

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ КОЛЬЦЕВОЙ
ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
ПО ВНУТРЕННЕМУ И ВНЕШНЕМУ КОНТУРАМ НОРМАЛЬНОЙ
НАГРУЗКИ

Аветисян А.С., Алексанян Д.Р.

Ա.Ս. Ավետիսյան, Դ.Ր. Ալեքսանյան

Ներքին և արտաքին եզրերով հավասարաչափ բաշխված նորմալ ուժերի ազդեցության տակ
շրջանային օղակաձև սալի կայունության մի խնդրի մասին

Դիտարկված է օղակային սալի հարթ ձևի կայունության կորուստի սիմետրիկ խնդիրը, երբ սալի ներքին և արտաքին եզրերի վրա, սալի միջին հարթության մեջ, շառավիղի ուղղությամբ ազդում են հավասարաչափ բաշխված ուժեր: Ուժերի մեծություններից և ուղղություններից, ինչպես նաև սալի երկրաչափական պարամետրերից կախված բացահայտված են բոլոր հնարավոր տարբերակները, որոնց դեպքում սալը կայունությունը չի կորցնի կամ կարող է կորցնել հարթ ձևի կայունությունը: Վերջին դեպքերում ստացված են ընդլայնական տեղափոխությունները որոշող բանաձևեր: Մասնավոր դեպքերում ստացված են կրիտիկական ուժը որոշելու համար տրանսցենդենտ հավասարումներ:

A.S. Avetisyan, D.R. Aleksanyan

The stability problem of the circular ring plate under the action of normal forces evenly distributed on internal and external contours

The stability problem of the circular ring plate under the action of normal forces evenly distributed on internal and external contours is considered. Depending the size and the direction of the forces, geometrical parameters of plate, discovered cases, when the plate can not lose the stability of the plane form or can. In the last cases are received formulas for lateral displacements. In particular are obtained transcendental equations for determination of critical forces.

Рассмотрена симметричная задача потери устойчивости плоской формы кольцевой пластинки, когда на внутренней и внешней границах пластинки в срединной плоскости действуют равномерно распределенные радиальные силы. В зависимости от отношения величин и характера действующих сил, а также геометрических параметров пластинки выявлены как случай устойчивости, так и случай возможной потери плоской формы пластинки с последующим определением поперечного перемещения. В частых случаях приведены в явном виде полученные трансцендентные уравнения для определения критических значений действующих сил.

Рассматривается симметричная задача потери устойчивости плоской формы круговой кольцевой пластинки толщиной h , когда на внутреннем $r = c$ и внешнем $r = a$ контурах срединной плоскости пластинки по направлению внешней нормали или в противоположном направлении действуют равномерно распределенные силы P_1 и P_2 .

В симметричной задаче плоского напряженного состояния теории упругости единственное отличное от нуля перемещение по направлению r определяется формулой [1-3].

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad c \leq r \leq a \quad (1.1)$$

Соответствующее этому перемещению статически эквивалентным напряжениям σ_r и σ_θ внутренние усилия определяются формулами

$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right); \quad N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (1.2)$$

где E, ν – модуль упругости материала пластинки, коэффициент Пуассона.

Удовлетворяя граничным условиям:

$$N_r|_{r=c} = P_1, \quad N_r|_{r=a} = P_2 \quad (1.3)$$

для постоянных c_1 и c_2 получим следующие значения:

$$c_1 = \frac{\nu^*}{2G} \frac{\bar{P}_2 - \bar{P}_1 \ell^2}{1 - \ell^2}; \quad c_2 = \frac{(\bar{P}_2 - \bar{P}_1)c^2}{2G(1 - \ell^2)} \quad (1.4)$$

где G – модуль сдвига материала пластинки, $\ell = \frac{c}{a} < 1$, $\nu^* = \frac{1-\nu}{1+\nu}$, $\frac{1}{3} < \nu^* < 1$,

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1}{h}, \quad \bar{P}_2 = \frac{P_2}{h}.$$

На основании (1.1) и (1.2) для внутренних усилий получим :

$$N_r = \frac{h}{1-\ell^2} \left[\bar{P}_2 \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right) - \bar{P}_1 \left(\ell^2 - \frac{c^2}{r^2} \right) \right] \quad c \leq r \leq a \quad (1.5)$$

$$N_\theta = \frac{h}{1-\ell^2} \left[\bar{P}_2 \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right) - \bar{P}_1 \left(\ell^2 + \frac{c^2}{r^2} \right) \right]$$

Возможность потери устойчивости плоской формы обусловлена наличием областей пластинки, где по крайней мере один из ненулевых усилий является сжимающим. В соответствии с этим исследуются границы областей кольцевой пластинки, где усилия N_r и N_θ , определяемые по (1.5), меняют знаки в зависимости от величин и знаков сил \bar{P}_1 и \bar{P}_2 , а также других параметров задачи.

1. Пусть \bar{P}_1 и \bar{P}_2 одного знака.

Если $\bar{P}_1 > 0$, $\bar{P}_2 > 0$, формулы (1.5) представим в виде

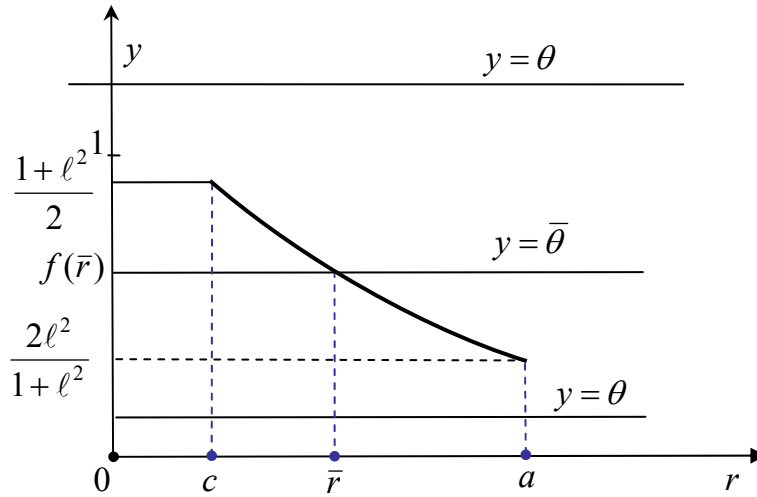
$$N_r(r) = \frac{\bar{P}_1 h}{1-\ell^2} \left[\theta \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right) + \left(\frac{c^2}{r^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) \right], \quad N_r > 0 \quad \text{при} \quad c \leq r \leq a$$

$$N_\theta(r) = -\frac{\bar{P}_1 h}{1-\ell^2} [f(r) - \theta] \cdot \frac{r^2 + c^2}{r^2} \quad \text{при} \quad c \leq r \leq a \quad (1.6)$$

$$\theta = \frac{\bar{P}_2}{\bar{P}_1}, \quad 0 < \theta < \infty$$

$f(r) = \frac{c^2 + r^2 \ell^2}{r^2 + c^2}$, $f'(r) = -\frac{2rc^2(1-\ell^2)}{(r^2 + c^2)^2} < 0$, следовательно, $f(r)$ уменьшается при $r \in [c, a]$.

График функции $f(r)$ приведен на фиг.1



Фиг.1

Рассмотрим три различных случая:

а) $\frac{1+l^2}{2} < \theta < \infty$

Из фиг. 1 и (1.6) следует, что $f(r) - \theta < 0$, $N_r > 0$, $N_\theta > 0$ в области кольца при $c \leq r \leq a$. В этом случае потеря устойчивости пластинки невозможна.

б) $0 < \theta < \frac{2l^2}{1+l^2}$. Из фиг. 1 и (1.6) следует, что $f(r) - \theta > 0$ и $N_r > 0$, $N_\theta > 0$,

в) $\frac{2l^2}{1+l^2} < \theta < \frac{1+l^2}{2}$. Из фиг. 1 видно, что существует некоторое значение переменной $r = \bar{r}$, $c < \bar{r} < a$, при котором $f(\bar{r}) - \bar{\theta} = 0$. В этом случае $N_\theta < 0$ при $r < \bar{r}$, следовательно, потеря устойчивости возможна.

В случае, если обе силы являются сжимающими $\bar{P}_1 < 0$, $\bar{P}_2 < 0$ из (1.6) следует, что $N_r < 0 \quad \forall r \in [c, a]$, $N_\theta > 0$ в области $r \in [c, \bar{r}]$, $N_\theta < 0$ в области $r \in [\bar{r}, a]$. Потеря устойчивости пластинки возможна.

Следует отметить, что в случае положительных $\bar{P}_1 > 0$, $\bar{P}_2 > 0$ сил при фиксированном значении \bar{P}_2 увеличение \bar{P}_1 приводит к расширению области с сжимающим усилием $N_\theta < 0$, а в случае $\bar{P}_1 < 0$, $\bar{P}_2 < 0$ при фиксированном значении \bar{P}_1 увеличение $|\bar{P}_2|$ приводит к расширению области с растягивающим усилием $N_\theta > 0$.

2. Допустим, что $\bar{P}_1 \neq 0$, $\bar{P}_2 \neq 0$ различного знака. В этом случае (1.5) представим в виде

$$N_r = \frac{h\bar{P}_1}{1-\ell^2} \left[(1+\theta) \frac{c^2}{r^2} - (\ell^2 + \theta) \right] \quad (2.1)$$

$$N_\theta = -\frac{h\bar{P}_1}{1-\ell^2} \left[\theta \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right) + \ell^2 + \frac{c^2}{r^2} \right]$$

где $\frac{\bar{P}_2}{\bar{P}_1} = -\theta$, $0 < \theta < \infty$

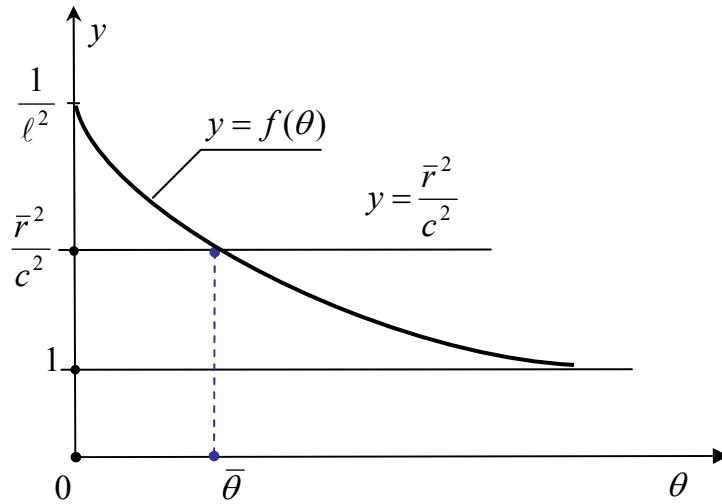
Усилие N_θ имеет противоположный от \bar{P}_1 знак для $\forall r \in [c, a]$: $N_\theta > 0$ при $\bar{P}_1 < 0$ и $N_\theta < 0$ при $\bar{P}_1 > 0$.

В области $[c, a]$ усилие N_r может менять знак. Представим N_r в виде

$$N_r = -\frac{h\bar{P}_1}{1-\ell^2} \left[f(\theta) - \frac{r^2}{c^2} \right] \frac{c^2(\theta + \ell^2)}{r^2} \quad (2.2)$$

где $f(\theta) = \frac{1+\theta}{\theta + \ell^2}$ при $0 < \theta < \infty$, $f(\theta)$ – убывающая функция.

График функции $f(\theta)$ приведен на фиг. 2.



Фиг. 2

Из фиг. 2 видно, что в области $c < r < a$ всегда найдется такое значение $\theta = \bar{\theta}$, при котором $\frac{r^2}{c^2} = f(\bar{\theta})$.

При $0 < \theta < \bar{\theta}$ $f(\theta) - \frac{r^2}{c^2} > 0$, если $r < \bar{r}$. N_r имеет тот же знак, что и \bar{P}_1 .

При $\bar{\theta} < \theta < \infty$ $f(\theta) - \frac{r^2}{c^2} < 0$, если $r > \bar{r}$, N_θ имеет противоположный \bar{P}_1 знак.

Таким образом, независимо от знака \bar{P}_1 , в кольцевой пластинке имеются области, где усилия отрицательны, следовательно, возможна потеря устойчивости пластинки.

Отметим, что задачи устойчивости круговой кольцевой пластинки в двух предельных случаях: 1. Когда $P_1 = 0$, $P_2 < 0$ и 2. Когда $P_2 = 0$, $P_1 > 0$ рассмотрены в работах [4-5].

3. В случае $\bar{P}_1 > 0$, $\bar{P}_2 > 0$ для определения поперечного перемещения пластинки получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w = \frac{h\bar{P}_1}{(1-\ell^2)D} \left\{ \left[(\theta - \ell^2) + \frac{c^2}{r^2}(1-\theta) \right] \frac{d^2 w}{dr^2} + \right. \\ \left. + \left[(\theta - \ell^2) - \frac{c^2}{r^2}(1-\theta) \right] \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

при условии $0 < \theta < \frac{1+\ell^2}{2} < 1$ или $0 < \frac{\bar{P}_2}{\bar{P}_1} < \frac{1+\ell^2}{2}$

Здесь $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость

пластинки.

Рассмотрим следующие случаи:

а) В случае $\theta - \ell^2 > 0$ или $\ell^2 < \theta < \frac{1+\ell^2}{2}$ уравнение (3.1) представим в виде

$$\Delta \Delta w = \beta_1^2 \left[\left(1 + \frac{d_1^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \left(1 - \frac{d_1^2}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \quad (3.2)$$

где

$$\beta_1^2 = \frac{h\bar{P}_1}{(1-\ell^2)D} (\theta - \ell^2), \quad d_1^2 = \frac{c^2(1-\theta)}{\theta - \ell^2}$$

Замена в (3.2) переменной $\beta_1 r = x_1$ приводит к уравнению

$$\Delta_x \Delta_x w - \left(1 + \frac{\beta_1^2 d_1^2}{x_1^2} \right) \frac{d^2 w}{dx_1^2} - \left(1 - \frac{\beta_1^2 d_1^2}{x_1^2} \right) \frac{1}{x_1} \frac{dw_1}{dx_1} = 0 \quad (3.3)$$

где

$$\Delta_x = \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{1}{x_1} \frac{d}{dx_1}$$

Обозначая $w'(x_1) = z$, уравнение (3.3) можно привести к виду

$$x_1 \left[x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2) z \right]' - \left[x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2) z \right] = 0 \quad (3.4)$$

где $\eta^2 = 1 + \beta_1^2 d_1^2$

$$\text{Интегрируя (3.4), получим } x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2) z = cx_1 \quad (3.5)$$

Общее решение (3.5) представляется в форме

$$z = C_1 I_\eta(x_1) + C_2 K_\eta(x_1) + C \left[I_\eta(x_1) \int K_\eta(x_1) dx_1 - K_\eta(x_1) \int I_\eta(x_1) dx_1 \right] \quad (3.6)$$

где $I_\eta(x_1)$, $K_\eta(x_1)$ – цилиндрические функции мнимого аргумента с действительным индексом [6].

Поперечное перемещение w пластинки будет

$$w = \int \left[C_1 I_\eta(x_1) + C_2 K_\eta(x_1) \right] dx_1 + \\ + C \int \left[I_\eta(x_1) \int K_\eta(x_1) dx_1 - K_\eta(x_1) \int I_\eta(x_1) dx_1 \right] dx_1 + E_o \quad (3.7)$$

б) Если $\theta - \ell^2 < 0$ или $0 < \theta < \ell^2$, уравнение (3.1) представим в виде

$$\Delta \Delta w + \beta_2^2 \left[\left(1 - \frac{d_2^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \left(1 + \frac{d_2^2}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] = 0 \quad (3.8)$$

где

$$\beta_2^2 = \frac{(\ell^2 - \theta) h \bar{P}_1}{(1 - \ell^2) D}, \quad d_2^2 = \frac{c^2 (1 - \theta)}{\ell^2 - \theta}$$

Обозначение $\beta_2 r = x_2$ приводит (3.8) к виду

$$x_2 \left[x_2^2 z'' + x_2 z' - (\xi^2 - x_2^2) z \right]' - \left[x_2^2 z'' + x_2 z' - (\xi^2 - x_2^2) z \right] = 0 \quad (3.9)$$

где

$$\xi^2 = 1 + \beta_2^2 d_2^2, \quad z = w'(x_2)$$

Решение уравнения (3.9) имеет вид

$$z = \bar{C}_1 J_\xi(x_2) + \bar{C}_1 Y_\xi(x_2) + \frac{C_o \pi}{2} \int \left[-J_\xi(x_2) \int Y_\xi(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + Y_\xi(x_2) \int J_\xi(x_2) dx_2 \right] \quad (3.10)$$

Прогиб w пластинки получается в виде

$$w = \int \left[\bar{C}_1 J_\xi(x_2) + \bar{C}_1 Y_\xi(x_2) \right] dx_2 + \frac{C_o \pi}{2} \int \left[-J_\xi(x_2) \int Y_\xi(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + Y_\xi(x_2) \int J_\xi(x_2) dx_2 \right] dx_2 + F_o \quad (3.11)$$

Здесь $J_\xi(x_2)$, $Y_\xi(x_2)$ – функции Бесселя первого и второго рода.

с) Если $\theta = \ell^2 < \frac{1 + \ell^2}{2}$, для определения поперечного перемещения w пластинки получается уравнение типа Эйлера:

$$\Delta \Delta w - \frac{h\bar{P}_1 c^2 (1-\theta)}{(1-\ell^2)D} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right] = 0 \quad (3.12)$$

Замена переменной $\frac{r}{a} = x$ ($\ell \leq x \leq 1$) приводит (3.12) к уравнению

$$w^{IV} + \frac{2}{x} w''' - \frac{1}{x^2} (1+\beta^2) w'' + (1+\beta^2) \frac{1}{x^3} w' - 0 \quad (3.13)$$

где $\beta^3 = \frac{c^2 P_1}{D}$.

Общее решение уравнения (3.13) имеет следующий вид:

$$w = A_1 + A_2 x^2 + A_3 x^{1+k} + A_4 x^{1-k} \quad (3.14)$$

где $k = \sqrt{1+\beta^2}$

Решение (3.14) должно удовлетворять граничным условиям на контурах $r = c$ и $r = a$ ($x = \ell, x = 1$):

В случае заземленных контуров пластинки –

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x = \ell \text{ и } x = 1 \quad (3.15)$$

В случае шарнирного закрепления контуров –

$$w = 0, \quad M_r = 0 \quad \text{при } x = \ell \text{ и } x = 1 \quad (3.16)$$

При условиях (3.15) для определения постоянных A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) получается система линейных однородных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ 2A_2 + (1+k)A_3 + (1+k)A_4 = 0 \\ A_1 + \ell^2 A_2 + \ell^{1+k} A_3 + \ell^{1-k} A_4 = 0 \\ 2\ell A_2 + (1+k)\ell^k A_3 + (1-k)\ell^{-k} A_4 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

А при условиях (3.16) – система

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ 2(1+\nu)A_2 + (1+k)(\nu+k)A_3 + (1-k)(\nu-k)A_4 = 0 \\ A_1 + \ell^2 A_2 + \ell \cdot \ell^k A_3 + \ell \cdot \ell^{-k} A_4 = 0 \\ 2\ell(1+\nu)A_2 + (1+k)(\nu+k)\ell^k A_3 + (1-k)\ell^{-k} A_4 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Из условия существования нетривиального решения (3.17) и (3.18) получим соответственно

$$-4k\ell + (1+k^2)(1-\ell^2)\text{sh}(k \ln \ell) + 2k(1+\ell^2)\text{ch}(k \ln \ell) = 0 \quad (3.19)$$

$$2k(1+\nu)^2 \left[2\ell - (1+\ell^2)\text{ch}(k \ln \ell) \right] + (1-\ell^2) \left[(1-k^2)(\nu^2 - k^2) - \right. \\ \left. - 2(1+\nu)(\nu+k^2) \right] \text{sh}(k \ln \ell) = 0 \quad (3.20)$$

Решая трансцендентные уравнения (3.19) и (3.20) относительно k и определив минимальное большее единицы значение вещественного корня, можем определить и критическое значение силы $(\bar{P}_1)_{\text{кр}}$, при котором кольцевая пластинка с

защемленными или шарнирно закрепленными контурами теряет устойчивость плоской формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575с.
2. Тимошенко С.П., Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971, 807с.
3. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Наука, 1971. 334с.
4. Хачатрян А.А. Устойчивость круговой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру. // Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1966. Т.19. №6. С. 9-16.
5. Хачатрян А.А. Об устойчивости кольцевой пластинки под действием растягивающих сил, приложенных по внутреннему контуру. Изв. НАН Армении, Механика. 1997. Т. 50. №2. С. 46-53.
6. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М.: Наука, 1949.

Министерство Науки и Образования РА
Русско-Армянский (Славянский)
Государственный университет (РАУ)

Поступила в редакцию
31.03.2006