

УДК 534.14.014

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ГАЗОВОГО
ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Оганян Г.Г.

Գ.Գ. Օհանյան

Անսեղմելի հեղուկում զազային պղպջակի ազատ ոչ գծային բաբախումները

Հետազոտված է մենակյաց գնդաձև պղպջակի վարքը մածուցիկ հեղուկում: Հենվելով նոսր պղպջակային կառուցվածք ունեցող խառնուրդի շարժումը նկարագրող պարզեցված հավասարումների վրա, դուրս է բերված քառակուսային ոչգծայնություն պարունակող տատանումների հավասարումը: Դիտարկված է ազատ բաբախումների խնդիրը և կառուցված են նրա մասնավոր ճշգրիտ լուծումները: Ցույց է տրված պարբերական տատանումների իրականացման հնարավորությունը, որը կարող է վերածվել հարմոնիկի:

G.G. Oganyan

The Nonlinear Free Oscillations of Gas-Bubble in a Noncompressible Fluid

The behavior of single spherically bubble in viscous fluid is investigation. The simplified equation for description of motion of rarefied mixture of bubble structure are used. Nonlinear equation of vibrations with quadratic nonlinearity is obtained. The exact particular it solutions are constructed.

Рассмотрено поведение одиночного сферического пузырька в вязкой жидкости. На основе упрощенной системы уравнений, описывающей поведение разреженной смеси пузырьковой структуры, выведено уравнение с квадратичной нелинейностью для исследования задачи свободных колебаний. Построены его точные частные решения, указывающие на возможность реализации периодических осцилляций, в пределе переходящих в гармонические. Показано, что при очень малых амплитудах осцилляций пузырька приближенное решение, полученное асимптотическим методом усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского, достаточно удовлетворительно согласуется с асимптотикой точного решения.

Полная непротиворечивая система уравнений, описывающая безграничное течение газожидкостной смеси пузырьковой структуры с учетом сил поверхностного натяжения, вязких и тепловых эффектов приведена в [1]. Без учета этих эффектов линейные уравнения пульсации пузырька в несжимаемой жидкости получены и аналитически исследованы в [2,3], а с их привлечением – в [1,4]. В нелинейной постановке численный анализ поведения воздушного пузырька, пульсирующего в воде, приведен в [3,4].

1. Исходные уравнения. Пусть одиночный сферически симметричный пузырек с неизменяемой массой идеального газа находится в безграничной вязкой несжимаемой жидкости, в которой эффекты теплообмена и силы поверхностного натяжения отсутствуют. При адиабатическом поведении газа в пузырьке радиальное движение жидкости около пузырька можно описать системой, состоящей из обыкновенного дифференциального уравнения, а также уравнений состояния и сохранения массы газа [1,2]

$$p_2 - p_1 = \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt}, \quad \rho_1 = \text{const} \quad (1.1)$$

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad \gamma = \frac{c_{p2}}{c_{r2}} \quad (1.2)$$

Здесь и далее индексы 1, 2 и 0 отнесены соответственно к жидкости, газу и состоянию покоя (начального равновесия), p – давление, ρ – плотность, R – радиус пузырька, c_p и c_v – удельные теплоемкости, γ – показатель адиабаты газа, μ – динамическая вязкость жидкости, t – время.

Предполагается, что в любой момент времени отклонения параметров системы пузырек-жидкость мало отличаются от своих значений в состоянии покоя

$$p_2 = p_0(1 + p'_2), \quad p_1 = p_0(1 + p'_1), \quad \rho_2 = \rho_{20}(1 + \rho'_2), \quad R = R_0(1 + R') \quad (1.3)$$

Здесь штрихи отнесены к возмущениям и в дальнейшем будут опущены. При упрощении системы (1.1), (1.2) в нелинейные слагаемые будут подставляться соотношения линейной акустики и в рассмотрении оставляются слагаемые до второго порядка малости включительно, т.е. как линейные, так и члены с квадратичной нелинейностью.

В рассматриваемом приближении подстановка разложений (1.3) в уравнения состояния и сохранения массы газа (1.2) дает

$$\rho_2 = -3R + 6R^2, \quad p_2 = -3\gamma R + \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2} R^2 \quad (1.4)$$

Аналогичное упрощение уравнения Рэлея-Лэмба (1.1) позволяет в случае пренебрежения эффектами взаимовлияния вязкости, дисперсии с нелинейностью записать его в виде

$$\frac{3\gamma}{\omega_{ar}^2} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\mu}{p_0} \frac{dR}{dt} - p_2 + p_1 = 0, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_1 R_0^2} \quad (1.5)$$

где ω_{ar} – адиабатическая частота Миннаерта. Комбинированием соотношения из (1.4) с уравнением (1.5) можно исключить из рассмотрения избыточное давление газа p_2 в пузырьке и получить уравнение

$$\ddot{R} + \delta \dot{R} + \omega_{ar}^2 R - \alpha R^2 + \frac{\omega_{ar}^2}{3\gamma} p_1(t) = 0, \quad \delta = \frac{4}{3\gamma} \frac{\mu}{p_0} \omega_{ar}^2, \quad \alpha = \frac{3\gamma+1}{2} \omega_{ar}^2 \quad (1.6)$$

Здесь точки над искомой функцией означают дифференцирование по t . Уравнение (1.6) при $p_1 = 0$ описывает свободные колебания, а при задании избыточного давления в жидкости, т.е. внешней силы $p_1(t)$ – вынужденные колебания пузырька. Оно может быть интерпретировано как уравнение, описывающее поведение нелинейного осциллятора с одной степенью свободы.

2. Свободные колебания. Недиссипативный случай $\delta = 0$. Принимается, что давление в жидкости вдали от пузырька постоянно, так что возмущение давления в ней отсутствует: $p_1 = 0$.

Умножая уравнение (1.6) на интегрирующий множитель \dot{R} , получим

$$\dot{R}^2 = \frac{3\gamma+1}{3} \omega_{ar}^2 \left(R^3 - \frac{3}{3\gamma+1} R^2 + \frac{2}{\gamma} \frac{c}{3\gamma+1} \right) = \frac{3\gamma+1}{3} \omega_{ar}^2 f(R) \quad (2.1)$$

Здесь c – постоянная интегрирования, существенно влияющая на число нулей функции $f(R)$ и, тем самым, на решения уравнения (2.1). Очевидно, что рассмотрению подлежат лишь положительно определенные ограниченные значения $f(R)$. В случае пузырьков воздуха кривые функции $f(R)$, построенные для различных значений параметра c , приведены на фиг.1.

Пусть функция $f(R)$ имеет три вещественных корня $b_3 < b_2 < b_1$, (фиг.1, кривые 2,3), или обладает одним действительным и одним действительным двукратным корнем $b_5 < b_4$ (фиг.1, кривая 1). Налагаемые требования равнозначны условию, по которому дискриминант

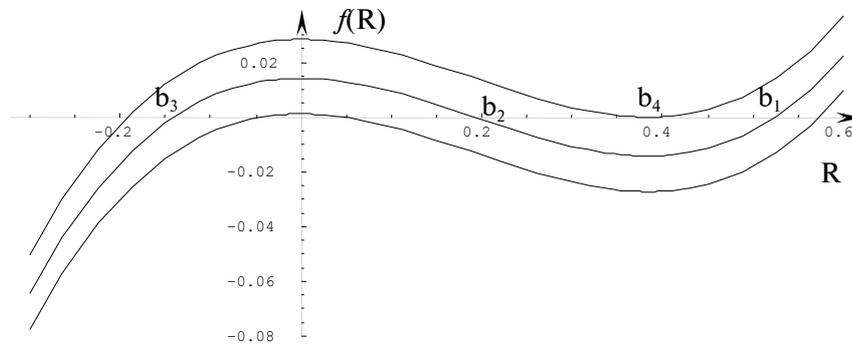
$$D = \frac{c}{\gamma^2(3\gamma+1)^2} \left[c - \frac{2\gamma}{(3\gamma+1)^2} \right]$$

приведенного кубического уравнения, получаемого из $f(R)$, не может быть положительным, т.е. $D \leq 0$. Отсюда следуют ограничения

$$0 < c \leq \frac{2\gamma}{(3\gamma+1)^2} \quad (2.2)$$

на величину постоянной c . В случае реализации знака равенства (фиг.1, кривая 1) уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{R}^2 = \frac{3\gamma+1}{3} \omega_{ar}^2 \left(R + \frac{1}{3\gamma+1} \right) \left(R - \frac{2}{3\gamma+1} \right)^2, \quad c = \frac{2\gamma}{(3\gamma+1)^2} \quad (2.3)$$



□

Фиг.1 Зависимость функции $f(R)$ от параметра интегрирования c для воздушного пузырька ($\gamma=1,4$). Кривым соответствуют значения: $1-c=2\gamma(3\gamma+1)^{-2}$, $2-c=\gamma(3\gamma+1)^{-2}$, $3-c=53,5\gamma[216(3\gamma+1)]^{-2}$.

Поскольку решение должно быть вещественным и ограниченным, из (2.3) определится интервал изменения искомой функции R

$$b_5 = -\frac{1}{3\gamma+1} < R < \frac{2}{3\gamma+1} = b_4$$

Интегрирование уравнения (2.3) дает формулу

$$R(t) = \frac{2}{3\gamma + 1} - \frac{3}{3\gamma + 1} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\omega_{ar}}{2} t \right) \quad (2.4)$$

при выводе которой постоянная повторного интегрирования определялась из условия, что в момент времени $t = 0$ состоянию покоя соответствует значение $R = b_3$. Поскольку $R(0) < R(\infty)$, то решение (2.4) описывает расширение пузырька, при этом изменение возмущенного радиуса во времени подчиняется поведению одиночного импульса.

В случае реализации строгого неравенства (2.2) уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\dot{R}^2 = \frac{3\gamma + 1}{3} \omega_{ar}^2 (b_1 - R)(b_2 - R)(R - b_3) \quad (2.5)$$

где b_1, b_2, b_3 —нули функции $f(R)$. Требование ограниченности и вещественности решения уравнения (2.5) определяет интервал изменения возмущения радиуса пузырька: $b_3 \leq R \leq b_2$. Проводя замену переменной

$$R = b_2 \sin^2 z + b_3 \cos^2 z$$

приведем уравнение (2.5) к виду

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{3\gamma + 1}{12} (b_1 - b_3) \omega_{ar}^2 \sqrt{1 - s^2 \sin^2 z}}, \quad s^2 = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3} < 1 \quad (2.6)$$

После интегрирования уравнения (2.6) от 0 до z получим эллиптический интеграл первого рода, при этом постоянная интегрирования, равная нулю, выбиралась из условия, когда $t \rightarrow 0$ $R \rightarrow b_3$, т.е. $z \rightarrow 0$. В силу определений эллиптического интеграла и родственных ему функций, решение уравнения (2.6) можно выразить через эллиптический косинус [5]

$$R(t) = b_2 - a \operatorname{cn}^2 \left(\frac{\Omega}{2} t, s \right), \quad \Omega = \sqrt{\frac{3\gamma + 1}{3} (b_2 - b_3) \frac{\omega_{ar}}{s}}, \quad a = b_2 - b_3 \quad (2.7)$$

Здесь a —амплитуда, Ω —частота пульсаций, s —модуль эллиптической функции Якоби, служащий мерой нелинейности. Как и следовало ожидать, частота Ω является функцией амплитуды. Решение (2.7) описывает изменение во времени поверхности одиночного пузырька, свободно пульсирующего в несжимаемой жидкости с периодом

$$T = \frac{4K(s)}{\Omega} = \sqrt{\frac{3}{3\gamma + 1} \frac{1}{b_1 - b_3} \frac{4K(s)}{\omega_{ar}}}$$

где $K(s)$ —полный эллиптический интеграл первого рода. Отсюда определится нелинейная угловая частота ω пульсации с произвольными амплитудами

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{K(s)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3\gamma + 1}{3} (b_1 - b_3) \frac{\omega_{ar}}{K(s)}}$$

В пределе, когда $b_1 \rightarrow b_2$, имеем $s=1$ и функция $f(R)$ имеет одно действительное $b_3 \equiv b_5$ и одно двукратное действительное $b_2 \equiv b_4$ решения. Тогда, в силу формул [5]

$$cn(\Omega t/2, 1) = ch^{-1}(\Omega t/2), \quad \Omega = \omega_{ar}$$

решение (2.7) переходит в (2.4).

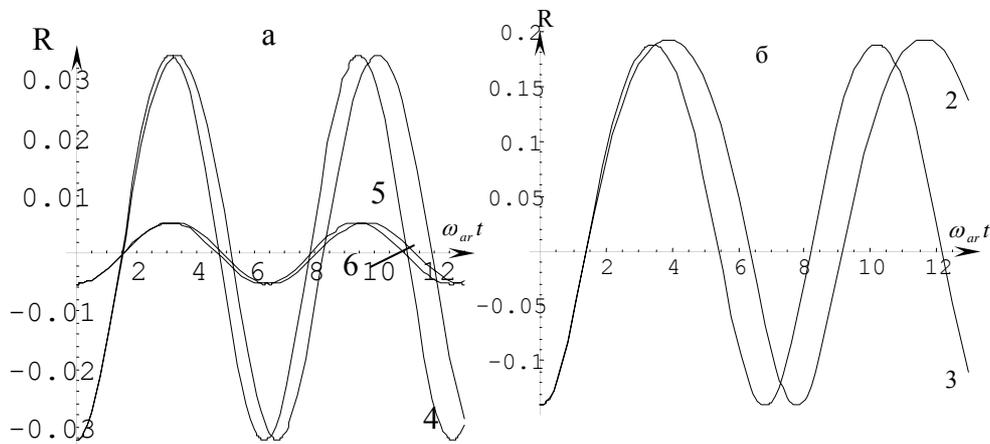
Наконец, исследуем другой предельный случай, когда $b_2 \rightarrow b_3$, но $b_2 \neq b_3$ и $s \ll 1$, т.е. случай пульсации с малыми амплитудами. Предварительно выведем некоторые необходимые соотношения. В рассматриваемом случае $c \ll 1$ с точностью до членов порядка c^2 будем иметь

$$b_1 = \frac{3}{3\gamma+1} \left[1 - \frac{2}{3\gamma} \left(\frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 c \right] = \frac{3}{3\gamma+1} \left[1 - \left(\frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 \frac{a^2}{4} \right]$$

$$b_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{2}{3\gamma} c} = \pm \frac{a}{2}, \quad c = \frac{3\gamma}{8} a^2$$

$$s^2 = \frac{3\gamma+1}{3} a \left[1 - \frac{3\gamma+1}{3} \frac{a}{2} + \left(\frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 \frac{a^2}{2} \right]$$

Теперь разложим эллиптический косинус сначала в ряд по параметру Якоби q , а затем $q(s)$ и $K(s)$ в ряды по малому параметру s [5]. Учитывая полученные связи, периодическое решение (2.7) выразится через тригонометрические функции



Фиг.2. Свободные пульсации воздушного пузырька при $\delta=0$ по точному (2.7) и приближенному (4.2) решениям. Для малой ($a=0.09243$, $s=0.38687$) и очень малой ($a=0.01064$, $s=0.13515$) амплитуд пульсации на фиг.2а им соответствуют кривые 1,4 и 5,6. В случае конечной ($a=0.33308$, $s=0.7071$) амплитуды решениям соответствуют кривые 2,3 фиг.2б.

$$R(t) = \bar{R} - \frac{a}{2} \left[\cos \omega t + \frac{3\gamma+1}{3} \frac{a}{8} \cos 2\omega t + \left(\frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 \frac{3}{256} a^2 (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \right]$$

$$\bar{R} = \frac{3\gamma+1}{3} \frac{a^2}{16} \left[1 + \left(\frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 \frac{a^2}{32} \right], \quad \omega = \omega_{ar} \left[1 - \frac{11}{64} \left(\frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 a^2 \right] \quad (2.8)$$

где \bar{R} – среднее значение возмущенного радиуса пузырька, ω – нелинейная частота пульсации с малыми амплитудами, являющаяся функцией от квадрата амплитуды. Последний случай соответствует предельным значениям $c \rightarrow 0$, однако, $c \neq 0$ и $b_1 \rightarrow 3/(3\gamma+1)$. В качестве числового примера выберем параметры кривой 3 фиг.1:

$$c = \frac{107}{72} \frac{\gamma}{[36(3\gamma+1)]^2}, \quad b_{1,3} = \frac{107 \pm \sqrt{11887}}{72} \frac{1}{3\gamma+1}, \quad b_2 = \frac{1}{36} \frac{1}{3\gamma+1}$$

Тогда в случае воздушного пузырька ($\gamma = 1,4$) для параметров решений (2.7) и (2.8) будем иметь значения $a = 0.01064$, $s = 0.13515$. При таких параметрах кривые, построенные согласно решениям (2.7) и (2.8), практически совпадают и на фиг.2а представлены в виде кривой 5. С уменьшением величины c значения параметра s и амплитуды a также уменьшаются и совпадение точного решения с асимптотическим становится еще более убедительным.

3. Свободные колебания с учетом вязкости. Точное частное решение полного уравнения

$$\ddot{R} + \delta \dot{R} + \omega_{ar}^2 R - \alpha R^2 = 0 \quad (3.1)$$

Будем следовать методу, разработанному в [6] и использованному в [7,8] для построения решений нелинейных эволюционных уравнений. Искомые решения будем искать в виде ряда Лорана

$$R = r_1 F^{-2} + r_2 F^{-1} + r_3 + r_4 F + \dots \quad (3.2)$$

где функции $r_i(t)$, $F(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) должны определяться в процессе решения задачи. Подставляя (3.2) в уравнение (3.1), приравняем нулю коэффициенты при F^{-4} , F^{-3} , F^{-2} . В результате приходим к рекуррентным соотношениям, из которых последовательно определяются функции

$$r_1 = \frac{6}{\alpha} F_t^2, \quad r_2 = -\frac{6}{\alpha} \left(F_{tt} + \frac{\delta}{5} F_t \right), \quad F_t = \dot{F}, \quad F_{tt} = \ddot{F}, \dots \quad (3.3)$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \frac{\omega_{ar}^2}{\alpha} - \frac{1}{50} \frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{3}{5} \frac{\delta}{\alpha} F_t^{-1} F_{tt} + \frac{2}{\alpha} F_t^{-1} F_{ttt} - \frac{3}{2\alpha} F_t^{-2} F_{tt}^2$$

Для нахождения функции $r_7(t)$ рассматривается приравненный нулю коэффициент при F^2 . Однако, в силу определения (3.3) функции $r_1(t)$, величина $r_7(t)$ выпадает из выражения коэффициента, что приводит к нарушению рекуррентности получаемых соотношений. Поэтому можно полагать $r_i = 0$ для $i \geq 7$. Тогда из коэффициентов при F^5 , F^4 , F^3 соответственно будем иметь

$r_6 = r_5 = r_4 = 0$. Таким образом, в ряде (3.2) можно было бы ограничиться рассмотрением лишь первых трех членов. Из приравненного нулю коэффициента при F^{-1} следует уравнение

$$\ddot{r}_2 + \delta \dot{r}_2 + \omega_{ar}^2 r_2 - 2\alpha r_2 r_3 = 0 \quad (3.4)$$

Помимо определения (3.3) функции r_3 , из приравненного нулю коэффициента при свободных членах находим, что r_3 удовлетворяет также уравнению, по виду совпадающему с (3.1), откуда следуют тривиальные решения

$$r_3 = 0, \quad r_3 = \frac{\omega_{ar}^2}{\alpha} = \frac{2}{3\gamma + 1} \quad (3.5)$$

Теперь определим явный вид функции $F(t)$. Начнем со случая $r_3 = 0$. Тогда уравнение (3.4) становится линейным и его общее решение запишется в виде ($c_1, c_2 = \text{const}$)

$$r_2 = c_2 e^{\omega_1 t} + c_1 e^{\omega_2 t}, \quad \omega_{1,2} = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \omega_{ar}^2} \quad (3.6)$$

Сравнение формул (3.3) и (3.6) приводит к линейному неоднородному уравнению относительно функции $F(t)$

$$F_{tt} + \frac{\delta}{5} F_t = -\frac{\alpha}{6} [c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{\omega_2 t}]$$

Интегрирование полученного уравнения дает ($B_1, B_2 = \text{const}$)

$$F(t) = B_1 + B_2 e^{-\frac{\delta}{5}t} - \frac{\alpha}{6} \frac{c_1}{\omega_1} \frac{1}{\omega_1 + \delta/5} e^{\omega_1 t} - \frac{\alpha}{6} \frac{c_2}{\omega_2} \frac{1}{\omega_2 + \delta/5} e^{\omega_2 t} \quad (3.7)$$

Комбинирование формулы (3.7) с последним соотношением из (3.3), в котором $r_3 = 0$, позволяет получить связь между коэффициентами уравнения (3.1) и определить коэффициенты c_1, c_2

$$\omega_{ar}^2 = \frac{6}{25} \delta^2, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad r_2 = 0 \quad (3.8)$$

Нормируя с учетом (3.8) функцию (3.7), окончательно получим

$$F(t) = 1 + e^{-\delta t/5} = 1 + e^{-\omega_{ar} t / \sqrt{6}}, \quad B_1 = B_2 = 1$$

Тогда решение уравнения (3.1), в силу формулы для r_1 из (3.3), предстанет в виде

$$R = \frac{6}{25} \frac{\delta^2}{\alpha} (1 + e^{\delta t/5})^{-2} = \frac{\omega_{ar}^2}{\alpha} (1 + e^{\omega_{ar} t / \sqrt{6}})^{-2}$$

$$R(\infty) = 0 \quad R(0) = \frac{\omega_{ar}^2}{4\alpha} = \frac{1}{2(3\gamma + 1)} \quad (3.9)$$

Очевидно, что построенное решение описывает стадию сжатия пузырька.

Пусть теперь, согласно (3.5), $r_3 = \omega_{ar}^2 / \alpha$. Аналогичные выкладки вновь дают связь (3.8) и приводят к решению (3.9).

В заключение отметим, что в отсутствие вязкости $\delta = 0$ и реализации значения $r_3 = \omega_{ar}^2 / \alpha$ изложенный подход позволяет выявить явный вид функции $F(t) = 1 + \exp(\omega_{ar} t)$, посредством которого решение уравнения (3.1) вновь запишется в виде (2.4). Если же использовать значение $r_3 = 0$, то функция $F(t)$ после нормировки предстанет в виде $F(t) = 1 + \exp(\pm i \omega_{ar} t)$ и решением уравнения явится функция

$$R(t) = \frac{3}{2} \frac{\omega_{ar}^2}{\alpha} \cos^{-2} \left(\frac{\omega_{ar}}{2} t \right) = \frac{3}{3\gamma + 1} \cos^{-2} \left(\frac{\omega_{ar}}{2} t \right)$$

область применения которой ограничена ввиду возможности обращения в нуль знаменателя.

4. Гармонический анализ. Воспользуемся обобщенным методом усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского для построения приближенного решения уравнения (1.6), в котором $p_1 = 0$ [9]. Искомое решение представляется в виде

$$R(t) = A(t) \cos \varphi + r_2(A, \varphi) + r_3(A, \varphi), \quad \varphi = \omega_{ar} t + \beta \quad (4.1)$$

Здесь амплитуда $A \sim \varepsilon$ и фаза β являются медленно меняющимися функциями времени, r_2 и r_3 – слагаемые порядка ε^2 и ε^3 соответственно, ε – безразмерный малый параметр. Подстановка разложения (4.1) в уравнение и последующее приравнивание нулю совокупности членов одного порядка малости приводит к линейным неоднородным дифференциальным уравнениям относительно r_2 и r_3 . Требование отсутствия секулярных (вековых) членов в их общих решениях позволяет получить укороченные уравнения для определения A и φ

$$\dot{A} = -\frac{\delta}{2} A, \quad \dot{\varphi} = \omega_{ar} \left(1 - \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^4} A^2 \right) = \omega_{ar} \left(1 - \frac{5}{48} (3\gamma + 1)^2 A^2 \right)$$

Сами решения r_2 и r_3 предстанут в виде функций от амплитуды и фазы

$$r_2 = \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} \frac{A^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right), \quad r_3 = \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^4} \frac{A^3}{48} \cos 3\varphi$$

Тогда решение (4.1) примет окончательный вид

$$R(t) = \bar{R}(A) + A \cos(\varphi t) - \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} \frac{A^2}{6} \cos(2\varphi t) + O(\varepsilon^3) \quad (4.2)$$

$$\bar{R}(A) = \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} \frac{A^2}{2}, \quad \varphi = \omega_{ar} t + \frac{5}{48} \frac{(3\gamma + 1)^2}{\delta} \omega_{ar} A^2, \quad A = c_1 e^{-\frac{\delta}{2} t}$$

где $\bar{R}(A)$ – среднее значение возмущенного радиуса, c_1 – постоянная интегрирования.

При пренебрежении вязкостью $\delta = 0$ решение (4.1) запишется вновь в виде (4.2), в котором, однако,

$$\varphi \equiv \omega t = \omega_{ar} \left(1 - \frac{5}{48} (3\gamma + 1)^2 A^2 \right) t, \quad A = c_1 = \text{const}$$

Здесь $\omega(A)$ – нелинейная частота, являющаяся функцией амплитуды. Очевидно, что нелинейная частота меньше частоты собственных колебаний пузырька. Постоянная c_1 определится из требования совпадений в начальный момент времени $t = 0$ решения (2.7) с (4.2) – случай малых, но конечных амплитуд пульсаций и решения (2.8) с (4.2) – случай очень малых амплитуд. Численный анализ будет проведен на примере воздушного пузырька. В первом случае выберем значения $b_1 = 0.5254$, $b_2 = 0.1923$, $b_3 = -0.1408$, соответствующие кривой 2 фиг.1. Тогда в приближенном решении (4.2) будем иметь $A = c_1 = -0.16412$. Кривые 2,3, представленные на фиг.2б, построены по формулам (2.7) и (4.2) для конечных амплитуд. Из их сравнения видно, что различие между точным (2.7) и приближенным (4.2) решениями достаточно ощутимо. И это различие становится все большим с увеличением амплитуды a и параметра нелинейности $s < 1$. Во втором случае при малых пульсациях выберем $a = 0.09243$, $s = 0.038687$ соответствующие значению $c = 5.5\gamma[8(3\gamma + 1)]^2$ в определении функции $f(R)$. Тогда для приближенного решения (4.2) будем иметь $A = c_1 = -0.04621$. Для таких значений параметров точному (2.7) и приближенному (4.2) решениям на фиг.2а соответствуют кривые 1 и 4. При очень малых пульсациях возьмем ранее выбранные параметры точного решения (2.7) или его асимптотики (2.8), графики которых совпадают и приведены на фиг.2а в виде кривой 5. Тогда для приближенного решения (4.2) получим значение $A = c_1 = -0.005372$, по которому строится кривая 6 фиг.2а. Из сопоставления кривых 5 и 6 следует вывод, что в случае очень малых амплитуд приближенное (4.2) и точное (2.7) решения достаточно удовлетворительно согласуются. Согласование еще более улучшается с уменьшением амплитуды пульсации и параметра нелинейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.
2. Chapman R.B., Plesset M.S. Thermal effects in the free oscillation of gas bubbles // Trans. ASME, ser. D. J. Basic Eng. 1971. V.93, № 3. Рус. пер.: // Теор. основы инж. расчетов. 1971. Т.93. № 3. С.37-40.
3. Акуличев В.А. Пульсация кавитационных полостей // Мощные ультразвуковые поля. М.: Наука, 1968. С.129-165.
4. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400с.
5. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Edited by M. Abramowitz and I. Stegun. National bureau of standarts. Appl. mathem. series. 1964. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука. 1979. 832с.
6. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equation // J. Math. Phys. 1983. V.24. № 3. P.522-526.
7. Кудряшов Н.А., Сухарев М.Б. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде. // ПММ. 2001. Т.65. Вып.5. С.884-894.
8. Оганян Г.Г. О структурах нелинейных волн в термически релаксирующей газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 2. С.110-119.
9. Nayfeh A.H. Introduction to perturbation techniques. etc.: Wiley. 1981. (Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535с.)

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
25.11.2005