

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН,
 ОСЛАБЛЕННЫХ МОНЕТООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Եգիազյան Կ.Ա.

S.Z. Եղիազյան

Ճաքով թուլացված կլոր սալերի առանցքասիմետրիկ ծռումը

Աշխատանքում դիտարկվում է ճաքի ազդեցությունը համասեռ, հաստատուն հաստության սիմետրիկ բեռնավորված կլոր սալի ծռման վրա՝ կախված ճաքի դիրքից և մեծությունից, ինչպես նաև սալի ամրակցման ձևից (կոշտ և հոդակապորեն):

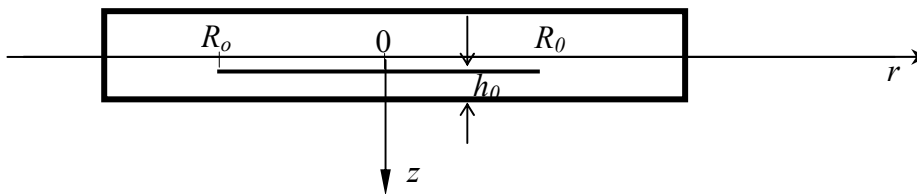
T.H. Yeghiazaryan

The axisymmetric bending of circular plates impaired by crack

In the article it has been considered the axisymmetric bending of circular plate with constant thickness, which has been impaired by crack. It has been analyzed the results depending on length and position of crack.

Рассмотрена задача осесимметричного изгиба круглой пластинки постоянной толщины, внутри которой расположена трещина. Проведен анализ результатов в зависимости от длины и расположения трещины пластинки.

Пусть в равномерно нагруженной круглой пластинке с радиусом R и толщиной h с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона (имеется трещина с радиусом $R_0 \in [0, R]$, расположенная на расстоянии $h_0 \in [0, 0.5h]$ от наружной плоскости (фиг.1).



Փիգ.1

В рассмотренном случае жесткость на изгиб пластинки представится в виде

$$D = \begin{cases} D_1 & r \in (0; R_0) \\ D_2 & r \in (R_0; R) \end{cases}$$

где $D_1 = D$, $D_2 = D$, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластинки.

Здесь $\nu = 1 - 3(1 + 3\nu^2)$, $\nu = h_0/h$.

Уравнения изгиба пластинки в цилиндрической системе координат r, z имеют вид:

$$w_i^{IV} + \frac{2}{r} w_i^{III} - \frac{1}{r^2} w_i^{II} + \frac{1}{r^3} w_i^I = \frac{q}{D_i} \quad (1)$$

$$i=1 \quad r \in [0; R_0]; \quad i=2 \quad r \in (R_0, R];$$

где q – равномерно распределенная нагрузка.

Приведенная модель для определения интегральных характеристик пластин с планарными трещинами была предложена в [1]. На основе этой модели были решены задачи устойчивости пластин с трещинами [1,2]. В [3] исследованы задачи собственных колебаний прямоугольных пластин с планарными трещинами.

Решения уравнений (1) представляются в виде [4]

$$w_i = A_i r^2 + B_i r^2 \ln r + C_i \ln r + K_i + \frac{q r^4}{64 D_i}, \quad (i=1,2) \quad (2)$$

Здесь A_i, B_i, C_i, K_i ($i=1,2$) – постоянные интегрирования.

Производя замену $\bar{w} = \frac{w}{h}, \bar{r} = \frac{r}{R}, \alpha = \frac{R_0}{R}$, получим (1) в безразмерном виде

$$\bar{w}_i^{IV} + \frac{2}{\bar{r}} \bar{w}_i^{III} - \frac{1}{\bar{r}^2} \bar{w}_i^{II} + \frac{1}{\bar{r}^3} \bar{w}_i^I = \frac{q R^4}{h D_i} \quad (3)$$

Общие решения уравнений (3) имеют вид:

$$\bar{w}_i = A_i \bar{r}^2 + B_i \bar{r}^2 \ln \bar{r} + C_i \ln \bar{r} + K_i + \frac{q \bar{r}^4}{64 D_i}$$

Из условия ограниченности прогиба и изгибающего момента в центре пластинки следует $B_1 = C_1 = 0$ и для участка $(0, R_0)$ прогиб (2) имеет вид [4]:

$$\bar{w}_1(\bar{r}) = A_1 \bar{r}^2 + K_1 + \frac{q \bar{r}^4}{64 D_1} \quad (4)$$

А для участка $(R_0; R)$

$$\bar{w}_2 = A_2 \bar{r}^2 + B_2 \bar{r}^2 \ln \bar{r} + C_2 \ln \bar{r} + K_2 + \frac{q \bar{r}^4}{64 D_2} \quad (5)$$

Для определения коэффициентов $A_1, K_1, A_2, B_2, C_2, K_2$ поступаем следующим образом.

Условия сопряжения на окружности $\bar{r} = \alpha$ имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{w}_2, \quad \bar{w}_1' = \bar{w}_2' \\ M_{rr}^{(1)} &= M_{rr}^{(2)}, \quad Q_{rz}^{(1)} = Q_{rz}^{(2)} \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$M_{rr}^{(i)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = -D_i \left[\frac{d^2 w_i}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_i}{dr} \right] - \text{изгибающий момент,}$$

$$Q_{rz}^{(i)} = -D_i \left(\frac{d^3 w_i}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_i}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw_i}{dr} \right) - \text{перерезывающая сила.}$$

Из условия $Q_{rz}^{(1)} = Q_{rz}^{(2)}$ следует, что $B_2 = 0$. Подставляя в (6) прогибы (4) и (5), получим

$$K_1 - K_2 + A_1\alpha^2 - A_2\alpha^2 - \frac{3(1-\nu^2)qR^4\alpha^4}{16Eh^4} + \frac{3(1-\nu^2)q\alpha^4 R^4}{16Eh^4\delta} - C_2 \ln \alpha = 0$$

$$-\frac{h}{R}\left(2A_2\alpha + \frac{C_2}{\alpha} + \frac{3(1-\nu^2)qR^4\alpha^3}{4Eh^4}\right) + \frac{h}{R}\left(2A_1\alpha + \frac{3(1-\nu^2)qR^4\alpha^3}{4Eh^4\delta}\right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{h}{\alpha^2 R}((1-\nu)C_2 + 2A_2\alpha^2(1+\nu) - 2A_1\alpha^2\delta(1+\nu)) = 0$$

1) На жестко заделанном крае $\bar{r} = 1$ пластинки прогиб и угол касательной к срединной поверхности равны нулю

$$\bar{w}_2 = 0, \quad \frac{d\bar{w}_2}{d\bar{r}} = 0,$$

т.е.

$$A_2 + K_2 + \frac{12qR^4(1-\nu^2)}{64Eh^4} = 0$$

$$\frac{h}{R}\left(2A_2 + C_2 + \frac{3(1-\nu^2)qR^4}{4Eh^4}\right) = 0 \quad (8)$$

что дает еще два уравнения относительно произвольных постоянных.

Решая уравнения (7) и (8), получим для жестко заделанной пластинки

$$w_1(\alpha) = \frac{3(\nu^2 - 1)qR^4(\delta + \delta^2 - \delta\nu + \delta^2\nu + \alpha^6(\delta - 1)^2(1 + \nu) - 4\delta\alpha^2 + \alpha^4 + \delta\alpha^4 - \nu\alpha^4 + \delta\nu\alpha^4)}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(1 + \nu) - \delta(1 + \nu))} -$$

$$-\frac{\alpha^4(\delta - 1)(1 + \delta - \nu + \delta\nu - 2\alpha^2 - 2\nu\alpha^2) - \alpha^2(\delta - 1)(\delta(1 + \nu) + \alpha^2(\alpha^2 - 2 + \nu(2 + \alpha^2)))}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(1 + \nu) - \delta(1 + \nu))} -$$

$$-\frac{4\alpha^2(\alpha^2 - 1)(\delta - 1)\delta(1 + \nu)\ln \alpha}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(1 + \nu) - \delta(1 + \nu))}$$

Наибольший прогиб при равномерно распределенной нагрузке q , как видно из (4), получается в точке $\bar{r} = 0$, где $\bar{w}_1 = K_1$

$$K_1 = 3(\nu^2 - 1)qR^4 \left(\frac{(\alpha^4(\delta - 1) - \delta)(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(1 + \nu) - \delta(1 + \nu))}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(\nu + 1) - \delta(1 + \nu))} - \frac{4\alpha^2(\alpha^2 - 1)(\delta - 1)\delta(\nu + 1)\ln \alpha}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(\nu + 1) - \delta(1 + \nu))} \right)$$

В табл. 1 приведены значения $\bar{K}_1 = K_1 \frac{16Eh^4}{3(1-\nu^2)qR^4}$ для различных α и β

Таблица 1

(жестко заделанная по краям пластинка, $\nu=0,3$)

$\beta \backslash \alpha$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.1	1	1.019	1.052	1.085	1.110	1.128	1.141	1.157	1.190	1.254	1.369
0.2	1	1.041	1.111	1.179	1.231	1.269	1.303	1.353	1.450	1.627	1.923
0.3	1	1.062	1.169	1.271	1.351	1.413	1.481	1.593	1.796	2.145	2.702

0.4	1	1.079	1.214	1.342	1.445	1.535	1.647	1.836	2.169	2.720	3.571
0.5	1	1.086	1.231	1.369	1.483	1.587	1.722	1.951	2.350	3.003	4

2) Если край пластинки шарнирно оперт, то прогиб и изгибающий момент в радиальном направлении равны нулю:

$$\bar{w}_2 = 0, \quad M_{rr}^{(2)} = 0$$

$$A_2 + K_2 + \frac{12qR^4(1-\nu^2)}{64Eh^4} = 0$$

$$\frac{-4C_2Eh^4(\nu-1) + (1+\nu)(-8A_2Eh^4 + 3(-3+2\nu+\nu^2)qR^4)}{4Eh^3R} = 0 \quad (9)$$

Решая уравнения (7) и (9), определим выражение прогиба для шарнирно опертой пластинки

$$w_1(r) = \frac{3(\nu-1)qR^4(5\delta+5\delta^2-4\delta\nu+6\delta^2\nu-\delta\nu^2+\delta^2\nu^2+\alpha^6(\delta-1)^2(1+\nu^2))}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)+\nu-\delta(1+\nu))} +$$

$$+ \frac{-12\delta r^2-4\delta\nu r^2+r+\delta r^4-2\delta\nu r^4-\nu^2 r^4+\delta\nu^2 r^4}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)+\nu-\delta(1+\nu))} -$$

$$\frac{\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)(\delta(7+\nu)+(\nu-1)r^2(2+r^2))}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)+\nu-\delta(1+\nu))} -$$

$$\frac{\alpha^4(\delta-1)(1+\nu)(\delta(\nu-3)-(\nu-1)(1+2r^2))-4\alpha^2(\delta-1)\delta(1+\nu)(-\nu-3+\alpha^2(\nu+1))\ln r}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)+\nu-\delta(1+\nu))}$$

и наибольший прогиб

$$K_1 = \frac{(1+\nu)(\nu-1)qR^4((\alpha^4(\delta-1)(1+\delta(\nu-3)-\nu)(\nu+1)+\delta(5+\nu)(1+\delta-\nu+\delta\nu))}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(\nu-1)+\nu-\delta(1+\nu))} +$$

$$+ \frac{\alpha^6(\delta-1)^2(\nu^2-1)-\alpha^2(\delta-1)\delta(7+8\nu+\nu^2)}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(\nu-1)+\nu-\delta(1+\nu))} -$$

$$\frac{4\alpha^2(\delta-1)\delta(1+\nu)(-3-\nu+\alpha^2(1+\nu))\ln \alpha}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(\nu-1)+\nu-\delta(1+\nu))}$$

В табл. 2 приведены значения $\bar{K}_1 = K_1 \frac{64(1+\nu)Eh^4}{(5+\nu)qR^4}$ для различных α и β .

Таблица 2

(шарнирно опертая по краям пластинка, $\nu=0,3$)

$\beta \backslash \alpha$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.1	1	1.016	1.050	1.092	1.138	1.185	1.230	1.271	1.308	1.341	1.369

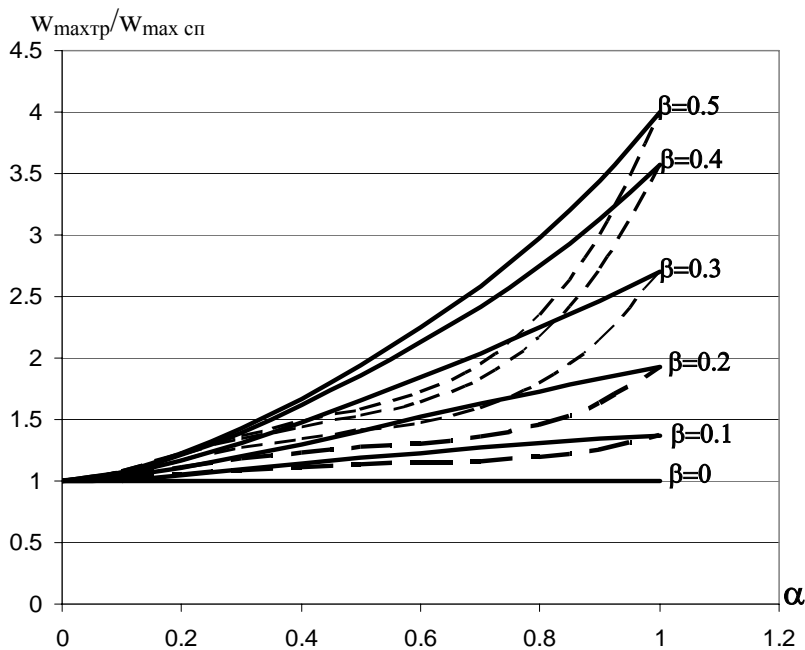
0.2	1	1.034	1.107	1.199	1.302	1.410	1.519	1.625	1.728	1.827	1.923
0.3	1	1.053	1.164	1.309	1.474	1.653	1.843	2.041	2.249	2.468	2.702
0.4	1	1.067	1.210	1.397	1.615	1.858	2.126	2.421	2.751	3.128	3.571

При отсутствии трещины, то есть когда $\alpha=0$ или $\alpha=1$, получим

$$K_1 = \frac{3(1-\nu^2)qR^4}{16Eh^3} \quad \text{для жестко заделанной пластинки и} \quad K_2 = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{3(1-\nu^2)qR^4}{16Eh^3}$$

для шарнирно опертой пластинки.

В случае $\alpha=1$ и $\alpha=0.5$, то есть когда трещина находится в середине и расположена по всему диаметру пластинки, максимальный прогиб в 4 раза больше максимального прогиба сплошной пластинки.



Фиг. 2

На фиг.2 для некоторых значений параметра β представлены графики отношения максимального прогиба пластинки с трещиной к максимальному прогибу сплошной пластинки в зависимости от α . Сплошные линии относятся к защемленной пластинке, а пунктирные – к шарнирно опертой.

Автор благодарит научного руководителя Гнуни В.Ц. за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В.Ц. К устойчивости сжатой длинной пластинки, ослабленной трещиной. // В сб.: "Исследование современных научных проблем в вузах" Ереван: Изд. "Айастан". 2000. Т2. С. 130-133.
2. Гнуни В.Ц., Егиазарян Т.А. Об устойчивости пластинок, ослабленных трещиной. //В сб. "Оптимальное управление устойчивости и прочности механических систем" Ереван. Изд. ЕГУ. 2002. С. 37-41.
3. Егиазарян Т.А. О собственных колебаниях пластинок ослабленных трещиной. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С. 9-14.
4. Кац А.М. Теория упругости. М.: Гостехтеориздат, 1956. 205с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
9.02.2006