

УДК 539.3

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ
 КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ УСЛОВИИ ПОЛНОЙ
 ПЛАСТИЧНОСТИ

Варданян С.В.

Ս.Վ. Վարդանյան

Արագ պտտվող կոնական խողովակի պլաստիկական հոսքը լրիվ պլաստիկության պայմանի դեպքում

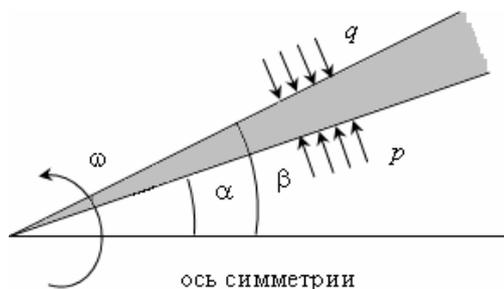
Ուսումնասիրվում է արագ պտտվող կոնական խողովակի պլաստիկական հոսքը լրիվ պլաստիկության պայմանի դեպքում: Ստացված է գծային արագության սահմանային արժեքը, որտեղից սկսված առաջանում է պլաստիկական հոսք: Որոշված է լարումների դաշտը: Ուսումնասիրված է դեֆորմացիաների արագությունների դաշտը:

S. V. Vardanyan

The plastic yielding of rapidly rotatory conical pipe with full plasticity condition

The plastic yielding of rapidly rotatory conical pipe with full plasticity condition are considered. The correspondent limiting value of linear velocity is defined. We have obtained relationships for stresses tensor. The field of displacements velocities is investigated.

Исследуется пластическое течение быстро вращающейся конической трубы при условии полной пластичности. Определено предельное значение линейной скорости, после чего возникает пластическое течение. Получены выражения тензора напряжений. Исследовано поле скоростей деформаций.



Пластическое течение быстро вращающейся конической трубы при условии пластичности Губера-Мизеса было исследовано М.А. Задояном [1]. В настоящей работе исследуется предельное пластическое состояние той же задачи при условии полной пластичности.

Для исследования пластического состояния конической трубы введем

сферическую систему координат. Во вращающейся трубе центробежная сила, направленная перпендикулярно к оси вращения, будет:

$$R = v\omega^2\rho \quad (1)$$

где ω — угловая скорость вращения, v — масса единицы объема материала трубы, ρ — расстояние от оси вращения. Массовые силы можно представить в форме:

$$R_r = R \sin \vartheta, \quad R_\vartheta = R \cos \vartheta \quad (2)$$

Предположим, что на внутренней и внешней поверхностях трубы имеем условия:

$$\sigma_\vartheta = p \text{ при } \vartheta = \alpha \text{ и } \sigma_\vartheta = q \text{ при } \vartheta = \beta \quad (3)$$

Условие полной пластичности, описываемое в рамках условия пластичности максимального касательного напряжения и определяющееся соответствием напряженного состояния ребра призмы Треска будет [2]:

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + 2k, \quad k = \text{const} \quad (4)$$

При условиях (4) можно записать:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma - \frac{2}{3}k + 2kn_1^2, \quad \sigma_{r\vartheta} = 2kn_1n_2 \\ \sigma_\vartheta &= \sigma - \frac{2}{3}k + 2kn_2^2, \quad \sigma_{\vartheta\varphi} = 2kn_2n_3 \\ \sigma_\varphi &= \sigma - \frac{2}{3}k + 2kn_3^2, \quad \sigma_{\varphi r} = 2kn_1n_3, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad \sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\vartheta + \sigma_\varphi}{3}\end{aligned}\quad (5)$$

Исходя из осесимметричности деформаций, имеем $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\vartheta\varphi} = 0$. Далее предположим, что рассматриваемая труба имеет малую конусность, тогда по всему объему трубы имеет место $\sigma_{r\vartheta} = 0$.

Следовательно, из (5) имеем три случая:

$$n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1 \quad (a)$$

$$n_1 = n_3 = 0, \quad n_2 = 1 \quad (б)$$

$$n_2 = n_3 = 0, \quad n_1 = 1 \quad (в)$$

В случае (а) имеем $\sigma_r = \sigma_\vartheta$, $\sigma_\varphi = \sigma_r + 2k$ и дифференциальные уравнения равновесия будут:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) + v\omega^2 r \sin^2 \vartheta &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r}(\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \vartheta + v\omega^2 r \sin \vartheta \cos \vartheta &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

Введем функцию напряжений следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\Phi}{r^2 \sin \vartheta}, \quad \sigma_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_\varphi = \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \vartheta} + v\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta \quad (7)$$

Уравнения равновесия в этом случае автоматически удовлетворяются, а из условий пластичности $\sigma_r = \sigma_\vartheta$, $\sigma_\varphi = \sigma_r + 2k$ получим:

$$-\frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{\Phi}{r^2 \sin \vartheta} + \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \vartheta} + v\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta = 2k \quad (8)$$

Введем вспомогательную функцию следующим образом: $\Phi = r\varphi(\rho)$, $\rho = r \sin \vartheta$ и для (8) получим:

$$\rho^2 \varphi'' + \rho \varphi' - \varphi - 2k\rho + v\omega^2 \rho^3 = 0 \quad (9)$$

откуда получаем: $\varphi(\rho) = C_1 \rho + C_2 \rho^{-1} - \frac{k}{2} \rho - \frac{v\omega^2}{8} \rho^3 + k \rho \ln \rho$ (10)

Следовательно, для тензора напряжений будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_r = \sigma_\vartheta &= 2k \ln(r \sin \vartheta) - \frac{1}{2} v\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \\ \sigma_\varphi &= 2k(1 + \ln(r \sin \vartheta)) - \frac{1}{2} v\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C\end{aligned}\quad (11)$$

Предположим, что чисто пластическое состояние появляется, начиная с минимального значения ω_0 с поверхности $r = r_0$. Пластическая область из поверхности $r = r_0$ распространяется по направлению к вершине трубы, т.е. при $\omega > \omega_0$ имеем $r < r_0$. Если для любого значения ω_* область пластичности определяется поверхностью $r = r_*$, то из решения (11) будем иметь:

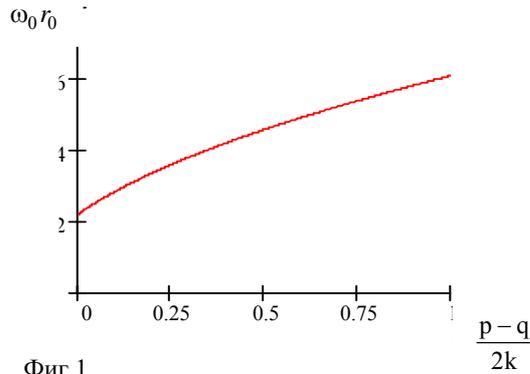
$$\omega_0 r_0 = \omega_* r_* \quad (12)$$

из первого граничного условия (3) получим:

$$\sigma_{\vartheta} = 2k \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} v \omega_0^2 r_0^2 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha) + p \quad (13)$$

а из второго граничного условия можно определить $\Omega^2 = \omega_0^2 r_0^2$

$$\omega_0 r_0 = \sqrt{\frac{4 \left(\frac{p-q}{2k} + \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)}{\frac{v}{k} (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)}} \quad (14)$$



Фиг.1

при $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{v}{k} = \frac{1}{2}$ формула (14) определяет кривую, показанную на фиг. 1

а для тензора напряжений окончательно получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_{\vartheta} &= 2k \left(\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \left(\frac{p-q}{2k} + \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) \right) \\ \sigma_{\varphi} &= 2k \left(\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \left(\frac{p-q}{2k} + \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) + 1 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Следует отметить, что решение (15) при $p = q = 0$, если принимать $k = \frac{\sqrt{3}}{2} k$, совпадает с решением М.А. Задояна [1], где было принято условие пластичности Губера-Мизеса. Полученное решение можно было получить сразу из уравнения равновесия.

Для определения поля скоростей деформаций рассмотрим условие несжимаемости материала и условия изотропии:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + 2 \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \vartheta = 0 \quad (16)$$

$$\varepsilon_{r\vartheta} (\sigma_r - \sigma_{\vartheta}) = 0, \quad \varepsilon_{r\varphi} (\sigma_{\varphi} - \sigma_r) = 0, \quad \varepsilon_{\vartheta\varphi} (\sigma_{\vartheta} - \sigma_{\varphi}) = 0 \quad (17)$$

при (а) из (17) следует, что $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\vartheta\varphi} = 0$. Функцию перемещений ищем в виде:

$u = r^2 \sin^2 \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial r}$, $v = r \sin^2 \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$. Тогда из условия несжимаемости имеем:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (1 + 2 \operatorname{ctg} \vartheta) \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = 0 \quad (18)$$

представляя функцию Ψ в форме $\Psi = X(r)Y(\vartheta)$ будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} r^2 + 4r \frac{X'}{X} = C \\ \frac{Y''}{Y} + (1 + 2 \operatorname{ctg} \vartheta) \frac{Y'}{Y} = -C \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим случай (б). В этом случае из (5), (17) получим $\sigma_r = \sigma_\varphi$, $\sigma_\vartheta = \sigma_r + 2k$. Из уравнения равновесия для тензора напряжений получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\varphi &= 2k \ln \left(\frac{r}{\sin \vartheta} \right) - \frac{1}{2} v \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \\ \sigma_\vartheta &= 2k \left(1 + \ln \left(\frac{r}{\sin \vartheta} \right) \right) - \frac{1}{2} v \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \end{aligned} \quad (20)$$

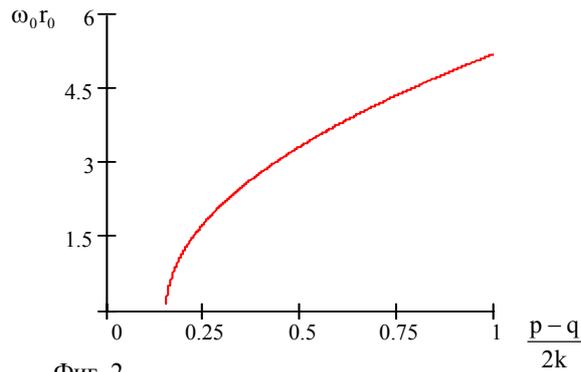
удовлетворяя граничным условиям, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\varphi &= -2k \left(\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} + \frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \left(\frac{p-q}{2k} - \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) \right) \\ \sigma_\vartheta &= -2k \left(\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} + \frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \left(\frac{p-q}{2k} - \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

причем для $\omega_0 r_0$ имеем:

$$\omega_0 r_0 = \sqrt{\frac{4 \left(\frac{p-q}{2k} - \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)}{\frac{v}{k} (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)}} \quad (22)$$

которое при $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{v}{k} = \frac{1}{2}$ определяет кривую, показанную на фиг. 2.



Фиг. 2

Из (6) и (17) имеем: $\varepsilon_{r\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta r} = 0$. Вводя функцию Φ следующим образом:

$$u = r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v = -r \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad \Phi = \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \quad (23)$$

в условие несжимаемости:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\Phi}{r^2 \sin^2 \vartheta} = 0 \quad (24)$$

подставляя выражение $\Phi = X(r)Y(\vartheta)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} r^2 + 4r \frac{X'}{X} &= C \\ \frac{Y''}{Y} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{Y'}{Y} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} &= C \end{aligned} \quad (25)$$

В случае (в) имеем $\sigma_\vartheta = \sigma_\varphi$, $\sigma_r = \sigma_\vartheta + 2k$. Для тензора напряжений имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi &= 2k(1 + 2 \ln r) - \frac{1}{2} v \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \\ \sigma_r &= 4k \ln r - \frac{1}{2} v \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \end{aligned} \quad (26)$$

из граничных условий получим:

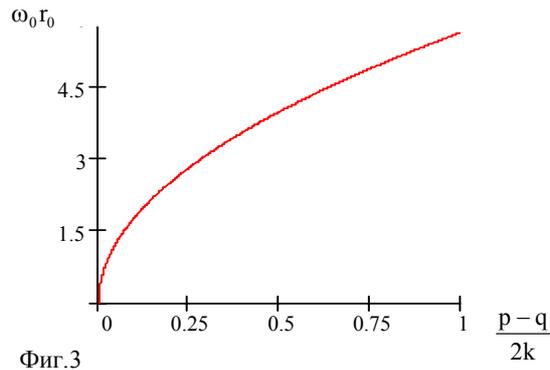
$$\begin{aligned} \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi &= -\frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} (p - q) \\ \sigma_r &= -\frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} (p - q) + 2k \end{aligned} \quad (27)$$

где для $\omega_0 r_0$ имеем:

$$\omega_0 r_0 = 2 \sqrt{\frac{\frac{p-q}{2k}}{\frac{v}{k} (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)}} \quad (28)$$

которому соответствует кривая, показанная на фиг. 3.

где $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{v}{k} = \frac{1}{2}$.



Фиг.3

Для определения поля скоростей деформаций имеем: $\varepsilon_{r\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta r} = 0$. Скорости перемещений представим в форме:

$$u = -r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = r \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \quad (29)$$

условие несжимаемости материала имеет вид:

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} - \frac{4}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = 0 \quad (30)$$

Разделяя переменные $\Psi = X(r)Y(\vartheta)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} r^2 + 4r \frac{X'}{X} &= C \\ \frac{Y''}{Y} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{Y'}{Y} &= C \end{aligned} \quad (31)$$

Решение первых уравнений систем (19), (25), (31) имеет вид:

$$X(r) = C_1 r^{\frac{-3+\sqrt{9+4C}}{2}} + C_2 r^{\frac{-3-\sqrt{9+4C}}{2}} \quad (32)$$

вторые уравнения при подстановке $\varphi(\vartheta) = \frac{Y'}{Y}$ приводятся к дифференциальному уравнению типа Риккати:

$$\varphi' + \varphi^2 + f(\vartheta)\varphi + g(\vartheta) = 0 \quad (33)$$

где

при (а) $f(\vartheta) = 1 + 2\operatorname{ctg}\vartheta$, $g(\vartheta) = C$

при (б) $f(\vartheta) = \operatorname{ctg}\vartheta$, $g(\vartheta) = -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} - C$

при (в) $f(\vartheta) = \operatorname{ctg}\vartheta$, $g(\vartheta) = -C$

при малых ϑ , принимая $\operatorname{ctg}\vartheta \approx \frac{1}{\vartheta}$, $\sin \vartheta \approx \vartheta$, из вторых уравнений (19), (25), (31)

получим: для (18) – вырожденное гипергеометрическое дифференциальное уравнение и для (25), (31) – бесселевые дифференциальные уравнения. Во всех трех случаях удельная осевая сила, приходящаяся на единицу площади, значительно

меньше относительно минимального значения $\frac{\sigma_\varphi}{2k}$, действующего в осевом сечении трубы.

Литература

1. Задоян М.А. Пластическое течение быстровращающейся конической трубы. // Докл. НАН РА. 2001. Т.101. N2. С. 122-127.
2. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 702с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.12.2005