ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №2, 2006 Механика

УДК 539.3

РАСЧЕТ НА ФЛАТТЕР ВЯЗКОУПРУГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Худаяров Б.А.

Բ.Ա. Խուդայարով
Առաձգամածուցիկ եռաշերտ գլանային պանելների ֆլաթերի հաշվարկը

Դիտարկվում է գազի հոսքով շրջհոսվող առաձգամածուցիկ եռաշերտ գլանային պանելների ֆլաթերի խնդիրը: Պանելի տատանումները նկարագրվում են մասնակի ածանցյալներով ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումներով: Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով խնդիրը բերված է սովորական ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների, որոնց լուծումը գտնվում է թվային մեթոդով: Այդ մեթոդի հիման վրա մշակված է խնդրի թվային լուծման ալգորիթմ: Որոշված են եռաշերտ պանելների ֆլաթերի կրիտիկական արագությունները:

B. A. Khudayarov
Computation on Flutter of Viscoelastic sandwich of Cylindrical Panels

The flutter of viscoelastic sandwich of cylindrical panels streamlined by a gas current is investigated. The vibrations are described by integro-differential equations in partial derivatives. By the Bubnov-Galerkin method the problem is reduced to a system of ordinary integro-differential equations, which is solved by numerical method. Critical speeds of sandwich of panel’s flutter are defined.

Исследуется задача о флаттере вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей, обтекаемых потоком газа. Колебания панели описываются интегро-дифференциальными уравнениями (ИДУ) в частных производных. При помощи метода Бубнова-Галеркина задача сведена к исследованию системы обыкновенных ИДУ. Решение ИДУ находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. На основе этого метода разработан алгоритм численного решения задачи. Определены критические скорости флаттера трехслойных панелей.

1. Введение

Широкое применение композиционных материалов в авиационной технике привело к необходимости изучения задач оптимального проектирования тонкостенных конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами. В соответствии с этим представляет значительный интерес анализ особенностей по отношению к аналогичным задачам для упругих тонкостенных конструкций. Такой анализ интересен и важен ещё и потому, что наличие демпфирующих свойств вязкоупругих материалов может показаться достаточным, чтобы предпочесть их для создания соответствующих тонкостенных конструкций из какого-либо материала, обладающего требуемыми свойствами.

Имеется значительное число публикаций, посвященных решению задач расчета характеристик вязкоупругих тонкостенных конструкций (1-6(.

Колебания и устойчивость вязкоупругих систем является весьма актуальной по двум причинам. С одной стороны, это связано со все большим внедрением в авиационной промышленности и других отраслях машиностроения материалов, обладающих ярко выраженными вязкоупругими свойствами, а с другой стороны, при использовании наследственных моделей [4, 7] для описания внутреннего демпфирования материала уравнения колебаний упругих систем записывается в такой же форме, как и для вязкоупругих систем. Часто при рассмотрении упругих систем внутреннее трение материала учитывается с помощью модели Фойхта, хотя известно, что даже в системах с конечным числом степеней свободы большим единицы она приводит к некорректным результатам, поскольку для большинства материалов внутреннее трение фактически не зависит или, по крайней мере, слабо зависит от скорости колебаний на достаточно широком частотном диапазоне. В этом смысле более предпочтительной является модель материала, обладающего наследственными свойствами.

В предлагаемой статье рассматривается аэроупругая устойчивость вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей с жестким, сопротивляющимся поперечному сдвигу заполнителем, обтекаемых с внешней стороны сверхзвуковым потоком. На основе численного метода [8] описан алгоритм численного решения нелинейных задач вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей.

Ранее в работах [9-12] и других уже рассматривались подобные задачи для упругой трехслойной пластинки и оболочки в сверхзвуковом потоке газа.

2. Постановка задачи флаттера вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей и методы решения

Рассмотрим задачу о флаттере вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей со сторонами *a* и *b*, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа со скоростью V, направленной вдоль образующих. Аэродинамическое давление учитываем по поршневой теории [13].

Нелинейные уравнения движения вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей записываются в виде:

$$D(1-R^*)(1-\Theta h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\nabla^4\chi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right]+$$

$$+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right]-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right]-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-q=0$$

$$\nabla^4\Phi=E(1-R^*)h\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right]\right)^2-\right. \tag{1}$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right]\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right]-\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right]\right\}$$

Здесь $\chi(x,y,t)$–функция перемещений, связанная с прогибом $W(x,y,t)$ соотношением :

$$W=(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi$$

где $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$.

Величины D, Θ, β_3 характеризуют соответственно цилиндрическую жесткость трехслойного пакета, жесткость несущих слоев и жесткость заполнителя на сдвиг; h –толщина пакета; R^* –интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$: $R^*\varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$; $\Phi(x,y,t)$ –функция напряжений.

Поперечная нагрузка $q(x,y,t)$ складывается из сил инерции, сил аэродинамического демпфирования и аэродинамического давления

$$q(x,y,t) = -\Omega\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right] - B\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right] + \Delta p$$

где (–удельная масса трехслойного пакета; B=($\frac{p_{\infty}}{V_{\infty}}$; (–показатель политропы газа; p_∞ и V_∞ –соответственно давление и скорость звука в невозмущенном потоке.

Аэродинамическое давление Δp в случае одностороннего обтекания имеет вид

$$\Delta p = -\aleph p_\infty\left[M^*\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right] + \frac{\aleph+1}{4}M^{*2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-h^2\beta_3^{-1}\nabla^2)\chi\right]\right)^2 + \ldots\right]$$

где $M^* = V/V_\infty$ –число Маха для невозмущенного потока.

Будем искать приближенное решение системы (1) в виде

$$\chi(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\chi_{nm}(t)\varphi_{nm}(x,y)$$
$$\Phi(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\Phi_{nm}(t)\psi_{nm}(x,y) \qquad (2)$$

где функции $\varphi_{nm}(x,y)$, $\psi_{nm}(x,y)$ подобраны так, чтобы каждый член суммы (2) удовлетворял граничным условиям на кромках панелей, а ($_{nm}$(t), Φ_{nm}(t)–некоторые функции, подлежащие определению.

Учитывая координатные функции в виде

$$\varphi_{nm}(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}; \quad \psi_{nm}(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

подставляя (2) в уравнение системы (1) и применяя к этому уравнению метод Бубнова-Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов (2). Введя следующие безразмерные параметры

$$\frac{x}{a}, \quad \frac{y}{b}, \quad \frac{V_\infty}{a}t, \quad \frac{W}{h}$$

и сохраняя прежние обозначения, систему ИДУ сводим к уравнению относительно ($_{nm}$:

$$A_{kl}\ddot{\chi}_{kl}+B_{kl}\dot{\chi}_{kl}+(1-R^*)C_{kl}\chi_{kl}+V_*\sum_{n=1}^{N}F_{knl}\chi_{nl}+V_*^2\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}D_{k\ln mir}\chi_{nm}\chi_{ir}-$$

$$-\beta_1 p_1\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}F_{k\ln mir}\chi_{nm}(1-R^*)\chi_{ir}+\beta_1 p_1\lambda^2\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}K_{k\ln mir}(1-R^*)\chi_{nm}\chi_{ir}+$$

$$+p_1\sum_{n,i,j=1}^{N}\sum_{m,r,s=1}^{M}a_{k\ln mirjs}\chi_{nm}(1-R^*)\chi_{ir}\chi_{js}=0 \qquad (3)$$

$$\chi_{kl}(0)=\chi_{okl}, \qquad \dot{\chi}_{kl}(0)=\dot{\chi}_{okl}, \qquad \kappa=\overline{1,\mathrm{N}}; \qquad l=\overline{1,\mathrm{M}}$$

Здесь $\beta_1=\dfrac{b^2}{Rh}$; $\lambda=a/b$; A_{kl}, B_{kl}, C_{kl}, E_{kl}, F_{kln} , K_{klnmir}, F_{klnmir}, $a_{klnmirjs}$, p_1, V_*=($p_\infty a^3M^*/D$ –безразмерные параметры.

3. Численные результаты

Интегрируем систему (3) два раза по t, запишем ее в интегральной форме. Полагая затем $t=t_i$, $t_i=ih$, $i=1,2,\ldots$ (h=const) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления ($\chi_{ikl}=\chi_{kl}(t_i)$) получим следующие рекуррентные формулы при ядре Колтунова-Ржаницына

$$\left(R(t)=A\cdot\exp(-\beta t)\cdot t^{\alpha-1},\ 0<\alpha<1\right):$$

$$\left(A_{kl}+A_iB_{kl}\right)\chi_{ikl}=A_{kl}\left(\chi_{0kl}+\dot{\chi}_{0kl}\right)-\sum_{j=0}^{i-1}A_j(t_i-t_j)\times$$

$$\times\left\{V_*\sum_{n=1}^{N}F_{knl}\chi_{jnl}+V_*^2\sum_{n,i_1=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}D_{k\ln mi_1r}\chi_{jnm}\chi_{ji_1r}+C_{kl}\chi_{jkl}+\right.$$

$$-\frac{A}{\alpha}C_{kl}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}\chi_{j-skl}-\beta_1p_1\sum_{n,i_1=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}F_{k\ln mi_1r}\chi_{jnm}\chi_{ji_1r}+$$

$$+\frac{A}{\alpha}\beta_1p_1\sum_{n,i_1=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}F_{k\ln mi_1r}\chi_{jnm}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}\chi_{j-si_1r}+\beta_1p_1\lambda^2\sum_{n,i_1=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}K_{k\ln mi_1r}\chi_{jnm}\chi_{ji_1r}-$$

$$-\frac{A}{\alpha}\beta_1p_1\lambda^2\sum_{n,i_1=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}K_{k\ln mi_1r}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}\chi_{j-snm}\chi_{j-si_1r}+$$

$$+p_1\sum_{n,i_1,j_1=1}^{N}\sum_{m,r,s_1=1}^{M}a_{k\ln mi_1rj_1s_1}\chi_{jnm}\chi_{ji_1r}\chi_{jj_1s_1}-\frac{A}{\alpha}p_1\sum_{n,i_1j_1=1}^{N}\sum_{m,r,s_1=1}^{M}a_{k\ln mi_1rj_1s_1}\chi_{jnm}\times$$

$$\left.\times\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}\chi_{j-si_1r}\chi_{j-sj_1s_1}\right\}+B_{kl}\left(\chi_{0kl}t_i-\sum_{j=0}^{i-1}A_j\chi_{jkl}\right);$$

$$i=1,2,\ldots;\qquad k=\overline{1,N};\qquad l=\overline{1,M}\ ;$$

где

$$A_0 = A_i = h/2,\ A_j = h,\ j = \overline{1, i-1},\ B_0 = h^a/2$$

$$B_j = h^\alpha (j^\alpha - (j-1)^\alpha)/2,\ s = j,\ B_s = h^\alpha ((s+1)^\alpha - (s-1)^\alpha)/2,\ s \neq j$$

Результаты вычислений представлены в таблице.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость $V_{*кр}$, принимаем условие, что при этих скоростях амплитуда колебаний изменяется по гармоническому закону. При $V > V_{*кр}$ происходит колебательное движение с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению. В случае $V < V_{*кр}$, амплитуда колебаний затухает [14].

Из таблицы видно, что увеличение коэффициента вязкости *A* приводит к уменьшению критической скорости $V_{*кр}$ флаттера на 46%. При *A*=0 и *A*=0,1 скорость флаттера соответственно равна 938 и 509,5.

С увеличением сингулярного параметра (критическая скорость флаттера трехслойной цилиндрической панели увеличивается. Этот эффект более сильно заметен при значениях (=0,7 в отличие от значения (=0,1. Численные результаты показали, что влияние параметра затухания (в ядре наследственности на критическую скорость флаттера по сравнению с параметром вязкости *A* и сингулярности (оказалось незначительным, что еще раз подтверждает общеизвестные выводы – экспоненциальное ядро релаксации неспособно полностью описать наследственные свойства материала конструкции.

Увеличение параметра k_1 ($k_1 = h^2 \beta_3^{-1} / a^2$) приводит к существенному изменению $V_{*кр}$. Исследования были проведены при k_1=0,01; 0,03 и 0,05. Видно, что с уменьшением жесткости заполнителя на сдвиг (ростом коэффициента $к_1$) критическая скорость флаттера трехслойной панели уменьшается.

С ростом удлинения панели λ увеличивается протяженность панели в направлении течения и происходит сближение удлиненных краев панели. Последнее способствует повышению относительной жесткости системы и росту критической скорости флаттера, которое можно проследить по таблице.

Таблица

Зависимость критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров цилиндрической панели

A	α	β	λ	k_1	Θ	ε	$V_{*кр}$
0 0,001 0,01 0,1	0,25	0,05	1	0,02	0,05	0,1	938 816 620 509,5
0,1	0,2 0,5 0,7	0,05	1	0,02	0,05	0,1	457,5 604,5 624,5
0,1	0,25	0,01 0,1	1	0,02	0,05	0,1	510 509
		0,05	1,1				604,9

0,1	0,25		1,2 1,4	0,02	0,05	0,1	728 1083,75
0,1	0,25	0,05	1	0,01 0,03 0,05	0,05	0,1	541 487,5 297
0,1	0,25	0,05	1	0,02	0,01 0,08 0,5 0,8	0,1	502,2 514,9 587 637,2
0,1	0,25	0,05	1	0,02	0,05	0,5 5 10	510,5 517 521,5

Изучено влияние параметра Θ, характеризующее жесткость несущих слоев. Увеличение параметра Θ благоприятно влияет на флаттерные характеристики.

Также изучено влияние параметра ((аэродинамическое демпфирование). С ростом коэффициента (наблюдается повышение безразмерной критической скорости флаттера.

4. Заключение

В заключение отметим, что вязкоупругие свойства материала уменьшают критическую скорость флаттера трехслойных цилиндрических панелей. Увеличение жесткости заполнителя на сдвиг и жесткость несущих слоев приводит к возрастанию критической скорости. Увеличение жесткости несущих слоев в некоторых случаях влияет значительно слабее. Влияние увеличения жесткости несущих слоев и жесткости заполнителя на сдвиг в каждом конкретном случае следует оценивать специальным расчетом. Кроме того, следует иметь в виду, что увеличение изгибной жесткости несущих слоев и жесткости заполнителя на сдвиг требует дополнительного увеличения массы трехслойных конструкций типа цилиндрических панелей и делается только при крайней необходимости, когда другие способы увеличения критической скорости оказываются недостаточными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В.Д. Исследование динамической устойчивости вязкоупругих систем с помощью показателей Ляпунова // Изв. АН. МТТ. 2000. № 6. С. 82-89.
2. Бондарев Э.А., Будугаева В.А., Гусев Е.Л. Синтез слоистых оболочек из конечного набора вязкоупругих материалов // Изв. АН РФ. МТТ. 1998. № 1. С.173-181.
3. Кочнева Л.Ф. Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях. М.: Наука, 1979. 96 с.
4. Каминский А.А., Подильчук И.Ю. Об одном методе решения граничных задач линейной теории вязкоупругости // Прикладная механика. 1998. т.34. № 12. С. 77-85.
5. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Об одном методе решения квазистатических и динамических задач вязкоупругости // Прикладная механика. 1977. 13. № 4. С. 3–8.

6. Сорокин Е.С., Муравский Г.Б. Об учете упругих несовершенств материалов методами наследственной упругости // Строит. Механика и расчет сооружений. 1975. № 4. С. 41-46.
7. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. № 5. С. 867-871.
8. Смирнов А.И. Сверхзвуковой флаттер трехслойных пластин // ДАН СССР. 1968. Т. 183. № 3.–С.540-543.
9. Григолюк Э.И., Михайлов А.П. Флаттер трехслойных цилиндрических оболочек//Инженерный журнал. Т.V. Вып.6. –1965. –С.1087-1091.
10. Смирнов А.И. Собственные колебания и флаттер трехслойных цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. № 3. С.533-536.
11. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости нелинейно-упругих трехслойных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1961. № 5. С.96-99.
12. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6. С.733-755.
13. Худаяров Б.А. Численное решение задачи о флаттере вязкоупругих трехслойных пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. № 1. С. 59-62.

Ташкентский институт
ирригации и мелиорации

Поступила в редакцию
25.05.2005