1}{G_2}z(x_2)$$

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=\left(\theta(-x_1-a)+\theta(x_1-a)\right)\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=$$

$$=\frac{1}{G_1}\tau(x_1)\left(\theta(-x_1-a)+\theta(x_1-a)\right)=\frac{1}{G_1}q_1(x_1)$$

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=\left(\theta(x_1+a)-\theta(x_1-a)\right)\left.\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=$$

$$=\frac{1}{G_2}\tau(x_1)\left(\theta(x_1+a)-\theta(x_1-a)\right)=\frac{1}{G_2}q_2(x_1)$$

Теперь применим преобразование Фурье к уравнениям (15), (16) и имея в виду, что $w_1(x_1)+w_2(x_1)=w(x_1)$, получим

$$\bar{w}(\sigma)=\frac{\bar{q}_1(\sigma)}{hG_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}+\frac{\bar{q}_2(\sigma)}{hG_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}-\frac{2X}{h}\left(\frac{1}{G_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}-\frac{1}{G_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}\right)\cos\sigma a-$$

$$2w(a)\left(\frac{1}{\sigma^2-k_1^2}-\frac{1}{\sigma^2-k_2^2}\right)\sigma\sin\sigma a-\frac{P}{hG_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}\quad \text{при } -\infty<x_1<\infty \qquad (17)$$

Тогда, применив интегральное преобразование к уравнениям пьезоэлектрического полупространства (1) контактных и граничных условий (4)-(11), получим

$$\frac{d^2\bar{u}^{(1)}}{dx_2^2}-\left(\sigma^2-k_1^2\right)\bar{u}^{(1)}=0$$

$$\frac{d^2\bar{\phi}^{(1)}}{dx_2^2}-\sigma^2\bar{\phi}^{(1)}=-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\cdot k_1^2\cdot\bar{u}^{(1)} \qquad (18)$$

$$\bar{\phi}^{(2)}(\sigma;0)=-\frac{h}{\varepsilon_2}\bar{D}(\sigma;0)$$

$$\bar{w}(\sigma)=\frac{\bar{q}_1(\sigma)}{hG_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}+\frac{\bar{q}_2(\sigma)}{hG_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}-\frac{2X}{h}\left(\frac{1}{G_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}-\frac{1}{G_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}\right)\cos\sigma a-$$

$$-2w(a)\left(\frac{1}{\sigma^2-k_1^2}-\frac{1}{\sigma^2-k_2^2}\right)\sigma\sin\sigma a-\frac{P}{hG_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}$$

Условия контакта на $x_2=0$

$$
\begin{aligned}
&c_{44}\left.\frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0}+e_{15}\left.\frac{d\bar{\phi}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0}=\bar{q}_1(\sigma)+\bar{q}_2(\sigma),\\
&e_{15}\left.\frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0}-\varepsilon_{11}\left.\frac{d\bar{\phi}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0}=\bar{D}(\sigma,0),\\
&\left.\bar{u}^{(1)}\right|_{x_2=0}=\bar{w}(\sigma),\quad \left.\bar{\phi}^{(1)}\right|_{x_2=0}=\left.\bar{\phi}^{(2)}\right|_{x_2=0}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Во второй формуле (18) имелось в виду, что контур вдоль действительной оси обходит точки $\sigma=-k_1$, $\sigma=-k_2$ сверху, а точки $\sigma=k_1,\sigma=k_2$ снизу.

Для удовлетворения условия уходящей волны однозначная ветвь функции $\sqrt{\sigma^2-k^2}$ выбрана таким образом, чтобы $\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$ и $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$. При этом, контур вдоль действительной оси обходит точку ветвления $\sigma=-k$ сверху, а точку $\sigma=k$ снизу [2].

Решая эту граничную задачу и удовлетворяя условиям уходящей волны, получим функциональное уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{hG_1}{c_{44}}(\sigma^2-k_1^2)\right]}{hG_1(\sigma^2-k_1^2)}\cdot\bar{q}_1(\sigma)+\\
&+\frac{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{hG_2}{c_{44}}(\sigma^2-k_2^2)\right]}{hG_2(\sigma^2-k_2^2)}\cdot\bar{q}_2(\sigma)=\\
&=\left(\chi^2\frac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2-k^2}\right)\cdot I(\sigma)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

где

$$
\begin{aligned}
I(\sigma)=&\frac{2X}{h}\left(\frac{1}{G_1(\sigma^2-k_1^2)}-\frac{1}{G_2(\sigma^2-k_2^2)}\right)\cos\sigma a+\\
&+2w(a)\left(\frac{1}{\sigma^2-k_1^2}-\frac{1}{\sigma^2-k_2^2}\right)\sigma\sin\sigma a+\frac{P}{hG_2(\sigma^2-k_2^2)}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

X и $w(a)$ определяются из следующих выражений:

$$X\frac{2\cos k_1 a}{hG_1}+\overline{w}(a)2k_1\sin k_1 a=\frac{\overline{q}_1(k_1)}{hG_1},$$

$$\overline{w}(a)=\frac{1}{c_{44}}\frac{\dfrac{hG_2\left(a^2-k_2^2\right)-hG_1\left(a^2-k_1^2\right)}{hG_2\left(a^2-k_2^2\right)}\overline{q}_2(a)-hG_1\left(a^2-k_1^2\right)\cdot I(a)}{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|a|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|a|}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{a^2-k^2}+\dfrac{hG_1}{c_{44}}\left(a^2-k_1^2\right)\right]}$$

Для упругого перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектриках получим

$$\overline{u}^{(1)}(\sigma,x_2)=\left(\frac{\overline{q}_1(\sigma)}{hG_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}+\frac{\overline{q}_2(\sigma)}{hG_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}-I(\sigma)\right)\cdot e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} \tag{22}$$

$$\overline{\phi}^{(1)}(\sigma,x_2)=-\frac{e_{15}\,\varepsilon_2}{\varepsilon_{11}\left(\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)}\left(\frac{\overline{q}_1(\sigma)}{hG_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}+\frac{\overline{q}_2(\sigma)}{hG_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}-I(\sigma)\right)\cdot e^{-|\sigma|x_2}+$$

$$+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{u}^{(1)}(\sigma,x_2)$$

Исследуем функцию $f_1(\sigma)$, где

$$f_1(\sigma)=\chi^2\frac{\varepsilon_2|\sigma|}{\left(\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\frac{hG_1}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right]$$

Функция $f_1(\sigma)$ на действительной оси имеет нули: $\sigma=\sigma_1$, $\sigma=-\sigma_1$, $k<\sigma_1<k_1$, $-k_1<-\sigma_{02}<-k$ при $0\le\chi<\infty$ [3]. Для удовлетворения условия уходящей волны, контур вдоль действительной оси должен обходить точку $\sigma=-\sigma_1$ сверху, а точку $\sigma=\sigma_1$– снизу. Из вышесказанного следует, что существует электроупругая поверхностная волна Лява, которая распространяется со скоростью $C_L=\dfrac{\omega}{\sigma_1}$.

Тогда функциональное уравнение (20) можно переписать в виде

$$\overline{q}_1(\sigma)+\frac{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{hG_2}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{hG_1}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right]}\cdot\frac{G_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}{G_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}\cdot\overline{q}_2(\sigma)=$$

$$=\frac{hG_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)\left(\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}\right)}{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{hG_1}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right]}\cdot I(\sigma) \tag{23}$$

Подставляя $\overline{q}_1(\sigma,0)$ в выражения $\overline{u}^{(1)}(\sigma,x_2)$, $\overline{\phi}^{(1)}(\sigma,x_2)$, получим

$$\overline{u}^{(1)}(\sigma,x_2)=\frac{1}{c_{44}}\frac{G_1h\left(\sigma^2-k_1^2\right)I(\sigma)-\left(1+\dfrac{G_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}{G_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}\right)\overline{q}_2(\sigma)}{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{G_1h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right]}\cdot e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} \tag{24}$$

$$\overline{\phi}^{(1)}(\sigma,x_2)=\frac{-\dfrac{e_{15}\varepsilon_2}{\varepsilon_{11}\left(\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)}\left(G_1h\left(\sigma^2-k_1^2\right)I(\sigma)-\left(1+\dfrac{G_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}{G_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}\right)\overline{q}_2(\sigma)\right)}{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{G_1h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right]}\cdot e^{-|\sigma|x_2}+$$

$$+\frac{e_{15}}{c_{44}\varepsilon_{11}}\frac{G_1h\left(\sigma^2-k_1^2\right)I(\sigma)-\left(1+\dfrac{G_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}{G_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}\right)\overline{q}_2(\sigma)}{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{G_1h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right]}\cdot e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} \tag{25}$$

Таким образом, задача сводится к определению $\overline{q}_2\ (\sigma,0)$.

Для решения функционального уравнения (23) представим его в виде

$$\overline{q}_1\ (\sigma)+\overline{q}_2\ (\sigma)=\overline{K}(\sigma)\overline{q}_2\ (\sigma)+\overline{S}(\sigma) \tag{26}$$

где

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\left(\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}\right)\left(\dfrac{G_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}{G_2\left(\sigma^2-k_2^2\right)}-1\right)}{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{G_1h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right]}$$

$$\overline{S}(\sigma)=\frac{\left(\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}\right)hG_1\left(\sigma^2-k_1^2\right)}{\chi^2\dfrac{\varepsilon_2|\sigma|}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|}-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}+\dfrac{G_1h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right]}\cdot I(\sigma) \tag{27}$$

Теперь докажем, что $K(x_1)q_2(x_1)$ – непрерывная функция. Для этого исследуем поведение $\overline{K}(\sigma)\overline{q}_2(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$. Так как функция $q(x_1)$ в точке $x_1=0$ принимает конечное значение, то $\overline{q}_2(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ будет иметь следующий порядок: $\dfrac{2\sin\sigma a}{\sigma}$. Поскольку $\overline{K}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ имеет порядок $|\sigma|^{-1}$, тогда легко видеть, что $\overline{K}(\sigma)\overline{q}_2(\sigma)$ имеет порядок $\dfrac{2\sin\sigma a}{\sigma}\cdot\dfrac{1}{|\sigma|}$, то есть $\overline{K}(\sigma)\overline{q}_2(\sigma)$ – абсолютно интегрируемая функция при $|\sigma|\to\infty$. Отсюда можно заключить, что $K(x_1)q_2(x_1)$ является непрерывной функцией при $-\infty<x_1<\infty$.

А что касается функции $S(x_1)$, исследуя поведение $\overline{S}(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$, легко видеть, что из свойств интеграла Фурье следует $\tilde{\varphi}^{-1}\left(\frac{\cos\sigma a}{|\sigma|}\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(x_1^2 - a^2\right) + \text{const}$, и $\tilde{\varphi}^{-1}\left(\frac{\sin\sigma a}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{2i}\left(|x_1 + a| - |x_1 - a|\right) + \text{const}_1$,

где $\tilde{\varphi}$ – обобщенное преобразование Фурье, $\tilde{\varphi}_{-1}$ – обратное преобразование Фурье. Отсюда следует, что $S(x_1)$ в точках $x_1 = \pm a$ имеет логарифмическую особенность.

Так мы доказали, что $K(x_1)q_2(x_1)$ является непрерывной функцией, а $S(x_1)$ имеет логарифмическую особенность. Отсюда следует, что контактное напряжение $q(x_1)$ при $x_1 = \pm a$ имеет логарифмическую особенность.

Для определения $q_2(x_1)$ применим обратное преобразование Фурье к функциональному уравнению (26) и, пользуясь теоремой о свертке, будем иметь

$$q(x_1) = \int_{-a}^{+a} K(|x_1 - y|)q_2(y)dy + S(x_1), \quad -\infty < x_1 < \infty$$

где $K(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{K}(\sigma)e^{-i\sigma x_1}d\sigma$, $\quad S(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{S}(\sigma)e^{-i\sigma x_1}d\sigma$

Для определения $q(x_1)$ требуя, что $|x_1| < a$, получим фредгольмовское интегральное уравнение второго рода

$$q_1(x_1) = \int_{-a}^{+a} K(|x_1 - y|)q_1(y)dy + S(x_1) \quad \text{при } |x_1| < a$$

В таком случае этот интеграл допускает решение методом последовательных приближений в пространстве абсолютно интегрируемых функции $L_1[-a;a]$ при

$$\sup_{|y|<a}\int_{-a}^{+a} |K(|x_1 - y|)|dx_1 < 1.$$

Значение $q(x_1)$ при $|x_1| > a$ определится по формуле

$$q(x_1) = \int_{-a}^{+a} K(|x_1 - y|)q(y)dy + S(x_1), \quad \text{когда } |x_1| \ge a$$

Теперь получим асимптотические формулы для $q(x_1), u^{(1)}(x_1, x_2), \phi^{(1)}(x_1, x_2)$, когда $x_2 = 0$, $|x_1| \to \infty$, используя метод Лайтхилла [4].

Сначала приступим к определению $q(x_1)$, когда $|x_1| \to \infty$. Применив обратное преобразование Фурье к (26), получим

$$q(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\overline{K}(\sigma)\overline{q}_2(\sigma) + \overline{S}(\sigma)\right)e^{-i\sigma x_1}d\sigma \qquad (28)$$

Для подынтегрального выражения точки $\sigma = 0$, $\sigma = \pm k$, $\sigma = \pm\sigma_1$ являются особыми точками.

Тогда приведем разложение функции $\overline{K}(\sigma)\overline{q}_2(\sigma)+\overline{S}(\sigma)$ в окрестностях этих точек

$$\overline{q}(\sigma)=\frac{A_{-1}}{\sigma-\sigma_1}-\frac{A_{-1}}{\sigma+\sigma_1}+B_1\sqrt{\sigma-k}+B_1'\sqrt{\sigma+k}+C_1|\sigma|+F(\sigma) \tag{29}$$

где

$$A_{-1}=\frac{\frac{G_1h}{c_{44}}\left(\sigma_1^2-k_1^2\right)\left(\left(\frac{G_1\left(\sigma_1^2-k_1^2\right)}{G_2\left(\sigma_1^2-k_2^2\right)}-1\right)\overline{q}_2(\sigma_1)+G_1h\left(\sigma_1^2-k_1^2\right)\cdot I(\sigma_1)\right)}{\chi^2\frac{\varepsilon_2^2}{\left(\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h\sigma_1\right)^2}-\left[\frac{\left(1+\chi^2\right)\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2-k^2}}+\frac{2G_1h}{c_{44}}\sigma_1\right]}$$

$$B_1=\frac{\sqrt{2k}\left(1+\chi^2\right)\frac{G_1h}{c_{44}}\left(k^2-k_1^2\right)\left(\left(\frac{G_1\left(k^2-k_1^2\right)}{G_2\left(k^2-k_2^2\right)}-1\right)\overline{q}_2(k)+G_1h\left(k^2-k_1^2\right)\cdot I(k)\right)}{\left(\chi^2\frac{\varepsilon_2k}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}hk}-\frac{G_1h}{c_{44}}\left(k^2-k_1^2\right)\right)^2} \tag{30}$$

$$B_1'=-iB_1=-i\frac{\sqrt{2k}\left(1+\chi^2\right)\frac{G_1h}{c_{44}}\left(k^2-k_1^2\right)\left(\left(\frac{G_1\left(k^2-k_1^2\right)}{G_2\left(k^2-k_2^2\right)}-1\right)\overline{q}_2(k)+G_1h\left(k^2-k_1^2\right)\cdot I(k)\right)}{\left(\chi^2\frac{\varepsilon_2k}{\varepsilon_2+\varepsilon_{11}hk}-\frac{G_1h}{c_{44}}\left(k^2-k_1^2\right)\right)^2}$$

Коэффициент C_1 только в случае $e_{15}=0$ (пьезоэффект отсутствует) равняется нулю. Аналогичным образом, $\frac{d^2F(\sigma)}{d\sigma^2}$ – абсолютно интегрируемая функция $(-\infty<\sigma<\infty)$ [5]. И после интегрирования по частям можно убедиться, что интегральный член $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma)e^{-i\sigma x_1}d\sigma$ при $|x_1|\to\infty$ имеет порядок $o\left(x_1^{-2}\right)$.

Имея в виду, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\sigma\pm k}\,e^{-i\sigma x_1}d\sigma=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{e^{i\left(k|x_1|+\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}x_1\right)}}{|x_1|^{3/2}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\sigma|e^{-i\sigma x_1}d\sigma=-\frac{1}{x_1^2}\cdot\frac{1}{\pi} \tag{31}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sigma-\sigma_1}-\frac{1}{\sigma+\sigma_1}\right)e^{-i\sigma x_1}d\sigma=ie^{i\sigma_1|x_1|}$$

в силу вышесказанного для $q(x_1)$ при $|x_1|\to\infty$ получим асимптотическую формулу

$$q(x_1) = iA_{-1}e^{i\sigma_1|x_1|} + \frac{B_1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i\left(k|x_1|-\frac{\pi}{4}\right)}}{|x_1|^{3/2}} - \frac{C_1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} + \mathrm{o}\left(x_1^{-2}\right) \tag{32}$$

при $|x_1| \to \infty$

Аналогичном образом можно получить асимптотические представления для индукции электрического поля, электрического потенциала и перемешения

$$\bar{D}(x_1, 0) = i\tilde{A}_{-1}e^{i\sigma_1|x_1|} + \frac{\tilde{B}_1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i\left(k|x_1|-\frac{\pi}{4}\right)}}{|x_1|^{3/2}} - \frac{\tilde{C}_1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} + o\left(x_1^{-2}\right) \quad \text{при } |x_1| \to \infty$$

$$\bar{\phi}^{(1)}(x_1, 0) = i\tilde{\tilde{A}}_{-1}e^{i\sigma_1|x_1|} + \frac{\tilde{\tilde{B}}_1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i\left(k|x_1|-\frac{\pi}{4}\right)}}{|x_1|^{3/2}} - \frac{\tilde{\tilde{C}}_1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} + o\left(x_1^{-2}\right) \quad \text{при } |x_1| \to \infty \tag{33}$$

$$u^{(1)}(x_1, 0) = i\hat{A}'_{-1}e^{i\sigma_1|x_1|} + \frac{\hat{B}''_1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i\left(k|x_1|-\frac{\pi}{4}\right)}}{|x_1|^{3/2}} - \frac{\hat{C}'_1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} + \mathrm{o}\left(x_1^{-2}\right) \quad \text{при } |x_1| \to \infty$$

Как видно из (32) и (33), $\phi^{(1)}(x_1, 0)$ и $D(x_1, 0)$ тоже имеют неволновую часть, обусловленную пьезоэффектом, которая на бесконечности имеет порядок x_1^{-2}, еще и состоит из частей электроупругой волны Лява и сдвиговой объемной волны.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Э.Х. Григоряну за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.
2. Нобл Б. Метод Винера Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 279с.
3. Григорян Э.Х., Саркисян К.Г. О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический упругий слой с кусочно-постоянным диэлектрическим коэффициентом проницаемости.//Изв. НАН РА. Механика. 2004. Т.57. №1. С.18-25.
4. Lighthill M.J. An Introduction to Fourier analysis and generalized functions. – Cambridge Univ. Press, 1959.
5. Саркисян К.Г. О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический упругий слой, состоящий из двух полубесконечных диэлектрических частей.// Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.9-16.

Ереванский Государственный
Университет

Поступила в редакцию
30.09.2005