

УДК 539.3: 537.228.1

О РЕШЕНИИ ЧЕТЫРЕХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ
ТОНКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНА

Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.

Ա.Գ.Ավետիսյան, Գ.Գ.Ներսիսյան, Ա.Մ.Սարգսյան

Բարակ պիեզակլեկտրիկ սեպի համար էլեկտրաառաձգականության չորս
եզրային խնդիրների լուծման մասին

Աշխատանքում Մելլինի ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ կառուցված է էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը բարակ պիեզակլեկտրիկ սեպի համար, որի մի եզրին տրված են լարումների, իսկ մյուս եզրին՝ տեղափոխումների արժեքները: Սեպի եզրերին տրված են նաև էլեկտրական չորս հնարավոր պայմաններ: Հետազոտված է էլեկտրաառաձգական դաշտի բնութագրիչների (լարումներ, էլեկտրական ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչներ) վարքը սեպի գագաթի շրջակայքում: Կառուցված են սեպի բացվածքի անկյան մեծությունից էլեկտրաառաձգական դաշտի բնութագրիչների եզակիության ցուցչի կախվածության գրաֆիկները:

A.G.Avetisian, G.G.Nersisian, A.M.Sargsian

On solution of four boundary problems of electro-elasticity for thin piezoelectric wedge

In the paper with the help of Melline's generalized integral transformation the solution of a plane combined problem of electroelasticity for a thin piezoelectric wedge is built. On one bound of the wedge the stresses values are given, and on the other one the displacement values are given. On the bounds of the wedge four possible electric conditions are also given.

The behaviour of electroelastic field characteristics (stresses, components of electric induction vector) in the vicinity of the wedge top. Graphics of singularity degrees dependence of electroelastic field characteristics from the angle of the wedge opening are built.

В работе с помощью обобщенного интегрального преобразования Меллина строится решение плоской связанной задачи электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина. На одной границе клина заданы значения напряжений, а на другой - значения перемещений. На границах клина заданы также четыре возможных электрических условия. Исследуется поведение характеристик электроупругого поля (напряжения, компоненты вектора электрической индукции) в окрестности вершины клина. Построены графики зависимости степени сингулярности характеристик электроупругого поля от угла раствора пьезоэлектрического клина.

Вопросу об изучении сингулярности напряжений и компонентов вектора электрической индукции в окрестности вершины пьезоэлектрического клина, находящегося в состоянии плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния, посвящено несколько работ последних лет.

При помощи местного решения в работах [1-4] изучена сингулярность характеристик электроупругого поля в окрестности тонкого пьезоэлектрического клина, обладающего прямолинейной анизотропией общего вида. Выявлено влияние заданных на границах клина электромеханических условий на поведение этих характеристик.

Представляя решение уравнений равновесия в перемещениях в виде интегралов Меллина, в работах [5-7] получены решения трех плоских задач электроупругости для пьезокерамического клина (трансверсально-изотропное тело).

В работе [8] предложен метод решения плоских краевых задач электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина, на границах которого заданы разнообразные электромеханические условия. Метод основан на применении

обобщенного интегрального преобразования Меллина, впервые, по-видимому, введенное в работах [9, 10], где исследована сингулярность напряжений в составном произвольно анизотропном теле.

В данной работе с помощью предложенного в работе [8] метода получено решение четырех краевых задач электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина ($0 \leq r < \infty$, $0 < \theta \leq \theta_1$) и исследовано поведение характеристик электроупругого поля вблизи его вершины. Предполагается, что вырезанный из пьезоэлектрического кристалла клин, в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, параллельную его срединной плоскости. Начало полярной r , θ , z и декартовой систем координат находится в угловой точке срединной плоскости клина, ось z направлена нормально к этой плоскости.

Как известно [11, 12], функции напряжений $\varphi(x, y)$ и электрической индукции $\psi(x, y)$ при отсутствии объемных сил и электрических зарядов удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$4\pi L_4 \varphi(x, y) - L_3 \psi(x, y) = 0, \quad L_3 \varphi(x, y) + L_2 \psi(x, y) = 0 \quad (1)$$

где

$$L_4 = s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$L_3 = -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{21} + g_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$L_2 = \eta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\eta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

s_{22}, \dots (коэффициенты упругости при постоянной электрической индукции, η_{22}, \dots (коэффициенты диэлектрической восприимчивости при постоянных механических напряжениях, g_{22}, \dots (пьезоэлектрические модули.

Общее решение системы (1) записывается в виде [11-13]

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j \varphi_j(x + \mu_j y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j \varphi_j(z_j)$$

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j f_j \varphi_j'(x + \mu_j y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j f_j \varphi_j'(z_j) \quad (2)$$

где $\varphi_j(z_j)$ (аналитические функции своих аргументов, штрихом обозначена производная по обобщенному комплексному аргументу $z_j = x + \mu_j y$, μ_j (неравные между собою корни алгебраического уравнения шестого порядка

$$4\pi l_4(\mu) l_2(\mu) + l_3^2(\mu) = 0 \quad (3)$$

$$\mu_j = \sigma_j + i\nu_j, \quad f_j = -l_3(\mu_j)/l_2(\mu_j) \quad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$\mu_4 = \bar{\mu}_1, \quad \mu_5 = \bar{\mu}_2, \quad \mu_6 = \bar{\mu}_3; \quad \nu_1 > 0, \quad \nu_2 > 0, \quad \nu_3 > 0$$

$$\gamma_j = \begin{cases} 1, & (j=1, 2, 4, 5) \\ l_3(\mu_j)/4\pi l_4(\mu_j) & (j=3, 6) \end{cases}$$

Полиномы $l_k(\mu)$ ($k=2, 3, 4$) получаются из L_k заменой $\partial^k/\partial x^k$ на единицу, а $\partial^k/\partial y^k$ (на μ^k).

Принимается, что корни (3) не являются одновременно корнями уравнений $l_k(\mu) = 0$ ($k=2, 3, 4$).

Напряжения и компоненты вектора электрической индукции выражаются через функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$

$$\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \varphi / \partial x \partial y, \quad D_x = \partial \psi / \partial y, \quad D_y = -\partial \psi / \partial x. \quad (4)$$

На границах клина заданы следующие механические

$$\begin{aligned} u_r(r, 0) = u_0(r), \quad u_\theta(r, 0) = v_0(r) \\ \sigma_\theta(r, \theta_1) = \sigma_1(r), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta_1) = \tau_1(r) \end{aligned} \quad (5)$$

и электрические условия, записанные в одном из видов

$$V(r, 0) = V_0(r), \quad V(r, \theta_1) = V_1(r) \quad (5.1)$$

$$D_\theta(r, 0) = D_0(r), \quad D_\theta(r, \theta_1) = D_1(r) \quad (5.2)$$

$$V(r, 0) = V_0(r), \quad D(r, \theta_1) = D_1(r) \quad (5.3)$$

$$D_\theta(r, 0) = D_0(r), \quad V(r, \theta_1) = V_1(r) \quad (5.4)$$

где $V(r, \theta)$ (потенциал электрического поля.

Учитывая уравнения состояния, условие потенциальности электрического поля и соотношения (4), в полярной системе координат имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j^2(\theta) \varphi_j''(z_j), & \sigma_\theta &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j^2(\theta) \varphi_j''(z_j) \\ \tau_{r\theta} &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) \varphi_j''(z_j), & \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) c_j(\theta) \varphi_j''(z_j) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) d_j(\theta) \varphi_j''(z_j), & \frac{\partial V}{\partial r} &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) m_j \varphi_j''(z_j) \\ D_\theta &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) f_j \varphi_j''(z_j), & D_r &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j(\theta) f_j \varphi_j''(z_j) \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_j(\theta) &= \cos \theta + \mu_j \sin \theta, & b_j(\theta) &= -\sin \theta + \mu_j \cos \theta \\ M_j &= s_{11} \mu_j^2 - s_{16} \mu_j + s_{12} - f_j (g_{11} \mu_j - g_{21}) / 4\pi \\ N_j &= s_{12} \mu_j - s_{26} + s_{22} \mu_j^{-1} - f_j (g_{12} - g_{22} \mu_j^{-1}) / 4\pi \\ m_j &= g_{11} \mu_j^2 - g_{16} \mu_j + g_{12} + f_j (\eta_{11} \mu_j - \eta_{12}) \\ c_j(\theta) &= M_j \cos \theta + N_j \sin \theta, & d_j(\theta) &= N_j \cos \theta - M_j \sin \theta. \end{aligned}$$

Для решения краевых задач (1)-(6) используется обобщенное интегральное преобразование Меллина аналитической функции $f(z) = f(x + \mu y)$ (μ (некоторая ком-плексная константа), впервые, по-видимому, введенное в работах [9, 10], где исследована сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле, находящемся в состоянии обобщенной плоской деформации (в частности, плоское деформированное или обобщенное плоское напряженное состояние)

$$\begin{aligned} \langle f(z) \rangle &= \int_0^\infty f(z) r^{s-1} dr = a^{-s}(\theta) \bar{f}(s) \\ a(\theta) &= \cos \theta + \mu \sin \theta, \quad \bar{f}(s) = \int_0^\infty f(z) z^{s-1} dz, \\ f(z) &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle f(z) \rangle r^{-s} ds \end{aligned} \quad (7)$$

Если $f(z)$ аналитична в некотором секторе $\theta_0 < \theta < \theta_*$, $0 < r \leq \infty$ и $f(z) = O(r^\xi)$ при $r \rightarrow 0$, $f(z) = O(r^\eta)$ при $r \rightarrow \infty$, то $\bar{f}(s)$ существует в полосе $-\xi < c < -\eta$ и не зависит от θ в заданном секторе.

Будем искать решение (1)-(6), удовлетворяющее следующим условиям: $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, D_r, D_\theta, \partial u_r / \partial r$ и $\partial u_\theta / \partial r$ при $r \rightarrow 0$ имеют порядок $O(r^{-1+\alpha})$, а при $r \rightarrow \infty$ исчезают как $O(r^{-1-\beta})$, где $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Тогда в полосе $1-\alpha < \text{Re } s < 1+\beta$ существует преобразование Меллина.

Применяя обобщенное интегральное преобразование Меллина к выражениям (6), получим

$$\begin{aligned} \langle \sigma_r \rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \langle \sigma_\theta \rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s) \\ \langle \tau_{r\theta} \rangle &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) c_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s) \\ \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) d_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \left\langle \frac{\partial V}{\partial r} \right\rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) m_j a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s) \quad (8) \\ \langle D_\theta \rangle &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \langle D_r \rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s) \end{aligned}$$

$$\bar{\varphi}_j(s) = \int_0^\infty \varphi_j''(z_j) z_j^{s-1} dz_j.$$

Продифференцировав $u(r, 0)$, $v(r, 0)$, $V(r, 0)$ и $V(r, \theta_1)$ по r и применив к граничным условиям (5)-(5.1), (5)-(5.2), (5)-(5.3), (5)-(5.4) преобразование Меллина (предполагается, что функции $V_0(r)$, $V_1(r)$, $D_0(r)$ и $D_1(r)$ удовлетворяют требованиям преобразования Меллина), в каждом конкретном случае получим систему алгебраических уравнений относительно $\bar{\varphi}_j(s)$

$$\sum_{j=1}^6 B_{lj} \bar{\varphi}_j(s) = T_l(s), \quad (l = 1, 2, \dots, 6) \quad (9)$$

где под $T_l(s)$ подразумеваются преобразования соответствующих граничных условий. Коэффициенты B_{lj} зависят от граничных условий.

В случае граничных условий (5)-(5.1) имеем

$$T_{11}^* = \left\| \langle du_0(r)/dr \rangle, \langle dv_0(r)/dr \rangle, \langle \sigma_1(r) \rangle, \langle -\tau_1(r) \rangle, \langle dV_0(r)/dr \rangle, \langle dV_1(r)/dr \rangle \right\| \quad (10)$$

здесь звездочка означает транспонирование.

Матрица коэффициентов B_{lj} в данном случае имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccccc} M_1 & M_2 & M_4 & M_5 & \gamma_3 M_3 & \gamma_6 M_6 \\ N_1 & N_2 & N_4 & N_5 & \gamma_3 N_3 & \gamma_6 N_6 \\ a_1^{2-s} & a_2^{2-s} & a_4^{2-s} & a_5^{2-s} & \gamma_3 a_3^{2-s} & \gamma_6 a_6^{2-s} \\ b_1 a_1^{1-s} & b_2 a_2^{1-s} & b_4 a_4^{1-s} & b_5 a_5^{1-s} & \gamma_3 b_3^{2-s} & \gamma_6 b_6^{2-s} \\ m_1 & m_2 & m_4 & m_5 & m_{33} & m_{66} \\ m_1 a_1^{1-s} & m_2 a_2^{1-s} & m_4 a_4^{1-s} & m_5 a_5^{1-s} & m_{33} a_3^{1-s} & m_{66} a_6^{1-s} \end{array} \right\| \quad (11)$$

где

$$a_j = a_j(\theta_1), \quad b_j = b_j(\theta_1), \quad c_j = c_j(\theta_1), \quad d_j = d_j(\theta_1)$$

$$m_{33} = \gamma_3(g_{11}\mu_3^2 - g_{16}\mu_3 + g_{12}) + \eta_{11}\mu_3 - \eta_{12}$$

$$m_{66} = \gamma_6(g_{11}\mu_6^2 - g_{16}\mu_6 + g_{12}) + \eta_{11}\mu_6 - \eta_{12}$$

Заменяя в пятой и шестой строках матрицы (11) m_j на f_j , а пятый и шестой элемент матрицы (10) на $\langle -D_0(r) \rangle$ и $\langle -D_1(r) \rangle$, получим коэффициенты и правые части системы (9) для граничных условий (5)-(5.2).

Для получения коэффициентов B_{ij} и правых частей системы (9), в случае граничных условий (5)-(5.3) и (5)-(5.4) соответствующая замена совершенно очевидна.

Определяя $\bar{\varphi}(s)$ из (9) и подставляя в (8), получим выражения для трансформант компонент напряжения и вектора электрической индукции

$$\begin{aligned} \langle \sigma_r \rangle &= \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) \\ \langle \sigma_\theta \rangle &= \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) \\ \langle \tau_{r\theta} \rangle &= - \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) \\ \langle D_\theta \rangle &= - \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) \\ \langle D_r \rangle &= \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s). \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Delta_1(s)$ (определитель матрицы (11), A_{ij} (алгебраические дополнения B_{ij}). Аналогичные выражения записываются и при других граничных условиях.

Характеристики электроупругого поля находим из трансформант $\langle \sigma_r \rangle, \dots, \langle D_r \rangle$ (которые определены в той же области, что и преобразования Меллина внешних воздействий) с помощью обратного преобразования Меллина, путь интегрирования которого лежит в полосе

$$\max_{\operatorname{Re} s_k < 1} (\operatorname{Re} s_k) < c < \min_{\operatorname{Re} s_k \geq 1} (\operatorname{Re} s_k) \quad (13)$$

где s_k ($k=1, 2, \dots$) (полюсы $\langle \sigma_r \rangle, \dots, \langle D_r \rangle$).

Явный вид $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, D_\theta$ и D_r может быть получен численным интегрированием, но для их асимптотического исследования при $r \rightarrow 0$ дополним путь интегрирования (12) влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах. В результате получим [10, 11]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left(\langle \sigma_r \rangle r^{-s}, s_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_{k-1}} G_{rkn}(\theta) (\ln r)^n \\ &===== \\ D_r &= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left(\langle D_\theta \rangle r^{-s}, s_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_{k-1}} H_{rkn}(\theta) (\ln r)^n \end{aligned} \quad (14)$$

где N_k (кратность полюсов s_k , а $G_{km}(\theta), \dots, H_{km}(\theta)$ - гладкие функции угла θ , причем $\text{Re } s_k < 1$.

Если внешние воздействия равны нулю в некоторой окрестности вершины клина, то в области $\text{Re } s < 1$ нет полюсов $T_l(s)$ и все s_k этой области находятся среди нулей $\Delta(s)$. Следовательно, сингулярные члены в (14) определяются только нулями $\Delta(s)$ в полосе $0 < \text{Re } s < 1$. Если $\Delta(s)$ имеет нули только первого порядка, то в выражениях (13) отсутствуют множители $\ln r$.

Заметим, что при отсутствии пьезоэффекта $g_{ij} = 0$ каждая из рассматриваемых задач распадается на две независимые задачи: упругую задачу для анизотропного клина $L_4\varphi(x, y) = 0$ с граничными условиями (5) и электростатическую задачу $L_2\psi(x, y) = 0$ с одним из граничных условий (5.1)-(5.4).

При этом вместо (2) и (3) будем иметь

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \varphi_4(z_4) + \varphi_5(z_5) \quad (2')$$

$$\psi(x, y) = \psi_3(z_3) + \psi_6(z_6)$$

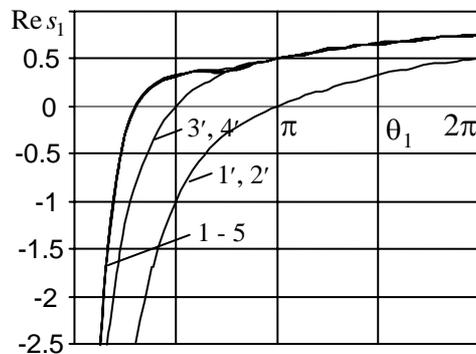
$$l_4(\mu)l_2(\mu) = 0 \quad (3')$$

а матрица (11) становится ступенчатой с диагональными клетками A_4 и A_2

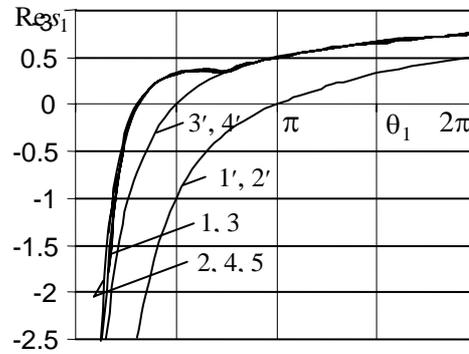
$$\begin{vmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$$

где A_4 (матрица четвертого порядка, A_2 (второго порядка. Корни $l_4(\mu) = 0$ зависят только от упругих коэффициентов, а корни $l_2(\mu) = 0$ (только от коэффициентов диэлектрической восприимчивости.

С целью выяснения влияния типа граничных условий на поведение



Фиг. 1



Фиг. 2

характеристик электроупругого поля вблизи вершины клина было проведено численное исследование зависимости $\text{Re } s_1$ от угла раствора клина, изготовленного из бифталата калия (фиг. 1) или бифталата рубидия (фиг.2). Электро-механические характеристики заимствованы из [14]. Номера кривых соответствуют номерам электрических граничных условий (кривые 1-4). Там же представлены соответствующие кривые для чисто упругой (кривая 5) и электростатических задач (кривые 1(-4) при отсутствии пьезоэффекта ($g_{ij} = 0$)).

Как следует из фиг. 1 и 2, кривые зависимости $\text{Re } s_1$ от угла θ_1 для четырех краевых задач электроупругости и чисто упругой задачи почти полностью

совпадают, т.е. электрические граничные условия в данном случае почти не влияют на поведение характеристик электроупругого поля в окрестности вершины клина. Между тем, в работах [1-4], где на обеих границах клина были заданы или напряжения, или перемещения и соответствующие электрические граничные условия, показано, что при смешанных электрических граничных условиях такое влияние существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М. Поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном плоском напряженном состоянии. // Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. ¹1. С. 34-39.
2. Саргсян А.М. Особенность связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Сб. научных трудов конференции, посвященной 91-летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М.Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998г. в г.Ереване. С. 169-175.
3. Саргсян А.М. Об особенностях связанного плоского электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении, Механика. 2002. Т.55. ¹2. С. 36-41.
4. Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий на поведение напряжений в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. ¹3. С. 74-81.
5. Мелкумян С.А. Первая основная задача для пьезоэлектрического клина. // В сб.: Вопросы оптимального уравнения, устойчивости и прочности механических систем. Ереван. 1997. С. 226-229.
6. Баблоян А.А., Мелкумян С.А. Смешанная задача электроупругости для пьезокерамического клина с электродами. // Докл. НАН Армении. 1999. ¹1. С. 45-51.
7. Баблоян А.А., Мелкумян С.А. Плоская задача электроупругости пьезокерамического клина. // Докл. НАН Армении. 1999. ¹2. С. 172-177.
8. Саргсян А.М. О решении краевых задач электроупругости для клиновидных областей. // Докл. НАН Армении.
9. Михайлов С.Е. Об одной плоской задаче для двух соединенных анизотропных клиньев. // МТТ. 1978. ¹4. С. 155-160.
10. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам. // МТТ. 1979. ¹6. С. 33-42.
11. Вековищева И.А. Плоская задача электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. // ПМ. 1975. ¹2. С. 85-89.
12. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. // ПМ. 1975. ¹5. С. 45-53.
13. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
14. Акустические кристаллы (под редакцией Шаскольской М.П.). М.: Наука. 1982. 632 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.12.2005