ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №3, 2006 Механика

УДК 539.3, 624.04

ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ ՎԵԲԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ասատրյան Վ.Մ., Բաբլոյան Ա.Հ.

В.М. Асатрян, А.А. Баблоян
Асимптотические формулы для корней функций Вебера

В работе получены общие асимптотические формулы для вычисления корней функций Вебера. В частных случаях, которые часто встречаются в задачах теории упругости, эти формулы приведены с высокой точностью. Для полноты, в конце приведена асимптотическая формула для корней бесселевых функций.

V.M. Asatryan, A.H. Babloyan
Asymptotic formulas for roots of Weber’s function

The work results in general asymptotic formulas for roots calculation of Weber’s function. In some cases, which are of frequent occurrences in problems of elasticity theory, this formulas are brought with high accuracy. To ensure completeness the final part of the work includes the asymptotic formula for roots of Bessel’s function

Աշխատանքում ստացված են ընդհանուր ասիմպտոտիկ բանաձևեր Վեբերի ֆունկցիաների արմատների որոշման համար: Առաձգականության տեսության մեջ հանդիպող մի շարք դեպքերի համար ասիմպտոտիկ բանաձևերը բերված են ավելի բարձր ճշտությամբ: Վերջում բերված է բանաձև Բեսսելի ֆունկցիաների արմատների որոշման համար: Բոլոր բանաձևերի բացարձակ սխալը, սկսած 10-րդ արմատից, չի գերազանցում 10^{-12} –ից:

Առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրների լուծումները վերջավոր չափերով սնամեջ գլանի համար արտահայտվում են Ֆուրյե-Դինիի շարքերով ըստ Վեբերի ֆունկցիաների: Այդ շարքերի թվային արժեքները ստանալու համար անհրաժեշտ է ունենալ Վեբերի ֆունկցիաների արմատների արժեքները [1-4]:

Առաջին մի քանի արմատները կարելի է հաշվել ԷՀՄ-ների օգնությամբ, իսկ մնացած արմատների համար անհրաժեշտ է ստանալ այնպիսի ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք տալիս են արմատի արժեքը այնքան ավելի ճիշտ, որքան մեծ է արմատի համարը (կամ արժեքը):

Վեբերի ֆունկցիաները ունեն հետևյալ տեսքը

$$W_{n,m}(z,a) = J_n(z)Y_m(a z) - Y_n(z)J_m(a z) \tag{1}$$

որտեղ $J_n(z)$-ը և $Y_n(z)$-ը Բեսսելի առաջին և երկրորդ սեռի իրական արգումենտով ֆունկցիաներն են [1-4], a-ն սնամեջ գլանի շառավիղների հարաբերությունն է՝ $a = R_1 / R_2$ ($a = R_2 / R_1$), իսկ $z = \beta_k R_2$: Վեբերի մի քանի ֆունկցիաների արմատների արժեքները բերված են [1] և [2]-ում:

Արմատների ասիմպտոտիկ բանաձևերը ստանալու համար օգտվենք Բեսսելի ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ բանաձևերից [1-4], երբ $z >> n$

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[P_n(z)\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-Q_n(z)\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$Y_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[P_n(z)\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+Q_n(z)\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad (2)$$

որտեղ

$$P_n(z)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p C(n,2p)(2z)^{-2p}$$

$$Q_n(z)=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1} C_n(n,2p-1)(2z)^{-2p+1}$$

$$C(n,0)=1, \quad C(n,m)=\prod_{p=1}^{m}(4n^2-(2p-1)^2)\left(2^{2m}\Gamma(m+1)\right)^{-1} \qquad (3)$$

Տեղադրելով այս արժեքները (1) –ի մեջ $W_{n,m}(z,a)$-ի համար կստանանք հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը

$$W_{n,m}(z,a) \approx \frac{2}{\pi z\sqrt{a}}\left[a(n,m,z)\cos(0.5(m-n)\pi+(a-1)z)+\right.$$

$$\left.+\,b(n,m,z)\sin(0.5(m-n)\pi+(a-1)z)\right] \qquad (4)$$

$$a(n,m,z)=-P_n(a\,z)Q_m(z)+P_m(z)Q_n(a\,z)$$

$$b(n,m,z)=P_m(z)P_n(a\,z)+Q_m(z)Q_n(a\,z)$$

Տեղադրելով $P_n(z)$ և $Q_m(z)$ ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ արժեքները (3)-ից (4)-ի մեջ $a(n,m,z)$ և $b(n,m,z)$ ֆունկցիաների համար կստանանք հետևյալ տեսքերը

$$a(n,m,z)=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}A_{2p-1}z^{2p-1}, \quad b(n,m,z)=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p A_{2p}z^{2p}$$

$$A_p(n,m,a)=\sum_{q=0}^{p}(-1)^q a^{p-q}c(m,p-q)c(n,q) \qquad (5)$$

Հտաքրքիր է նշել, որ այս երկու բանաձևերում գործակիցները որոշվում են մեկ ընդհանուր բանաձևով:

Հավասարացնելով $W_{n,m}(z,a)$ -ֆունկցիան զրոյի, (4) բանաձևից կստանանք հավասարում Վեբերի ֆունկցիայի արմատների որոշման համար

$$\mathrm{tg}(0.5(m-n)\pi+(a-1)z)=-\frac{a(z)}{b(z)} \qquad (6)$$

Այստեղից կստանանք

$$0.5(m-n)\pi+k\pi=s_{n,m}(z,a)$$

$$s_{n.m}(z,a)=(1-a)z-\mathrm{arctg}\frac{a(n,m,z)}{b(n,m,z)}=(1-a)z-\mathrm{arcctg}\frac{b(n,m,z)}{a(n,m,z)},$$

$$U_k=0.5(n-m)\pi+k\pi, \qquad (k=1,2,\ \ldots) \qquad (7)$$

Վերլուծենք $s_{n,m}(z,a)$ ֆունկցիան աստիճանային շարքի անվերջ հեռու կետի շուրջը

$$s_{n,m}(z,a) \approx (1-a)z + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{t_k(n)-a^{2k-1}t_k(m)}{c_k(4a\,z)^{2k-1}} \tag{8}$$

որտեղ

$$c_1 = 2\ ,\ \ c_2 = 6\ ,\ \ c_3 = 5\ ,\ \ c_4 = 14\ ,\ \ c_5 = 9\ ,\ \ c_6 = 11\ ,\ \ldots$$

$$\begin{gathered} t_1(n) = 1-4n^2\ ,\ \ t_2(n) = 25-104n^2+16n^4\ , \\ t_3(n) = 1073-4748n^2+1840n^4-64n^6\ , \\ t_4(n) = 375733-1721744n^2+899808n^4-98560n^6+1280n^8 \\ t_5(n) = 55384775-258836364n^2+155471968n^4-25420160n^6+ \\ +1155840n^8-7168n^{10} \\ t_6(n) = 24713030909-116862506264n^2+7574002603n^4- \\ -15063682304n^6+1085063936n^8-25073664n^{10}+86016n^{12}\ ,\ \ldots \end{gathered} \tag{9}$$

Շրջելով (8) շարքը Վեբերի ֆունկցիայի արմատների որոշման համար կստանանք հետևյալ մոտավոր բանաձևը

$$\begin{aligned} w_{n,m}(k,a) \approx{} & \frac{U_k}{1-a}+\frac{4n^2-1-a(4m^2-1)}{8aU_k}+\frac{a-1}{6}(31a-12a^2+31a^3-25a^4+ \\ & +48a^2m^2-152a^3m^2+104a^4m^2+112a^3m^4-16a^4m^4+104n^2-152an^2+ \\ & +48a^2n^2-192a^2m^2n^2-16n^4+112an^4-25)\left(\frac{1}{4aU_k}\right)^3-\frac{(a-1)^2}{15}(3219- \\ & -6938a+4279a^2-680a^3+680a^4-4279a^5+6938a^6-3219a^7- \\ & -2000a^2m^2+2720a^3m^2-3520a^4m^2+21124a^5m^2-32568a^6m^2+ \\ & +14244a^7m^2+3200a^4m^4-17360a^5m^4+19680a^6n^4-5520a^7m^4+ \\ & +5312a^5m^6-1664a^6m^6+192a^7m^6-14244n^2+32568an^2-21124a^2n^2+ \\ & +3520a^3n^2-2720a^4n^2+2000a^5n^2+8320a^2m^2n^2-14080a^3m^2n^2+ \\ & +14080a^4m^2n^2-8320a^5m^2n^2-12800a^4m^4n^2+1280a^5m^4n^2+5520n^4- \\ & -19680an^4+17360a^2n^4-3200a^3n^4-1280a^2m^2n^4+12800a^3m^2n^4-192n^6+ \\ & +1664an^6 5312a^2n^6)\left(\frac{1}{4aU_k}\right)^5+\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

որտեղ $U_k = 0.5(n-m)\pi + k\pi$

Այստեղ բերված են ասիմպտոտիկ բանաձևի առաջին չորս գումարելիները: Մնացած գումարելիները այստեղ չեն բերվում մեծածավալ լինելու պատճառով:

Առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրներում վերջավոր չափերով սնամեջ գլանի համար հանդիպում են Վեբերի հետևյալ ֆունկցիաները՝

1. $m = n = 0$, առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ գլանային մակերևույթների վրա տրված են տեղափոխումները:
2. $m = 1$, $n = 0$,առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ գլանային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են տեղափոխումները, իսկ մյուսի վրա՝ լարումները:
3. $m = 2$, $n = 1$,սնամեջ գլանի ոլորման խնդիր, երբ գլանային մակերևույթներից մեկի վրա տրված է տանգենցիալ տեղափոխումը, իսկ մյուսի վրա՝ լարումը:
4. $n = m$, ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիր սնամեջ գլանի համար, երբ գլանային մակերևույթների վրա տրված են տեղափոխումները կամ լարումները:
5. $m = n = 1$, առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ գլանային մակերևույթների վրա տրված են լարումները:
6. Լրիվության համար վերջում բերվում է նաև բանաձև Բեսսելի ֆունկցիաների արմատների որոշման համար:

Նշված դեպքերի համար ստացված են համապատասխան Վեբերի ֆունկցիաների արմատների որոշման ասիմպտոտիկ բանաձևեր:

Ստորև բերվում են այդ բանաձևերը:

1. $\underline{m = n = 0}$, $U_k = k\pi$, $W_{00}(z,a) = J_0(z)Y_0(az) - Y_0(z)J_0(az)$,

$$s_{00}(z,a) \approx z(1-a) + \frac{1-a}{8az} + \frac{25(a^3-1)}{6(4az)^3} - \frac{1073(a^5-1)}{5(4az)^5} + \frac{375733(a^7-1)}{14(4az)^7} -$$

$$- \frac{55384775(a^9-1)}{9(4az)^9} + \frac{24713030909(a^{11}-1)}{11(4az)^{11}} - \frac{15561514498082(a^{13}-1)}{13(4az)^{13}} +$$

$$+ \frac{5261793482424425(a^{15}-1)}{6(4az)^{15}} - \frac{14378802319925055947(a^{17}-1)}{17(4az)^{17}} + \dots \quad (11)$$

Արմատների որոշման համար ստացվում է

$$w_{00}(k,a) \approx \frac{U_k}{1-a} + \frac{a-1}{8aU_k} - \frac{25+a(19+25a)}{6}\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^3 +$$

$$+(0.209570313(1+a^4) + 0.177018229(a+a^3) + 0.180924479a^2)\left(\frac{a-1}{aU_k}\right)^5 -$$

$$(1.638065883(1+a^6) + 1.468172491(a+a^5) + 1.470715622(a^2+a^4) +$$

$$+1.456779262)\left(\frac{a-1}{aU_k}\right)^7 + (23.475127749972874(1+a^8) +$$

$$+21.72791066245427(a+a^7) + 21.725281403556703(a^2+a^6) +$$

$$+21.623844364711218(a^3+a^5) + 21.639106544615732a^4)\left(\frac{a-1}{aU_k}\right)^9 -$$

$$-(535.640519510616(1+a^{10}) + 505.0105621011054(a+a^9) +$$

$$+505.03391254577804(a^2+a^8)+503.84859815689737(a^3+a^7)+$$
$$+503.78632802419673(a^4+a^6)+503.5587875099925a^5)\left(\frac{a-1}{aU_k}\right)^{11}+$$
$$+(17837.279688947478(1+a^{12})+17011.359486378704(a+a^{11})+$$
$$+17015.289393444582(a^2+a^{10})+16994.217053440578(a^3+a^9)+$$
$$16992.273073135322(a^4+a^8)+16988.476337002183(a^5+a^7)+$$
$$+16998.897970820246a^6\left(\frac{a-1}{aU_k}\right)^{13}-(816737.8421910766(1+a^{14})+$$
$$+784946.7302433586(a+a^{13})+785175.9429553373(a^2+a^{12})+$$
$$784625.4272687394(a^3+a^{11})+784581.098093667(a^4+a^{10})+$$
$$+784500.8318031547(a^5+a^9)+784490.7724151777(a^6+a^8)+$$
$$+784471.7523808624a^7)\left(\frac{a-1}{aU_k}\right)^{15}+(49232732.339998595(1+a^{16})+$$
$$+47578264.82542957(a+a^{15})+47591969.57928655(a^2+a^{14})+$$
$$+47571610.02817833(a^3+a^{13})+47570444.79752855(a^4+a^{12})+$$
$$+47568209.096377365(a^5+a^{11})+47567799.821064845(a^6+a^{10})+ \qquad (12)$$
$$47567224.72263906(a^7+a^9)+47567270.50971424a^8)\left(\frac{a-1}{aU_k}\right)^{17}+\ldots$$

7. $\underline{m=1,\, n=0}$, $U_k=\pi(k+0.5)$,

$$W_{01}(z,a)=J_0(z)Y_1(az)-Y_0(z)J_1(az),$$

$$s_{01}(z,a)\approx z(1-a)-\frac{3+a}{8az}+\frac{25a^3+63}{6(4az)^3}-\frac{1073a^5+1899}{5(4az)^5}+(375733a^7+$$
$$+543483)\frac{1}{14(4az)^7}-\frac{55384775a^9+72251109}{9(4az)^9}+(24713030909a^{11}+ \qquad (13)$$
$$+30413055339)\frac{1}{11(4az)^{11}}-\frac{15561514498082a^{13}+18457090626294}{13(4az)^{13}}+\ldots$$

Այս դեպքում արմատները կլինեն

$$w_{01}(k,a) \approx \frac{U_k}{1-a} + \frac{3+a}{8aU_k} - \frac{(a-1)(25a^4 - 63 + 9a - 36a^2 - 31a^3)}{6(4aU_k)^3} +$$
$$+(a-1)^2(5697 - 7614a + 4797a^2 + 360a^3 + 2040a^4 + 2279a^5 - 6938a^6 +$$
$$+3219a^7)\frac{1}{15(4aU_k)^5} - (a-1)^3\left(\frac{375733a^{10} - 1353753a^2 - 543483}{229376} +\right.$$
$$+\frac{2324673a^3 + 7102539a}{1146880} - \frac{2583a^6 + 1443a^4}{5120} - \frac{1617.55a^7 + 75a^5}{2048} +$$
$$\left.+\frac{165071193a^8 - 17492527a^9}{3440640}\right)\left(\frac{1}{aU_k}\right)^7 + (a-1)^4\left(\frac{8027901}{262144} - \frac{263555433a}{2293760} +\right.$$
$$+\frac{151453773a^2}{917504} - \frac{249453297a^3}{2293760} + \frac{7917765a^4}{262144} - \frac{38193a^5}{17920} + \frac{16529a^6}{20480} -$$
$$-\frac{401a^7}{4096} + \frac{124633a^8}{26880} + \frac{163344025a^9}{16515072} - \frac{578200289a^{10}}{6881280} + \frac{833331317a^{11}}{5898240} -$$
$$\left.-\frac{394907279a^{12}}{4128768} + \frac{55384775a^{13}}{2359296}\right)\left(\frac{1}{aU_k}\right)^9 + \ldots \qquad (14)$$

3. $\underline{m=2,\, n=1}$, $U_k = \pi(k-0.5)$, $W_{12}(z,a) = J_2(z)Y_1(az) - Y_2(z)J_1(az)$,

$$s_{12}(z,a) \approx z(1-a) + \frac{3(5a-1)}{8az} + \frac{3(7-15a^3)}{2(4az)^3} - \frac{9(211+825a^5)}{5(4az)^5} + 27(20129 +$$
$$+70575a^7)\frac{1}{14(4az)^7} - 9(891989 + 2089575a^9)\left(\frac{1}{4az}\right)^9 + 81(375469819 +$$
$$+709642125a^{11})\frac{1}{11(4az)^{11}} - \frac{4374(4219728081 + 7094895875a^{13})}{13(4az)^{13}} + \ldots \qquad (15)$$

Արմատների համար կստանանք

$$w_{12}(k,a) \approx \frac{U_k}{1-a} + \frac{3(1-5a)}{8aU_k} + \frac{3(a-1)(7-a-60a^2+135a^3+15a^4)}{2(4aU_k)^3} +$$

$$+\frac{9(a-1)^2(211-282a-569a^2-200a^3+4200a^4-4875a^5-3150a^6+825a^7)}{5(4aU_k)^5} -$$

$$-27(a-1)^3\left(-\frac{20129}{229376}+\frac{263057a}{1146880}-\frac{61639a^2}{1146880}-\frac{135213a^3}{1146880}-\frac{213a^4}{1024}-\right.$$

$$\left.-\frac{465a^5}{2048}+\frac{1455a^6}{1024}-\frac{184185a^7}{229376}-\frac{244395a^8}{229376}-\frac{76275a^9}{229376}+\frac{70575a^{10}}{229376}\right)\left(\frac{1}{aU_k}\right)^7+$$

$$+9(a-1)^4\left(\frac{891989}{262144}-\frac{29283937a}{2293760}+\frac{12963429a^2}{917504}-\frac{3085609a^3}{2293760}-\frac{22425161a^4}{9175040}-\right.$$

$$-\frac{4209a^5}{3584}-\frac{12843a^6}{4096}-\frac{29529a^7}{4096}+\frac{39915a^8}{1792}+\frac{644985a^9}{1835008}-\frac{14487975a^{10}}{458752}+$$

$$\left.+\frac{15873975a^{11}}{917504}-\frac{8067375a^{12}}{458752}+\frac{2089575a^{13}}{262144}\right)\left(\frac{1}{aU_k}\right)^9+\ldots \quad (16)$$

4. $\underline{m=n}$, $U_k = \pi k$, $W_{nn}(z,a) = J_n(z)Y_n(az) - Y_n(z)J_n(az)$,

$$s_{nn}(z,a) \approx z(1-a) + \frac{(a-1)(4n^2-1)}{8az} + \frac{(a^3-1)(25-104n^2+16n^4)}{6}\left(\frac{1}{4az}\right)^3 +$$

$$+\frac{(a^5-1)(-1073+4748n^2-1840n^4+64n^6)}{5}\left(\frac{1}{4az}\right)^5 +$$

$$+\frac{(a^7-1)(375733-1721744n^2+899808n^4-98560n^6+1280n^8)}{14}\left(\frac{1}{4az}\right)^7 +$$

$$+(a^9-1)(-55384775+258836364n^2-155471968n^4+25420160n^6-$$

$$-1155840n^8+7168n^{10})\frac{1}{9(4az)}+\ldots \quad (17)$$

Արմատները կլինեն

$$w_{nn}(k,a) \approx \frac{U_k}{1-a} - \frac{(4n^2-1)(a-1)}{8aU_k} + (4n^2-1)(25+19a+25a^2-$$

$$-4n^2(1-5a+a^2))\frac{1}{6}\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^3 - \frac{4n^2-1}{15}(3219+2719a+2779a^2+2719a^3+$$

$$+3219a^4+(-1368+712a+232a^2+712a^3-1368a^4)n^2+(48-272a+$$

$$+688a^2-272a^3+48a^4)n^4)\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^5 + \frac{4n^2-1}{210}(5635955+5051453a+$$

$$+5060203a^2+5012253a^3+5060203a^4+5051453a^5+5635995a^6-$$

$$-(3282180+700188a+939588a^2+700188a^3+939588a^4+700188a^5+$$
$$+3282180a^6)n^2-(-368400+616080a-234000a^2+24720a^3-234000a^4+$$
$$+616080a^5-368400a^6)n^4-(4800-31936a+97984a^2-175296a^3+$$
$$+97984a^4-31936a^5+4800a^6)n^6)\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^7+\ldots \tag{18}$$

5. $\underline{m=n=1}$, $U_k=\pi k$, $W_{11}(z,a)=J_1(z)Y_1(az)-Y_1(z)J_1(az)$,

$$s_{11}(z,a)\approx z(1-a)+\frac{3(a-1)}{8az}-\frac{21(a^3-1)}{2(4az)^3}+\frac{1899(a^5-1)}{5(4az)^5}-$$
$$-\frac{543483(a^7-1)}{14(4az)^7}+8027901(a^9-1)\left(\frac{1}{4az}\right)^9-\frac{30413055339(a^{11}-1)}{11(4az)^{11}}+$$
$$\frac{18457090626294(a^{13}-1)}{13(4az)^{13}}-\frac{10139844510243441(a^{15}-1)}{10(4az)^{15}}+$$
$$+\frac{16317191917079376129(a^{17}-1)}{13(4az)^{17}}+\ldots \tag{19}$$

Արմատների որոշման համար ստացվում է

$$w_{11}(k,a)\approx\frac{U_k}{1-a}-\frac{3(a-1)}{8aU_k}+\frac{3(7+13a+7a^2)}{2}\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^3-\frac{9}{5}(211+351a+$$
$$+411a^2+351a^3+211a^4)\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^5+\frac{27}{70}(100645+139523a+157653a^2+$$
$$+165283a^3+157653a^4+139523a^5+100645a^6)\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^7-\frac{9}{35}(31219615+$$
$$+38962327+41235535a^2+42513847a^3+42907807a^4+42513847a^5+$$
$$+41235535a^6+38962327a^7+31219615a^8)\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^9+\frac{27}{385}(39424330995+$$
$$+46566273649a+47863436923a^2+48448937377a^3+48706283851a^4+$$
$$+487991116745a^5+48706283851a^6+48448937377a^7+47863436923a^8+$$
$$+46566273649a^9+39424330995a^{10})\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^{11}-\frac{162}{25025}(219320367009975+$$
$$+250805685295435a+254728135501967a^2+256058199723739a^3+$$
$$+256541093690151a^4+256793808867723a^5+256855706675695a^6+$$

$$+256793808867723a^7+256541093690151a^8+256058199723739a^9+$$
$$+254728135501967a^{10}+250805685295435a^{11}+$$
$$+219320367009975a^{12})\left(\frac{a-1}{4aU_k}\right)^{13}+\dots \qquad (20)$$

6. Բեսսելի ֆունկցիաներ, $U_k(\alpha,n)=\alpha-\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}+k\pi$,

$W_n(z,\alpha)=J_n(z)\cos\alpha+Y_n(z)\sin\alpha$,

$$s(z,\alpha)\approx z+\frac{4n^2-1}{8z}+\frac{(4n^2-1)(4n^2-25)}{6(4z)^3}+(4n^2-1)(1073-456n^2+$$
$$+16n^4)\frac{1}{5(4z)^5}+\frac{(4n^2-1)(-375733+218812n^2-24560n^4+320n^6)}{14(4z)^7}+$$
$$+\frac{(4n^2-1)(55384775-37297264n^2+6282912n^4-288512n^6+1792n^8)}{9(4z)^9}+$$
$$+(4n^2-1)(-24713030909+18010382628n^2-3698495520n^4+$$
$$+269700224n^6-6263040n^8+21504n^{10})\frac{1}{11(4z)^{11}}+(7780757249041-$$
$$-5951385479128n^2+1368164250864n^4-126122179840n^6+$$
$$+4832337664n^8-64542720n^{10}+135168n^{12})\frac{2(4n^2-1)}{13(4z)^{13}}+$$
$$+(-26308967412122125+20786014331368940n^2-5133691244537104n^4+$$
$$+543207384631744n^6-27014397118208n^8+$$
$$+611949724672n^{10}-5129220096n^{12}+7028736n^{14})\frac{(4n^2-1)}{30(4z)^{15}}+\dots \qquad (21)$$

Արմատների համար կստանանք

$$w(k,n,\alpha)\approx U_k-\frac{4n^2-1}{8U_k}-\frac{(4n^2-1)(28n^2-31)}{6(4U_k)^3}-(4n^2-1)(3779-3928n^2+$$
$$+1328n^4)\frac{1}{15(4U_k)^5}-(-6277237+6342972n^2-2461680n^4+$$
$$+444736n^6)\frac{(4n^2-1)}{210(4U_k)^7}-(2092163573-2048250192n^2+768167904n^4-$$
$$-158676224n^6+17970432n^8)\frac{(4n^2-1)}{315(4U_k)^9}-(-8249725736393+$$
$$+7930445824724n^2-2868634057632n^4+569853522560n^6-$$

$$-73510178048n^{8}+5726880768n^{10})\frac{(4n^{2}-1)}{3465(4U_{k})^{11}}-(423748443625564327-$$

$$-403389888372354024n^{2}+142871829329734032n^{4}-$$

$$-27286652600675072n^{6}+3372032930441472n^{8}-298235245946880n^{10}+$$

$$+16994075373568n^{12})\frac{(4n^{2}-1)}{337838(4U_{k})^{13}}-(-849353.5802991488+$$

$$+804138.2004246122n^{2}-281532.8756230916n^{4}+52549.18417467465n^{6}-$$

$$-6228.41904852873n^{8}+526.0783299187756n^{10}-33.93509282754174n^{12}+$$

$$+1.4775696999526142n^{14})\frac{4n^{2}-1}{U_{k}^{15}}-(50922546.24022268-$$

$$-48052788.61369455n^{2}+16711425.109904956n^{4}-3079836.960165454n^{6}+$$

$$+356272.4439722876n^{8}-28807.46247720099n^{10}+1770.1043194591132n^{12}-$$

$$-87.03574048565234n^{14}+2.992367187823731n^{16})\frac{4n^{2}-1}{U_{k}^{17}}+\ldots \qquad (22)$$

Վերջին բանաձևը քիչ անդամներով բերված է նաև [2,6]–ում, իսկ մի քանի արմատների մոտավոր արժեքները բերված են [1,4,6] գրքերում: Մեր ստացած (22) բանաձևը պարունակում է անհամեմատ ավելի շատ գումարելիներ, որի պատճառով այս բանաձևի կիրառումը ավելի նպատակահարմար է:

Բեսսելի ֆունկցիաների արմատների որոշման (22) բանաձևի սխալը, սկսած երկրորդ արմատից, չի գերազանցում 10^{-10}-ը: Իսկ Վեբերի ֆունկցիաների արմատների համար ստացված բոլոր բանաձևերի սխալը, սկսած 10-րդ արմատից, չի գերազանցում 10^{-12} –ը:

Այդ բանաձևերը տալիս են բավարար ճշտություն, երբ $a^{\pm 1}U_k >> 1$: Նշենք, որ Վեբերի ֆունկցիաների արմատների բանաձևը, երբ $k<10$, տալիս է վատ արդյունք, եթե $a<0.15$ և $a>7$ դեպքերում: Ստացված արդյունքները էապես օգտագործված են [5] աշխատանքում:

Գրականություն

1. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342с.
2. Бейтмен Г., Эрдеий А. Высшие трансцендентные функции. М.: 1966. 437с.
3. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функции. Т-1. М.: И.-Л. 1949. 631с.
4. Грей Э., Метюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: И.-Л, 1953. 371с.
5. Բաբլոյան Ա. Հ.,Ասատրյան Վ. Մ. Փոփոխական կտրվածքով բաղադրյալ լիսեռի կայունացած ոլորման տատանումները. // □Հայաստանի Շինարարների տեղեկագիր□. հատուկ թողարկում. N2[30], 2005 թ. էջ 16-20 :
6. Абрамовиц А., Липман А. И др. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука. 1929. 830с.

Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարան

Ընդունվել է խմբագրություն 14.02.2006